Лабораторная работа № 108

Измерение моментов инерции системы тел и проверка теоремы Штейнера

Приборы и принадлежности: цилиндрическая платформа на трифилярном (трехнитевом) подвесе, секундомер, линейка, штангенциркуль, два цилиндра.

Краткая теория

1. Основные понятия

1. ***Момент инерции*** характеризует инертность твердого тела при вращении, также как масса — при поступательном движении.

Рассмотрим элемент тела, имеющий физически бесконечно малый объем $d\mathcal{V}$ и массу $dm = \rho d\mathcal{V}$ (ρ — плотность вещества), который удален от оси z на расстояние R (рис. 1). Момент инерции dI этого элемента относительно оси z равен:

$$dI = R^2 dm = R^2 \rho d\mathcal{V}. \qquad (1)$$

Момент инерции всего тела складывается из моментов инерции dI его частей. Такое «суммирование» представляет собой вычисление определенного интеграла. Поэтому ***момент инерции твердого тела относительно оси*** z ***находится по формуле***

$$I = \int_{\mathcal{V}} R^2 \rho d\mathcal{V}, \qquad (2)$$

где $\mathcal{V}$ — объем тела. В частности, если ось z совпадает с осью симметрии однородного сплошного цилиндра, имеющего массу m и радиус r (рис. 1), то вычисление интеграла (2) приводит к выражению

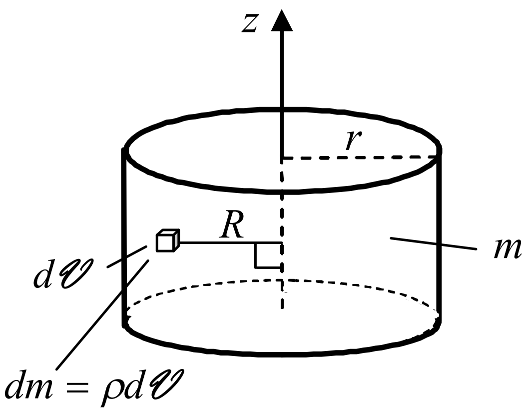


Рис. 1.

$$I_C = \frac{mr^2}{2}. \qquad (3)$$

Индекс «С» здесь использован в связи с тем, что ось z проходит через центр масс тела.

Отметим, что момент инерции механической системы относительно ***произвольной оси*** складывается из моментов инерции, которые имеют относительно ***этой же*** оси тела, составляющие систему.

2. ***Формулировка теоремы Штейнера*** сводится к следующему равенству:

$$I = I_C + md^2. \qquad (4)$$

Здесь I — ***искомый момент инерции тела относительно произвольной оси*** z***,*** I_C ***— момент инерции этого же тела относительно оси*** z'***, которая проходит через центр масс тела параллельно оси*** z ***,*** m ***— масса тела, а*** d ***— расстояние между осями*** (рис. 2).

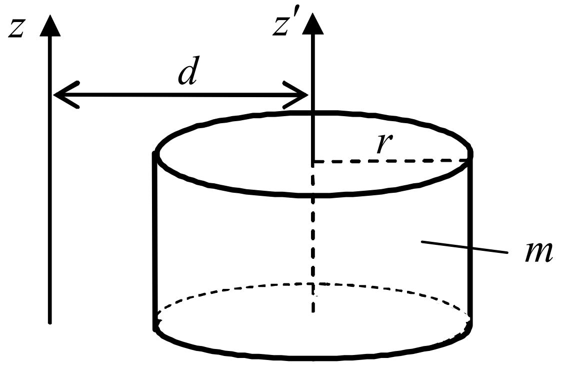


Рис. 2.

На конкретном примере рассмотрим, как применяется теорема Штейнера. Допустим, требуется рассчитать момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси z, представленной на рис. 2. Через центр масс цилиндра проведем ***вспомогательную*** ось z' параллельную оси z. Для вспомогательной оси z', проходящей через центр масс, момент инерции цилиндра определяется формулой (3), а расстояние между осями равно d. Поэтому из (4) следует, что искомый момент инерции

$$I = \frac{mr^2}{2} + md^2. \qquad (5)$$

3. ***Момент силы относительно оси*** M_z характеризует вращающее действие силы на тело, которое может вращаться вокруг оси z. Пусть на тело действует сила $\vec{F}$ (рис. 3). Тогда

$$|M_z| = F_{\perp} \cdot d, \qquad (6)$$

где $\vec{F}_{\perp}$ ***— составляющая силы*** $\vec{F}$***, лежащая в плоскости перпендикулярной к оси*** z***, а*** d ***— плечо, то есть длина отрезка перпендикулярного как к оси*** z***, так и к линии действия силы*** $\vec{F}_{\perp}$ (рис. 3).

