

На правах рукописи



Сугаипова Лейла Супьяновна

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ
МЕТОДОВ РАЗНОМАСШТАБНОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОПОТЕНЦИАЛА**

25.00.32 – Геодезия

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора технических наук

Москва – 2018

Работа выполнена во *ФГБУ «Московский государственный университет геодезии и картографии»*.

Научный консультант: **Нейман Юрий Михайлович**
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Конешов Вячеслав Николаевич**
доктор технических наук, профессор, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, заместитель директора института по научной работе

Рыхлова Лидия Васильевна
доктор физико-математических наук, Институт астрономии РАН, главный научный сотрудник

Плешаков Дмитрий Иванович
доктор технических наук, 27-й Центральный научно-исследовательский институт Министерства обороны РФ, начальник управления

Ведущая организация: ФГБУ «Центр геодезии, картографии и ИПД»

Защита состоится 20 сентября 2018 г. в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.143.03 при *Московском государственном университете геодезии и картографии*, расположенном по адресу: 105064, Москва, *Гороховский пер., 4, МИИГАиК, зал заседаний Учёного совета*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Московского государственного университета геодезии и картографии* и на сайте

www.miiгаik.ru/science/councils/dissertation/

Автореферат разослан «_____» _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Вшивкова Ольга Владимировна

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Как известно, одной из основных задач физической геодезии является моделирование внешнего гравитационного поля Земли (ГПЗ). основополагающие концепции этой и других задач физической геодезии разработаны нашими выдающимися соотечественниками Молоденским М.С., Броваром В.В., Пеллинином Л.П. и другими. При этом основным математическим аппаратом решения этой проблемы являются ряды по ортогональной системе сферических и шаровых функций. На данный момент получено большое количество моделей ГПЗ в виде ряда по шаровым функциям. По-видимому, предполагается, что, увеличивая максимальную степень разложения N ряда, можно описать потенциал, каким бы сложным он ни был. Однако, такое предположение противоречит известному свойству рядов Фурье о равномерном распределении локальных черт поля по всей планете. Поэтому реальная разрешающая способность определяется теми регионами Земли, в которых данные или вовсе отсутствуют или обладают низкой точностью. И единственный параметр, с помощью которого можно регулировать разрешающую способность модели, – наивысшая степень разложения N - не в состоянии сбалансировать неизбежные различия в исходных данных. Конешовым В.Н., Непоклоновым В.Б. и Половневым О.В. рассмотрен способ детализации глобальных моделей геопотенциала на основе информации о рельефе земной поверхности высокого разрешения. Но и такой подход имеет ограниченные возможности повышения разрешающей способности модели.

Для отображения локальных особенностей поля в диссертационном исследовании предлагается привлечь новые базисные функции, отличающиеся от шаровых функций наличием пространственной локализации. При этом не предполагается полный отказ от шаровых функций, которые хорошо проявили себя при описании низко- и среднечастотной частей гравитационного поля Земли. Но для моделирования высокочастотного диапазона волн необходимо *заменить ба-*

зисные функции на пространственно локализованные, которые в общем случае будем называть - вслед за геостатистикой - сферическими радиальными базисными функциями (СРБФ). Улучшение ситуации возможно только на основе разномасштабных методов моделирования, предполагающих разумное сочетание шаровых функций и СРБФ.

Таким образом, актуальность проделанных исследований определяется тем фактом, что представление потенциала в виде ряда по шаровым функциям достигло предела своих возможностей и не в состоянии удовлетворять растущие потребности в увеличении разрешающей способности и точности модели. Необходима новая технология моделирования ГПЗ, позволяющая теоретически неограниченно увеличивать разрешающую способность и точность модели по мере накопления данных и повышения их точности, что и разрабатывается в диссертации.

При моделировании среднечастотного диапазона поля на сегодняшний день наиболее подходящей информацией служит спутниковая градиентометрия. В связи с этим, отдельно отметим актуальность освоения зарубежного опыта обработки результатов спутниковой градиентометрии и необходимость собственных разработок в этой области, поскольку в отечественной литературе подобные работы не выполнялись, а среднечастотную часть отечественных моделей уточнять необходимо.

Степень разработанности темы исследования

Использование СРБФ и вейвлетов для моделирования ГПЗ не является чем-то принципиально новым. Здесь достаточно вспомнить многолетние попытки геодезистов моделировать ГПЗ в локальных районах с помощью так называемых точечных масс, которые можно рассматривать как простейшие СРБФ. В нашей стране этой тематике были посвящены работы, прежде всего, Страхова В.Н., Мещерякова Г.А., Марченко А.Н., а также Антонова В.А., Полещикова С.М., Фомина В.Н., Плешакова Д.И. и др.

Проблемой моделирования потенциала точечными массами и связанными

с этими задачами занимались также такие зарубежные учёные как Дж. Вейтман, Ф. Бартельмес, Дж. Бальмино, М. Вермеер, Дж.П. Рейли, С. Антунес, Р. Пейл и другие.

За рубежом задача моделирования ГПЗ с помощью вейвлетов и СРБФ в настоящее время находится в стадии активной разработки. Этими вопросами занимаются целые университеты. В нашей стране РБФ и вейвлеты активно используются для целей аппроксимации и моделирования нейронных сетей, экономических систем и др. Но, к сожалению, практически не разработанным остается это направление в приложении к геодезическим задачам. Одни из немногих работ выполнены в МГУ им. М.В. Ломоносова (Болотин Ю.В., Вязьмин В.С.) и в МИИГАиК (Мазурова Е.М., Лапшин А.Ю. и Нейман Ю.М., Сугаипова Л.С.). Что касается систематического изложения подобных вопросов, то монография [26] является, по-видимому, единственной.

В последние десятилетия мощный толчок в развитии получили космические методы геодезии благодаря реализации спутниковых проектов, направленных на решение геодезических проблем. Краткая история использования космических средств в геодезии и перспективы развития современных методов рассмотрены Рыхловой Л.В. и Шустовым Б.М. Здесь же необходимо отметить, что благодаря успешной работе проекта GOCE (17 марта 2009 г. - 21 октября 2013 г.) имеется обширный архив данных спутниковой градиентометрии. Эта информация наилучшим образом подходит для определения (уточнения) средневолнового диапазона спектра ГПЗ. Работы, посвященные различным аспектам обработки и использования градиентометрической информации для целей геодезии и смежных наук, за рубежом начались за много лет до запуска GOCE и всё ещё продолжаются. Но, к сожалению, в нашей стране очень мало внимания уделяется этим вопросам. Работы ведутся в Главной (Пулковской) астрономической обсерватории РАН (Петровская М.С., Вершков А.Н.) и в ФГБУН «Институт астрономии РАН» (Клюйков А.А.). Также можно отметить учебное пособие Яшкина С.Н., изданное в МИИГАиК. Систематическое изложение

необходимого теоретического материала, результатов численных исследований и основанных на них практических рекомендаций можно найти в монографии [26].