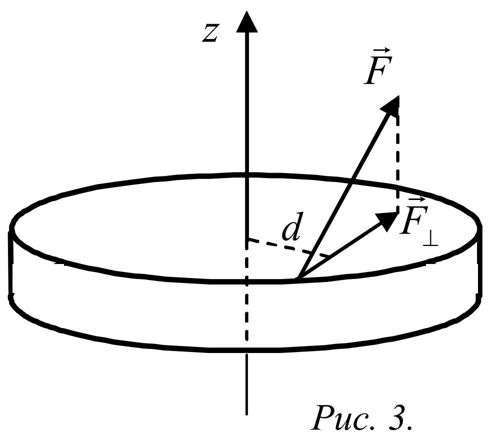


Рис. 3.

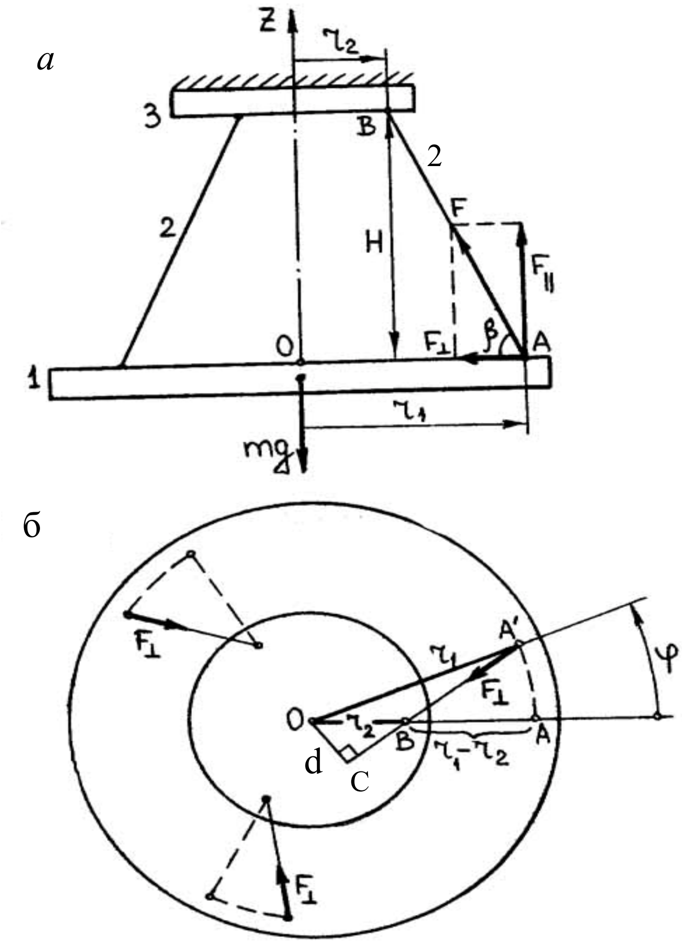
4. У***равнение динамики вращения*** твердого тела относительно неподвижной оси z имеет следующий вид:

$$I\varepsilon_z = \sum_i M_{i,z}. \qquad (7)$$

Здесь I **— момент инерции тела относительно оси вращения,** $\vec{\varepsilon}$ **— его угловое ускорение, а** $\sum M_{i,z}$ **— алгебраическая сумма моментов всех действующих на тело сил относительно оси вращения** z**.**

Именно из уравнения (7) следует, что, как отмечалось ранее, вращающее действие силы характеризуется ее моментом относительно оси вращения ($\varepsilon_z \sim M_z$), а момент инерции — мера инертности тела при вращении ($\varepsilon_z \sim \dfrac{1}{I}$).