Цели и задачи диссертационной работы

Основной целью диссертации является разработка новой технологии моделирования геопотенциала, использующей для разных частей спектра базисные функции различной пространственной локализации и, вследствие этого, позволяющей теоретически неограниченно улучшать разрешающую способность и точность воспроизведения гравитационного поля Земли. При этом предусмотрена сегментация поверхности Земли по признаку пространственной стационарности, что обеспечивает дополнительную эффективность моделирования тонкой структуры поля по наземной гравиметрической информации.

Задачами диссертационных исследований, направленных на достижение поставленной цели, являются следующие:

- Обосновать тот факт, что представление потенциала в виде ряда по шаровым функциям достигло предела своих возможностей и не в состоянии удовлетворять растущие потребности в увеличении разрешающей способности модели. Вследствие этого, для моделирования высокочастотной части необходимо использовать другие базисные функции, отличающиеся от сферических функций наличием определённой пространственной локализации. Предложить новую структуру модели ГПЗ, разумно сочетающую использование традиционных и новых базисных функций.
- Изложить теоретические основы разномасштабного анализа и синтеза сигнала на сфере.
- Разработать методику локального моделирования ГПЗ с помощью СРБФ, проверить её эффективность численно.
- Рассмотреть возможные варианты расположения полюсов СРБФ, разра-

ботать методику отбора оптимального их подмножества.

- Исследовать существующие СРБФ и разработать новые для целей моделирования ГПЗ. Разработать методику сегментации ГПЗ по принципу пространственной стационарности, предложить методы преодоления возникающей проблемы согласования различных локальных моделей на границах сегментов.
- Разработать методику моделирования среднечастотной части ГПЗ с помощью спутниковой градиентометрии. Исследовать различные варианты реализации этой методики. Составить пакет необходимых программ, реализующих вычисление гармонических коэффициентов до 250-й степени.

Научная новизна

- Впервые разработана и практически реализована методика моделирования ГПЗ по результатам спутниковой градиентометрии, использующая гармонический анализ на основе новейших достижений математики в области выборок наивысшей алгебраической точности, что позволяет ограничиться регулярной сеткой с минимальным количеством узлов. Составлен пакет соответствующих программ, позволяющий получать модель среднечастотной части геопотенциала, превышающую по точности другие модели, не использующие градиентометрию.
- Впервые разработана и практически реализована методика регионального моделирования ГПЗ на части территории РФ с помощью пространственно локализованных базисных функций. Эта методика может быть использована для моделирования любых скалярных полей сложной структуры, заданных на поверхности Земли или сферы.
- Получены новые модификации известных в математике функций – ядра Абеля-Пуассона и ядра Стокса – позволяющие использовать их в качестве

масштабирующих функций и вейвлетов для локального анализа и синтеза геопотенциала и его трансформант.

- Введены новые пространственно локализованные базисные функции с метрикой Махаланобиса, позволяющие учитывать неоднородность моделируемого ГПЗ и решать проблему согласования региональных моделей на границах областей.
- Введено новое понятие – частотная характеристика оператора усечения ядра Стокса на внутреннюю и внешнюю зоны определённого радиуса - которое позволяет автоматически отсекалть неявное влияние внешней зоны при локальном восстановлении квазигеоида по гравиметрической информации в ограниченной области.
- Теоретически обоснован и программно реализован эффективный метод подбора оптимальных полюсов СРБФ, который может быть использован и для решения широкого класса задач геодезии, связанных с оптимизацией различного рода сетей.
- Разработана итерационная методика уточнения нормального поля геопотенциала, позволяющая существенно снизить влияние линеаризации и сферической аппроксимации краевой задачи геодезии и, таким образом, повысить точность воспроизведения высокочастотной части поля.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость работы базируется на обосновании того, что моделирование ГПЗ рядами по шаровым функциям в настоящее время, по существу, исчерпало свои возможности. Поэтому важное значение имеет разработка и исследование разномасштабных методов моделирования, предполагающих использование других - пространственно локализованных - базисных функций при моделировании тонкой структуры гравитационного поля Земли. Разработанные в рамках диссертационного исследования модификации существующих

СРБФ и введённые в рассмотрение новые СРБФ, использующие метрику Махаланобиса, новое понятие "частотная характеристика оператора усечения ядра Стокса на внутреннюю и внешнюю зоны определённого радиуса" обогащают теорию пространственно локализованных функций и расширяют их практические возможности при моделировании ГПЗ.

Предложенная в работе методика уточнения нормального поля геопотенциала может оказаться полезной при решении задач, основанных на предположении о малости возмущающего потенциала, близости искусственно построенного теллуроида к реальной поверхности Земли и т.п.

Отдельное теоретическое значение имеет исследование возможности применения для целей гармонического анализа ГПЗ по результатам спутниковой градиентометрии новейших достижений математики в области выборок наивысшей алгебраической точности - теоремы Макьюэна-Вью и теоремы об оптимальной выборке на сфере.

Практическая значимость результатов диссертации заключается в том, что разработанный алгоритм гармонического анализа ГПЗ по результатам спутниковой градиентометрии и соответствующий пакет программ могут быть использованы для практического построения глобальной модели геопотенциала в виде ряда по шаровым функциям до 250-й степени и порядка. Программный пакет внедрён в АО «Научно-производственная корпорация «Системы прецизионного приборостроения» в ходе выполнения СЧ ОКР «Изготовление автоматизированного комплекса программ из состава АПК ГГСК первого этапа», что подтверждается актом о реализации. Разработанные алгоритмы и программы разномасштабного анализа и синтеза сигналов могут быть использованы для высокоточного локального моделирования гравитационного поля Земли, рельефа и других скалярных полей сложной структуры, заданных на поверхности Земли (сферы). Указанные результаты внедрены в ИФЗ РАН при выполнении НИР «Рельеф СПП-С» по Государственному оборонному заказу по разработке аналитических моделей рельефа Земли с улучшенными характеристиками,

что подтверждается справкой о внедрении. Разработан алгоритм и составлена соответствующая программа подбора оптимальных полюсов СРБФ. Этот алгоритм может быть использован и для решения широкого класса задач геодезии, связанных с оптимизацией различного рода сетей.

Методология и методы исследования

Для решения поставленных задач использованы: элементы теории Молоденского и основные принципы физической геодезии и геостатистики, аппарат теории вейвлет-анализа и сферических радиальных базисных функций, методы численного интегрирования наивысшей алгебраической точности, линейной алгебры, теории случайных функций.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты:

- Методика моделирования ГПЗ по результатам спутниковой градиентометрии, опирающаяся на гармонический анализ на основе новейших достижений математики в области выборок наивысшей алгебраической точности, и пакет соответствующих программ.
- Обоснование нецелесообразности использования для моделирования ГПЗ длинных рядов Фурье по сферическим функциям. Методика регионального моделирования ГПЗ с помощью пространственно локализованных базисных функций, которая может быть использована и для моделирования любого другого скалярного поля сложной структуры на поверхности Земли (сферы), например, рельефа.
- Новые модификации ядра Абеля-Пуассона и ядра Стокса, расширяющие их геодезические приложения, а также новое понятие — частотная характеристика оператора усечения ядра Стокса на внутреннюю и внешнюю зоны определённого радиуса, позволяющая автоматически отсекать неясное влияние внешней зоны при локальном восстановлении квазигеоида по гравиметрической информации в ограниченной области.

- Новые пространственно локализованные базисные функции с метрикой Махаланобиса, позволяющие учитывать неоднородность моделируемого ГПЗ и решать проблему согласования региональных моделей на границах областей.
- Эффективный метод подбора оптимальных полюсов СРБФ, который может быть использован и для решения широкого класса задач геодезии, связанных с оптимизацией различного рода сетей.
- Итерационная методика уточнения нормального поля геопотенциала, позволяющая существенно снизить влияние линеаризации и сферической аппроксимации краевой задачи геодезии.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность научных и практических результатов проведённых исследований подтверждается их теоретическим обоснованием и большим количеством численных экспериментов, включающих сравнение с измеренными значениями (при их наличии) либо со значениями, полученными с использованием лучших зарубежных аналогов. Основные результаты диссертации доложены на следующих конференциях: Международная научно-техническая конференция (Москва, Россия, 2009, 2014); Научно-техническая конференция профессорско-преподавательского состава МИИГАиК (Москва, 2011, 2012, 2013, 2015); Научно-техническая конференция «Отечественные разработки в области геодезии и картографии и их применение в хозяйственной и оборонной деятельности страны», посвященная дню работников геодезии и картографии (Москва, 2012); Научно-технический семинар «Современное состояние и перспективы космической гравиметрии и градиентометрии» (Менделеево, Россия, 2014); Научно-практическая конференция «Применение геоинформационных систем военного назначения в Вооружённых Силах Российской Федерации. Проблемы и перспективы развития технологий создания, доведения средств топогеодезической информации» (Москва, «27 Центральный научно-исследовательский ин-

ститут» Министерства обороны Российской Федерации, 2016); Всероссийская научно-техническая конференция «Навигация по гравитационному полю Земли и ее метрологическое обеспечение» (Менделеево, Россия, 2017).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 26 печатных работах, из них 18 статей в журналах из списка ВАК ([1] - [18]), 1 статья в рецензируемых журналах [23], 1 монография [26].

Личный вклад автора. Положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В публикациях, подготовленных совместно с соавторами, вклад диссертанта является определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографии и 2 приложений. Общий объем диссертации 325 страниц, включая 66 рисунков и 12 таблиц. Библиография включает 186 наименований на 18 страницах.

Основное содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показаны теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, степень достоверности и апробация результатов.

В первой главе изложены необходимые теоретические сведения по разномасштабному анализу и синтезу сигнала. Прежде всего, обоснована необходимость использования пространственно локализованных базисных функций для моделирования высокочастотной части сигнала. Показано, что шаровые функции по своей природе не предназначены для отображения локальных особенностей поля. Наилучшим выбором является разумное сочетание шаровых функций и СРБФ, заключающееся в использовании первых для моделирования

низко- и среднечастотной частей, а вторых – для отображения высокочастотной части сигнала. В конечном счёте, рекомендуется следующая структура модели

$$T(P) = \frac{GM}{R} \left[\sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda) + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I_j} b_i^j \cdot B^j(P, Q_i) \right]. \quad (1)$$

где T - возмущающий потенциал, P - точка вычисления со сферическими координатами r, θ, λ в определённом регионе, G - гравитационная постоянная, M - масса Земли, R -отсчетный радиус (большая полуось эллипсоида или средний радиус Земли), B^j - пространственно локализованные базисные функции моделируемого региона с номером j (то есть вне этого региона $B^j \equiv 0$), J - количество таких регионов, Q_i - полюса СРБФ, I_j -количество полюсов в j -ом регионе (зависит от сложности поля в регионе), b_i^j - СРБФ-коэффициенты, $Y_{nm}(\theta, \lambda)$ - сферические функции степени n и порядка m , a_{nm} - соответствующие гармонические коэффициенты, N - максимальная степень разложения по сферическим функциям. Здесь первая группа слагаемых *одинакова для всей планеты* и описывает низко- и среднечастотные части возмущающего потенциала в виде традиционного разложения по шаровым функциям $(R/r)^{n+1}Y_{nm}$. Вторая группа описывает высокие частоты для *определённого локального региона* в виде разложения по новым базисным функциям B в соответствии с детальностью имеющейся наземной гравиметрической информации.

Предварительно всю поверхность планеты целесообразно разбить на области, в каждой из которых будет производиться персональная шлифовка модели. Модель уточняется по мере появления новой измерительной информации в каждой области отдельно без необходимости трудоёмких глобальных переычислений. Разбиение на области можно производить различными способами. Здесь предлагается производить сегментацию всей поверхности планеты по принципу пространственной стационарности поля.

В основе предлагаемого разномасштабного подхода к моделированию сигнала на сфере лежит возможность его представления в виде слоёв различного

уровня детальности с помощью пространственно локализованных функций – *масштабирующих функций* и *вейвлетов*.

Выражение вида

$$\Phi_j(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \phi_j(n) P_n(\nu), \quad \nu = \cos \psi$$

называется *масштабирующей функцией* на единичной сфере ω , если:

1. неотрицательная числовая последовательность $\phi_j(n)$ монотонно убывает по n и монотонно возрастает по j , то есть для всякого $j = 0, 1, \dots$ имеет место неравенство $\phi_j(n+1) < \phi_j(n)$, $n = 0, 1, \dots$ и для всякого $n = 0, 1, \dots$ имеем $\phi_{j+1}(n) > \phi_j(n)$, $j = 0, 1, \dots$; при этом $\phi_j(0) = 1$;
2. $\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j(n) = 1$ для всякого $n = 0, 1, \dots$, то есть $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_j(P, Q) = \delta(P, Q)$.