2. Описание установки и обоснование методики измерений



1. Опытная установка (рис.4) представляет собой цилиндрическую платформу *1*, подвешенную на трех одинаковых нитях *2*, которые закреплены на неподвижном диске *3*. На платформу действует сила тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения каждой из трех нитей $\vec{F}$. Силу натяжения $\vec{F}$ можно разложить на составляющие $\vec{F}_{\parallel}$ (параллельную оси z) и $\vec{F}_{\perp}$ (лежащую в плоскости перпендикулярной к оси z). Составляющие $\vec{F}_{\parallel}$ трех сил $\vec{F}$ уравновешивают силу тяжести, откуда

$$F_{\parallel} = \frac{1}{3} mg\,. \qquad (8)$$

Модуль силы $\vec{F}_{\perp}$ можно найти с помощью рис. 4*а*:

Рис.4. Схема установки (а) вид сбоку и (б) вид сверху: 1 – платформа, 2 – нити, 3 – неподвижный диск.

$$F_{\perp} = F_{\parallel} \cdot ctg\beta = \frac{g}{3} ctg\beta \cdot m = k_1 \cdot m\,, \quad (9)$$

где β — угол, образованный нитью и плоскостью платформы, так что коэффициент k_1 определяется только геометрическими характеристиками установки.

Когда платформа находится в положении равновесия, силы $\vec{F}_{\perp}$ направлены радиально. По этой причине момент каждой из них относительно вертикальной оси симметрии установки (ось z на рис. 4*а*) равен нулю. Повернем платформу на угол φ. Тогда точка A, в которой нить крепится к платформе, перейдет в положение A'. Вследствие этого нить займет положение $A'B$ (B — точка, в которой нить крепится к неподвижному диску), и у каждой силы $\vec{F}_{\perp}$ появится плечо d (рис. 4б). Можно показать, что при малых значениях φ

$$d = k_2 \cdot \varphi\,, \qquad (10)$$

где коэффициент k_2 зависит только от положений точек крепления нитей к платформе и к неподвижному диску.

Формулы (9) и (10) приводят к следующему выражению для абсолютной величины результирующего момента трех сил натяжения относительно оси z, возникающему при повороте платформы на малый угол φ:

$$|M_z| = 3F_\perp d = km\varphi, \quad (11)$$

в котором коэффициент $k = 3k_1k_2$ определяется геометрическими характеристиками установки.

Докажем формулу (10). При малом угле φ угол OBC (рис. 4б) тоже мал. Поэтому значение угла OBC, выраженное в радианах, можно заменить его синусом: $\angle OBC = d/r_2$, где r_2 – радиус точек крепления нитей на неподвижном диске.

С другой стороны, $\angle A'BA = L_{A'A}/(r_1 - r_2)$, где $L_{A'A}$ — длина дуги AA', а r_1 – радиус точек крепления нитей на платформе (рис. 4). Так как $\angle OBC = \angle A'BA$, то

$$d = [r_2/(r_1 - r_2)]\, L_{A'A}. \quad (12)$$

Поскольку $L_{A'A} = r_1 \cdot \varphi$, то из (12) следует (10).

2. Момент сил натяжения, возникающий при повороте платформы, стремится вернуть ее в положение равновесия, то есть уменьшить угол поворота φ. По этой причине знаки M_z и φ должны быть противоположны, так что с учетом (11)

$$M_z = -km\varphi. \quad (13)$$

Подставив (13) в уравнение динамики вращения (7) и сделав замену $\varepsilon_z = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$, получим, что

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -km\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{km}{I}\varphi = 0. \quad (14)$$

Соотношение (14) представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний, имеющих циклическую частоту $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{km}{I}}$ и период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{km}}. \quad (15)$$

Выражая из (15) момент инерции, получим формулу, являющуюся теоретической основой данной лабораторной работы:

$$I = bmT^2, \quad (16)$$

где $b = k/4\pi^2$ — параметр, который зависит только от геометрических характеристик данной лабораторной установки. Этот параметр можно экспериментально определить путем измерения периода малых колебаний пустой платформы с известными массой $m_п$ и моментом инерции $I_п$.

После нахождения величины b установку можно использовать для измерения моментов инерции тел, у которых известна масса. Для этого, поместив на платформу исследуемое тело, имеющее массу m' и неизвестный момент инерции I', нужно измерить период колебаний системы платформа-тело. Затем суммарный момент инерции платформы и тела $I_п + I'$ рассчитывается по формуле (16), в которую подставляются известная масса системы $m_п + m'$ и измеренное значение периода колебаний T.