Здесь P_n - ненормированные полиномы Лежандра, ψ - сферическое расстояние между точками P и Q , $\delta(P, Q)$ - дельта-функция Дирака. Числовую последовательность $\phi_j(n)$ при фиксированном значении $j = 0, 1, \dots$ называют *символом масштабирующей функции*, а индекс j - *масштабным уровнем детализации*, или просто *масштабом*.

Из последнего условия вытекает соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \Phi_j * f\|_{L_2(\omega)} = 0,$$

обеспечивающее теоретическую возможность аппроксимации сигнала на единичной сфере ω с любой точностью с помощью свертки

$$\Pi_j f = (\Phi_j * f)(P) = \int_{\omega} \Phi_j(P, Q) f(Q) d\omega_Q, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

При этом, погрешность аппроксимации монотонно убывает с возрастанием масштабного параметра j . Масштабирующие функции могут иметь спектр ограниченный ($\phi_j(n) = 0$, $n > N_j$) и неограниченный ($\phi_j(n) \neq 0$, $\forall n$).

В пространстве Ω_R , внешнем относительно сферы ω_R радиуса R , масштабирующая функция имеет вид

$$\Phi_j(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{R^2} \phi_j(n) \left(\frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\nu), \quad \nu = \cos\psi.$$

Здесь r_P, r_Q обозначают отстояния точек $P, Q \in \Omega_R \cup \omega_R$ от начала координат.

Разность двух последовательных масштабирующих функций задаёт вейвлет масштаба j

$$\Psi_j(P, Q) = \Phi_{j+1}(P, Q) - \Phi_j(P, Q).$$

Свёртка сигнала с вейвлетом

$$\Lambda_j f = (\Psi_j * f)(P) = \int_{\omega} \Psi_j(P, Q) f(Q) d\omega_Q, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

определяет полосовую фильтрацию функции f , а соотношение

$$f(P) = \Pi_{j_0} f(P) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \Lambda_j f(P) = f_{j_0}(P) + \sum_{j=j_0}^{\infty} f_j(P). \quad (4)$$

демонстрирует разложение сигнала на слои разной детальности: здесь $\Pi_{j_0} f(P)$ описывает низкочастотную составляющую сигнала, а слагаемые $\Lambda_j f(P)$, $j = j_0, j_0 + 1, \dots$ содержат всё более и более детальную информацию. Таким образом, свёртки (2), (3) сигнала с масштабирующей функцией или вейвлетом равносильны фильтрации сигнала, соответственно, низкочастотной или полосовой. Таблица 1 содержит граничные длины полуволин тех деталей, которые пропускает полосовой фильтр масштаба j .

И масштабирующие функции, и вейвлеты являются функциями двух точек P и Q на сфере, зависящими только от расстояния между ними. Если одну из точек, например, Q , зафиксировать, то можно их рассматривать как *сферические радиальные базисные функции* (СРБФ). Точка Q называется *полосом* СРБФ. В этом случае, каждое слагаемое в (4) ищется в виде линейной комбинации СРБФ $B_j(P, Q)$ соответствующего масштабного уровня j :

$$f_j(P) = \sum_{i=1}^m b_i^j B_j(P, Q_i). \quad (5)$$

Таблица 1. Масштаб j фильтра, его пропускная способность d км и соответствующие граничные степени n сферических функций.

j	d min	d max	n min	n max
6	140	280	64	128
7	70	140	128	256
8	35	70	256	512
9	18	35	512	1024
10	9	18	1024	2048
11	4	9	2048	4096
12	2	4	4096	8192

Но в любом случае для аппроксимации сигнала в некоторой точке P имеются теоретические основания - в отличие от разложения по сферическим функциям - привлекать исходные данные только из *небольшой окрестности* этой точки. При этом полезно подобрать символ $\phi_j(n)$ так, чтобы спектр масштабирующей функции или СРБФ соответствовал спектру моделируемого сигнала.

Рассмотрены конкретные масштабирующие функции и вейвлеты, представляющие интерес для целей геодезии. Например, масштабирующая функция Абеля-Пуассона, представляющая собой ядро интегрального преобразования Пуассона, имеет вид:

$$\Phi_j(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp(-\rho 2^{-j} n) P_n(\nu) = \frac{1 - \exp(-\rho 2^{1-j})}{(1 + \exp(-\rho 2^{1-j}) - 2 \exp(-\rho 2^{-j}) \nu)^{3/2}}, \quad \nu = \cos \psi, \quad \rho > 0, \quad (6)$$

ρ – параметр. Соответствующий вейвлет

$$\Psi_j(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (\exp(-\rho 2^{-j} n) - \exp(-\rho 2^{1-j} n)) P_n(\nu).$$

При работе с СРБФ важное значение имеет расположение полюсов. В первой главе описаны некоторые регулярные сетки, используемые для этих целей с указанием их достоинств и недостатков. Рекомендуется пользоваться сеткой Рейтера (рис. 1, слева) либо сеткой Хилпикс (рис. 1, справа), поскольку они, в отличие от других типов сеток, обеспечивают равномерное распределение узлов по сфере, в том числе, в её полярных областях.

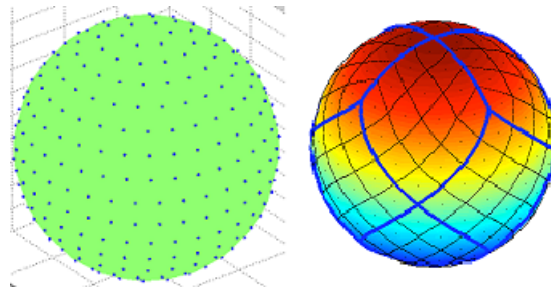


Рис. 1.

Описана процедура интерполяции и аппроксимации с помощью радиальных базисных функций (РБФ). От СРБФ их отличает более простая структура и возможность использования в произвольных областях n -мерного пространства со стандартной евклидовой метрикой. Указанный метод может быть использован, в частности, для перенесения результатов градиентометрии на сетку, наиболее подходящую для дальнейшего гармонического анализа. Показано, что интерполяция с помощью РБФ, по сути, обобщает метод коллокации.

Приведены рекуррентные формулы Кленшоу, представляющие собой очень полезный инструмент для суммирования рядов по полиномам Лежандра. В следующих главах эти формулы находят активное применение при вычислении значений построенных в диссертационном исследовании масштабирующих функций и вейвлетов Стокса.

Результаты первой главы опубликованы в работах [5], [9], [12], [26].

Вторая глава посвящена моделированию низкочастотной и среднечастотной частей геопотенциала. Низкие частоты приближённо до 36 - 40 степени могут быть определены кинематическими методами космической геодезии. В

диссертационной работе предложен простой вывод основного уравнения баланса энергии системы Земля - спутник в инерциальной и Гринвичской системах координат, не привлекающий сложные понятия аналитической механики и позволяющий определять возмущающий потенциал вдоль орбиты любого летящего объекта, снабжённого GPS/ГЛОНАСС, акселерометром и датчиками ориентации:

$$T(\vec{r}_e) + E = \frac{1}{2}(\vec{v}_e \cdot \vec{v}_e) - \frac{1}{2}[\vec{\omega} \times \vec{r}_e]^2 - V_t(\vec{r}_e) - U(\vec{r}_e) + \Delta E.$$

Здесь \vec{r}_e - вектор местоположения спутника в системе координат, связанной с Землёй, \vec{v}_e - вектор скорости, $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения Земли, T - искомый возмущающий потенциал, U - нормальный потенциал в точках орбиты спутника, E - полная энергия механической системы в случае отсутствия диссипативных сил. Однако в действительности такие силы всегда присутствуют (сопротивление атмосферы, солнечная радиация и др.), что приводит к определённой потере энергии ΔE , V_t - изменение земного потенциала за счёт притяжения Солнца, Луны и планет. Даны рекомендации по практическому вычислению составляющих.

Основное внимание во второй главе уделяется вопросам моделирования среднечастотной части ГПЗ ($\approx 100 \leq n \leq 250$) по результатам обработки спутниковой градиентометрии. В связи с этим, приводятся общие сведения о градиентометрии на примере европейского проекта GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer, 2009 - 2013 г.г.), который по праву можно считать наиболее выдающимся достижением в геодезической науке и практике за последнее десятилетие.

Объектом спутниковой градиентометрии служат вторые производные гравитационного (ньютоновского) потенциала V Земли, составляющие *матрицу Гессе* вида

$$H_V^i = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} \quad (7)$$

в инструментальной системе координат *i* градиентометра (GRF - Gradiometer Reference Frame). Однако только производные V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} , V_{xz} измерены достаточно надёжно; точность V_{xy} , V_{yz} значительно хуже.

Спектральная плотность $S(\nu)$ шумов, по данным Европейского Космического Агентства (ESA), не превышает $\sqrt{S(\nu)} \leq 4\text{мЕ}/\sqrt{\text{Гц}}$ в "измерительной полосе" частот $0,005 \leq \nu \leq 0,1$ в инструментальной системе координат, но практически используемый диапазон ограничивается частотами $0,005 \leq \nu \leq 0,05$. Так как период обращения спутника ≈ 5400 с, то за одну секунду спутник пролетает примерно $360^\circ/5400 = (1/15)^\circ = 4' \approx 110 \text{ км}/15 = 7,3 \text{ км}$. Это соответствует частоте в один герц. Поэтому граничная частота Найквиста 0,1 Гц соответствует приблизительно 73 км, что, в свою очередь, приблизительно соответствует степени разложения геопотенциала $\approx 110 \text{ км} \cdot 180/73 \text{ км} \approx 270$. Практически разрешающая способность не лучше 100 км и наивысшая степень CS-коэффициентов, которые можно определить достаточно надёжно, не превышает 240 - 260.

Опираясь на информацию о плотности шумов, в диссертации построена устойчивая и обратимая модель цветных шумов градиентометра в виде набора из 50 пар коэффициентов смешанного процесса авторегрессии и скользящего среднего (АРСС). Эта модель используется при моделировании реальных измерений, а также при составлении и обращении соответствующей ковариационной матрицы, громадный размер которой принципиально затрудняет использование для этих целей стандартного метода наименьших квадратов.

Для связи с Землёй выведены выражения вторых производных геопотенциала в спутникоцентрической локальной системе координат, ориентированной на север (LNOF - Local North Oriented Frame) и указана последовательность действий, необходимая для составления уравнений связи между измеренными вторыми производными геопотенциала (7) и искомыми гармоническими коэффициентами разложения по шаровым функциям (см. первую группу слагаемых в (1)).

В диссертации процесс определения гармонических коэффициентов геопотенциала по результатам спутниковой градиентометрии предлагается разбить на два больших этапа:

1. Создание на некоторой сфере (радиус которой выбирается с учётом средней высоты полёта спутника) сетки с результатами измерений вторых производных геопотенциала (назовём это первичной обработкой),
2. Гармонический анализ на этой сфере.

В свою очередь, для создания сетки на усреднённой сфере исследованы возможности следующих методов:

1. Средне-квадратическая коллокация орбитальных данных в шаровом слое диаметром ≈ 30 км;
2. Аналитическое продолжение орбитальных измерений на среднеорбитальную сферу;
3. Аппроксимация средствами радиальных базисных функций (РБФ).

Гармонический анализ на полученной в первом этапе сетке с целью восстановления гармонических коэффициентов возмущающего потенциала может быть реализован:

- С помощью численного интегрирования;
- Методом наименьших квадратов.

Создание сетки методом коллокации

Для первичной обработки в диссертации подробно исследован метод среднеквадратической коллокации, так как он позволяет не только интерполировать изучаемый сигнал в узлы сетки, но и получить оценку точности результата. При этом возникает необходимость в вычислении взаимных ковариаций между соответствующими трансформантами геопотенциала. В диссертации получено аналитическое выражение взаимной ковариационной функции для каких-либо двух трансформант потенциала, связывающей между собой точечные значения одной из них с усреднёнными по ячейкам значениями другой. Выведены выражения степенных дисперсий и степенных ковариаций для вторых производ-

ных потенциала в терминах гармонических коэффициентов. В случае задания исходной информации на регулярной сетке выведены эффективные формулы, которые на основе теоремы о выборке для рядов Фурье позволяют на порядок ускорить процесс вычисления значений аналитических взаимных ковариационных функций в 2 случаях – для точечных значений обеих трансформант; для точечных значений одной и усреднённых значений другой трансформанты потенциала. Эффективность формул подтверждается проведёнными численными экспериментами, что позволяет рекомендовать их для создания сетки значений вторых производных на среднеорбитальной сфере. Для численной реализации описанной процедуры разработаны программы в среде Matlab. Для подсчета значений степенных дисперсий и ковариаций использовалась модель EGM2008. При этом была удалена низкочастотная часть до 24-ой гармоники включительно. В качестве исходных измерений взяты реальные значения второй производной возмущающего потенциала, полученные по результатам спутниковой градиентометрии проекта GOCE за период 01 ноября - 31 декабря 2009 г. Вычисления с этими данными позволили получить на сфере радиуса 6637644 м значения второй производной возмущающего потенциала, усредненные по полуградусным ячейкам между параллелями $8^\circ - 172^\circ$.