Измерения и их обработка

1. Определение параметра *b*

1. Ознакомьтесь с установкой и запищите в журнал заданные значения масс платформы $m_п$ и цилиндра $m_ц$. Измерьте диаметры платформы $D_п = 2r_п$ и цилиндра $D_ц = 2r_ц$.
2. Определите период *T* крутильных колебаний пустой платформы. Для этого поверните платформу вокруг вертикальной оси на малый угол, при котором смещение внешних точек платформы не превысит 10 мм, и отпустите. Измерьте время *t*, за которое совершится *N* =10 –20 колебаний. Рассчитайте период колебаний по формуле

$$T = \frac{t}{N}.$$

3. Повторите измерения и расчеты по пункту 2 еще 4 раза.

Таблица 1

№ опыта	N	t	T	$\overline{T}$	$m_п$	$r_п$	$I_п$	b
	—	с	с	с	кг	м	кг·м^2	м^2/с^2
1								
2								
3								
4								
5								

4. Вычислите среднее значение периода колебаний пустой платформы

$$\overline{T} = \frac{\sum_i T_i}{5}.$$

5. С помощью (3) рассчитайте момент инерции платформы $I_п$, а по формуле

$$b = \frac{I_{\text{п}}}{m_{\text{п}}\overline{T}^2},$$

вытекающей из (16), — значение константы b для данной опытной установки. Результаты измерений и расчетов занесите в таблицу 1.

2. Проверка теоремы Штейнера

1. Поместите два одинаковых цилиндра вблизи краев платформы симметрично относительно ее центра (рис. 5, вид сверху).
2. Пользуясь круговыми рисками на платформе и масштабной линейкой, измерьте расстояние d между центром цилиндра и центром платформы. Сообщите системе малые крутильные колебания и определите их период T по методике, описанной в пункте 2 ***предыдущего*** раздела.
3. Повторите действия, описанные в пункте 2 ***данного*** раздела, для трех других значений d, всякий раз приближая цилиндры к центру платформы на 1,5 — 2 см.
4. Поставьте цилиндры в центре платформы один на другой и определите период колебаний для этого случая ($d = 0$).

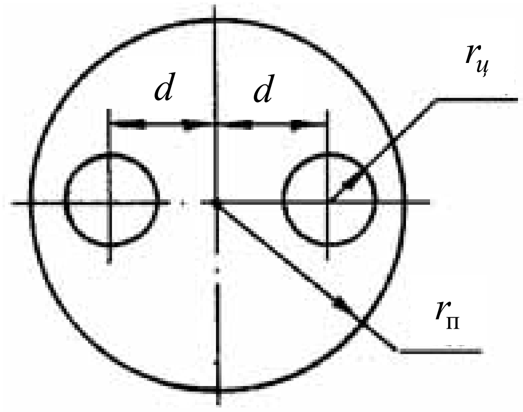


Рис. 5. Проверка теоремы Штейнера.

5. Для каждого значения d определите экспериментальное $I_э$ и теоретическое I_T значения момента инерции системы "платформа с двумя цилиндрами", где

$$I_э = b(m_{\text{п}} + 2m_ц)T^2$$

и

$$I_T = I_{\text{п}} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}m_ц r_ц^2 + m_ц d^2\right). \quad (17)$$

6. Определите относительное расхождение между экспериментальным и теоретическим значениями:

$$\eta = \frac{|I_э - I_T|}{I_T}\cdot 100\%.$$

7. Результаты измерений и расчетов занесите в таблицу 2.
8. Постройте график теоретической зависимости $I_T = f(d)$ и нанесите на него экспериментальные значения $I_э$.

Таблица 2

№ опыта	d	N	t	T	$I_э$	I_T	η
	м	—	с	с	кг·м^2	кг·м^2	%
1 2 3 4 5							

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Что такое момент силы относительно оси? Приведите формулу и рисунок.
2. Что такое момент инерции? Поясните его физический смысл.
3. Сформулируйте теорему Штейнера. Поясните связь между теоремой Штейнера и формулой (17).
4. Для случая, когда цилиндры поставлены один на другой в центре платформы, с помощью теоремы Штейнера рассчитайте момент инерции системы "платформа с двумя цилиндрами" относительно вертикальной оси, проходящей через край платформы.

Литература

1. Савельев И.В., Курс общей физики, т. 1, -М.: Наука, все издания.
2. Трофимова Т.И., Курс физики, -М.: Высшая школа, все издания; главы 3 и 4.
3. Веревочкин Ю.Г., Механика, -М.: МИИГАиК, 2005; §36, 45, 48, 49, 51, 54.