Аналитическое продолжение орбитальных данных

Другим исследованным в диссертации методом создания нужной сетки вторых производных геопотенциала на среднеорбитальной сфере является аналитическое продолжение орбитальных данных. Радиус среднеорбитальной сферы $R = 6621830$ м подсчитан как среднее арифметическое отстояний от геоцентра всех взятых в обработку точек орбиты GOCE на период с ноября 2009 года по октябрь 2013 года. Поскольку эта орбита почти круговая, то при этом максимальное удаление точек орбиты от такой сферы, в основном, не превышает 16 км. Аналитическое продолжение (по радиусу-вектору) значений V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} на среднеорбитальную сферу можно выполнить различными методами. Согласно известной формуле конечных приращений Лагранжа, на интервале (A, B)

существует такая точка C , которая обеспечивает точное равенство (см. рис. 2):

$$V_{x_i x_j} \Big|_{\text{в точке } B \text{ на сфере}} = V_{x_i x_j} \Big|_{\text{в точке } A \text{ на орбите}} + \Delta r \frac{\partial V_{x_i x_j}}{\partial r} \Big|_{\text{в точке } C \in (A, B)}.$$

Здесь Δr обозначает разность полярных радиусов точки A на орбите и её проекции B на сфере, а $\frac{\partial V_{x_i x_j}}{\partial r}$ - радиальная производная соответствующего элемента $V_{x_i x_j}$ матрицы Гессе. Но, поскольку положение точки C не известно, практиче-

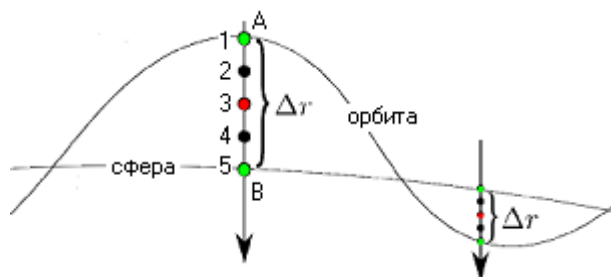


Рис. 2. Аналитическое продолжение с орбиты на среднеорбитальную сферу.

ски приходится довольствоваться приближённой формулой

$$V_{x_i x_j} \Big|_{\text{в точке } B \text{ на сфере}} \approx V_{x_i x_j} \Big|_{\text{в точке } A \text{ на орбите}} + \Delta r \frac{\partial V_{x_i x_j}}{\partial r} \Big|_{\text{в середине интервала } (A, B)}.$$

При этом значения вторых производных и радиальных производных в точках с нужными сферическими координатами получены суммированием ряда по шаровым функциям, соответствующим модели *GO_CONS_GCF_2_TIM_R5* (короче, TIM-r5) до 280-ой степени, полученной в 2014 году только по данным проекта GOCE. Выражения для вторых производных получены Петровской М.С., Вершковым А.Н.

Третий способ создания регулярной сетки вторых производных опирается на использование радиальных базисных функций (РБФ). Необходимая информация об этом методе и преимуществах его использования приведена в первой главе.

Преобразование хаотично расположенных результатов аналитического продолжения на регулярную сетку среднеорбитальной сферы

Результатом вычислений предыдущего раздела являются 96 346 693 точек, хаотично расположенных на среднеорбитальной сфере. В каждой такой точке

заданы три диагональных элемента T_{ii} матрицы Гессе ньютоновского потенциала без референцной части, вычисленной по модели TIM-r5 в геоцентрической прямоугольной системе координат, связанной с Землёй. Задача состоит в преобразовании этой информации на регулярную сетку сферы с таким шагом, который позволит затем достаточно надёжно выполнить разложение ньютоновского геопотенциала по сферическим функциям вплоть до степени $N = 240 - 280$. Для решения этой задачи выбрана структура сетки и её разрешающая способность на основе теоремы Макьюэна - Вью (McEwen - Wiaux, короче, MW теоремы) о выборке на сфере, гарантирующей точное восстановление N -частотно ограниченной функции по $\approx 2N^2$ равноугольным узлам. Известно множество различных методов преобразования данных с хаотичной сетки на сетку регулярную. Здесь использован аппроксиматор GridFit, точнее, его последняя (2014 г.) модификация под названием RegularizeData3D в силу следующих факторов:

- Алгоритм, используемый в этом пакете, предполагает определённую регуляризацию возникающих систем уравнений, что полезно при работе с большим количеством измерений, как это имеет место в градиентометрии;
- Имеется параметр сглаживания $\lambda > 0$, с помощью которого можно регулировать степень сглаживания результата, подстраивая его под уровень шумов в исходных данных;
- Имеется возможность разделять исходные данные на отдельные блоки, что практически не отражается на точности расчётов, но существенно ускоряет вычисления при наличии очень большого количества узлов конструируемой регулярной сетки. Так, при $N = 280$ количество узлов с определяемыми значениями $= 280 \cdot 559 = 156520$ и потребность в делении на блоки не возникает, однако при $N = 900$ количество узлов с определяемыми значениями $= 1169100$, и только деление на блоки позволяет выполнить вычисления при разумных затратах времени.

Гармонический анализ на среднеорбитальной сфере

Гармонический анализ по результатам первичной обработки целесообраз-

но проводить с помощью численного интегрирования, опираясь на теоремы о выборке, поскольку они позволяют восстановить исследуемую функцию с наивысшей алгебраической точностью по её дискретным значениям. В диссертационной работе исследованы 4 метода гармонического анализа, использующих указанный подход: классический Гаусса-Лежандра, сравнительно новый Дрисколл-Хили и основанные на двух последних достижениях математики в вопросах об оптимальных выборках на сфере – теореме Макьюэна-Вью и теореме об оптимальной выборке на сфере. Проведенные численные эксперименты показали высокую точность определения гармонических коэффициентов геопотенциала по вторым производным для всех исследованных теорем. Но именно теорема Макьюэна-Вью позволяет пользоваться регулярной сеткой и при этом ограничиться минимальным количеством узлов.

На основе указанных исследований и рекомендаций сформулирован и практически реализован алгоритм моделирования ГПЗ по результатам спутниковой градиентометрии до 250-ой степени и порядка. В качестве исходных данных использованы архивные значения диагональных элементов матрицы Гессе потенциала на реальной орбите за почти четырёхлетний период полёта спутника GOCE в локальной спутникоцентрической системе координат (LNOF).

Общая схема алгоритма

Реализованный алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Преобразование исходных измерений в геоцентрическую прямоугольную систему координат, связанную с Землёй (ECEF).
2. Аналитическое продолжение орбитальных измерений на среднеорбитальную сферу радиуса $R = 6\,621\,830$ м на основе формулы конечных приращений Лагранжа.
3. Преобразование результатов аналитического продолжения на регулярную сетку среднеорбитальной сферы с помощью программного пакета GridFit (RegularizeData3D).
4. Гармонический анализ на основе MW-теоремы о выборке на сфере по

информации на регулярной сетке, предназначенной для определения гармонических коэффициентов до степени $N = 900$, в 3,75 раз превышающей нужную степень $N = 240$.

5. Масштабирование полученных гармонических коэффициентов вторых производных для того, чтобы "опустить" их к Земле.

6. Преобразование гармонических коэффициентов вторых производных в гармонические коэффициенты возмущающего потенциала на основе формул, полученных Петровской М.С. и Вершковым А.Н.

7. Уравнивание полученных по V_{xx} , V_{yy} и V_{zz} трёх наборов гармонических коэффициентов геопотенциала и урезание их до степени 250.

Сравнение полученной модели с одной из современных европейских моделей TIMr5 подтверждает высокое качество результата моделирования. На рисунке 4 представлены степенные стандарты погрешностей модели EGM2008 и полученных коэффициентов геопотенциала. Наглядно видно, что в среднечастотной части спектра модель, полученная с использованием градиентометрической информации, заметно превосходит по точности ту, в которой указанная информация не применялась (EGM2008).

Для реализации описанного алгоритма составлен комплекс программ в среде MATLAB с использованием пакетов GridFit и ssht.

Для оценки надёжности указанного алгоритма в диссертации проделаны многочисленные эксперименты. Результаты одного из них показаны на рис. 5.

Слева изображены относительные ошибки определения гармонических коэффициентов возмущающего потенциала в единицах степени 10 на основе MW-теоремы о выборке в условиях, когда исходные значения вторых производных T_{zz} частотно ограничены степенью 240, то есть степень разложения совпадает с граничной частотой исходных данных. В результате все коэффициенты определяются с высокой, хотя и не одинаковой точностью - зональные коэффициенты и близкие к ним, по-видимому, определять труднее. По оси абсцисс отложены степени коэффициентов, по оси ординат - их порядки. Справа – то же, но

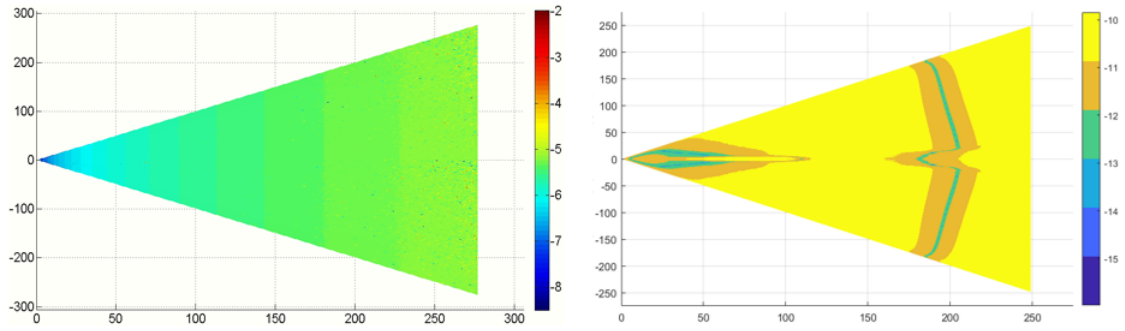


Рис. 3. Слева - относительные величины отклонений полученных гармонических коэффициентов геопотенциала от соответствующих модельных значений TIMr5. Справа - десятичные логарифмы абсолютных разностей стандартов погрешностей коэффициентов моделей EGM2008 и полученной. По оси абсцисс отложены степени коэффициентов, по оси ординат - порядки.

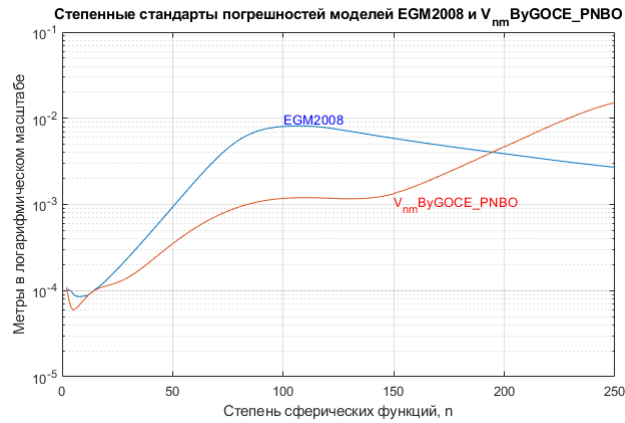


Рис. 4. Степенные стандарты погрешностей моделей EGM2008 и полученной.

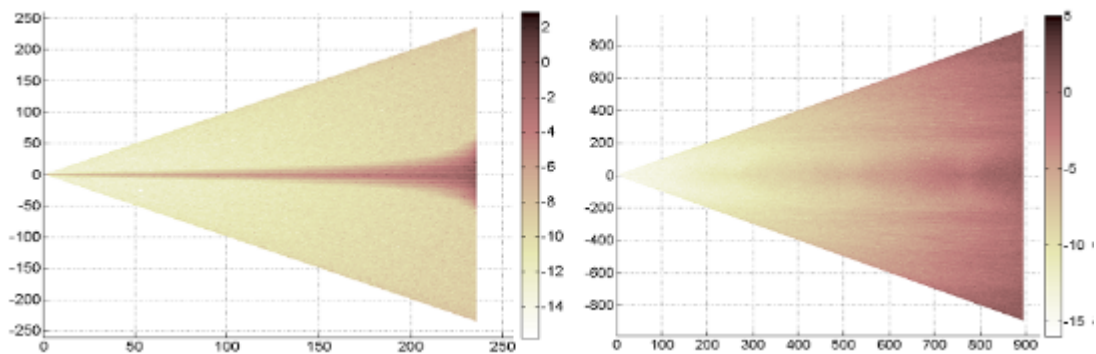


Рис. 5.

наивысшая степень разложения 900, а исходные данные не являются частотно ограниченными. Наложение высоких частот безнадёжно искажает определяе-

мые гармонические коэффициенты высоких степеней. Однако точность определения коэффициентов, степень которых менее 300, можно считать вполне удовлетворительной, так как их относительные ошибки для всех порядков оказываются не хуже одной миллионной. Таким образом, для надёжного оценивания гармонических коэффициентов до степени 240 - 260 желательно выполнять гармонический анализ до степени ≈ 900 . Это существенно увеличивает, конечно, объём необходимых вычислений, но зато избавляет от необходимости особенно тщательной предварительной низкочастотной фильтрации исходных данных.

Другой подход к гармоническому анализу предполагает использование метода наименьших квадратов. В диссертационной работе составлены необходимые уравнения связи, устанавливающие зависимость непосредственно между измеренными вторыми производными и гармоническими коэффициентами самого потенциала. При этом использованы формулы, полученные Петровской М.С. и Вершковым А.Н. Однако, если привлекать все измеренные значения вторых производных, то полученная система оказывается непомерно большой. Для того, чтобы избежать возникающей потребности в больших объёмах памяти компьютера предлагается при решении системы нормальных уравнений воспользоваться итерационным методом наименьших квадратов, опирающимся на алгоритм метода сопряженных градиентов. Такой подход позволяет в определённой мере обойтись без явного составления уравнений связи и нормальных уравнений. Рассмотрены приближённые методы, позволяющие заменить возникающие при этом действия обращения и перемножения матриц операцией фильтрации, требующей гораздо меньших объёмов памяти. В качестве адекватной модели фильтра используется составленная ранее АРСС-модель цветного шума градиентометра.

Результаты второй главы опубликованы в работах [1], [2], [3],[4], [6], [8], [11], [13], [14], [19], [20], [21], [23], [24], [25], [26].

Третья глава посвящена проблеме моделирования высокочастотной части геопотенциала. Как показано в первой главе, для этой цели лучше всего

подходят пространственно локализованные базисные функции - СРБФ. При этом возникают задачи, отличающиеся от тех, которые приходится решать при работе с рядами Фурье. Здесь имеются ввиду проблемы оптимального расположения полюсов, подбора наиболее подходящих масштабов СРБФ, определения СРБФ-коэффициентов и другие.

При моделировании сигнала с помощью СРБФ важнейшей задачей является оптимальный подбор полюсов, поскольку их количество и местоположение оказывают существенное влияние на объём вычислений и надёжность результатов. В диссертационном исследовании предложен эффективный алгоритм, позволяющий составить оптимальное подмножество полюсов из всех имеющихся возможных вариантов с помощью *ортогонального метода наименьших квадратов*. Соответствующие уравнения связи имеют вид

$$Ab = u + v; \quad A = (a_{ki}) = (B_j(P_k, Q_i)); \quad k = 1, 2, \dots, m_1; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad m \leq m_1;$$

или

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m = u + v.$$

Здесь b_1, b_2, \dots, b_m - СРБФ-коэффициенты, подлежащие определению, u - столбец измерений, v - столбец поправок, P_k - точки с исходными данными, Q_i - полюса СРБФ, a_1, a_2, \dots, a_m - m_1 -мерные линейно независимые векторы-столбцы матрицы A , определяющие базис некоторого m -мерного подпространства Π_m пространства измерений. Доказано, что наибольший вклад даёт столбец, который составляет наименьший угол со столбцом свободных членов u в m_1 -мерном пространстве.

Описанный алгоритм ранжирования столбцов матрицы уравнений связи по их влиянию на конечный результат может быть использован и в других задачах, например, при отборе наиболее эффективных измерений для оптимизации разного рода геодезических построений.

При решении задачи адаптации глобальной модели ГПЗ к региональным особенностям в качестве исходных данных может быть использована любая

гравиметрическая информация, из которой предварительно удалена низко- и среднечастотная часть с помощью какой-нибудь надёжной глобальной модели. Остаточный возмущающий потенциал представляется линейной комбинацией СРБФ. В диссертации обсуждаются вопросы выбора конкретного вида СРБФ в зависимости от природы имеющейся информации, от размеров региона и сложности поля в нём. Отдельной задачей является определение коэффициентов линейной комбинации. Проанализированы разные подходы к их определению. Подробно изложена процедура совместной обработки нескольких групп разнородных данных в условиях поставленной задачи.

На основе всего вышеизложенного разработан алгоритм регионального моделирования ГПЗ с помощью СРБФ, состоящий из следующих этапов:

1. Выбор размеров региона и референц-модели.
2. Удаление из гравиметрической информации региона низкочастотной части поля, содержащейся в избранной референц-модели.
3. Создание сетки полюсов СРБФ.
4. Выбор СРБФ и их масштаба.
5. Вычисление СРБФ-коэффициентов.
6. Выявление необходимости локального уточнения модели.
7. Последовательное добавление отдельных СРБФ с индивидуальными параметрами и полюсами.
8. Вычисление коэффициентов для всех СРБФ с учётом добавленных.
9. Переход к шагу 6. Процедура заканчивается, когда необходимость локального уточнения исчерпана.

Этот алгоритм численно реализован с использованием реальных гравиметрических данных – аномалий силы тяжести и аномалий высоты, заданных на регулярной сетке $5, 0' \times 7, 5'$ в регионе размером 4° по широте и 6° по долготе. В качестве известной низкочастотной части поля использована референц - модель ГПЗ GOCE_DIR240, полученная по результатам спутниковой градиентометрии GOCE прямым методом до 240-ой степени. Задействованы 779 полюсов

Таблица 2. Статистика результатов последовательной аппроксимации региональной аномалии силы тяжести.

Тип данных	Мин.	Макс.	Сред. знач.	Сред. квадр.
Остаточные Δg по модели (8), мГал	- 13,40	16,12	-0,08	3,50
Остаточные ζ по модели (8), м	-0,04	0,05	0,00	0,01
Остаточные Δg по модели EGM2008, мГал	-16,64	17,78	-0,27	4,96

на территории $6^\circ \times 8^\circ$ на глубине 80 км. Для подбора оптимальной глубины составлена MATLAB-программа. В качестве сферических радиальных базисных функций использованы вейвлеты Пуассона 3-го порядка, поскольку они хорошо себя зарекомендовали при решении подобных задач:

$$\Psi^{(3)}(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (an)^3 \frac{2n+1}{r_Q} \left(\frac{r_Q}{r_P}\right)^{n+1} P_n(\nu).$$

где $a = \ln R_B - \ln r_Q$, R_B - радиус расположенной внутри масс сферы (Бьерхаммара). В результате получена следующая аппроксимирующая конструкция:

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[\sum_{n=2}^{240} \left(\frac{R}{r}\right)^n Y_n(\theta, \lambda) + \sum_{i=1}^{779} b_i B_i(r, \theta, \lambda) \right]. \quad (8)$$

Здесь Y_n - сферическая функция n -ой степени, i - номер полюса на сетке, B_i - сферическая радиальная базисная функция с полюсом i .

Общее количество коэффициентов, использованных для моделирования, составляет $241^2 + 779 \approx 59000$. Для сравнения, в таблице 2 представлена статистика восстановления поля аномалии силы тяжести в рассматриваемом регионе по модели (8) и по известной глобальной модели EGM-2008 до 2160-ой степени, содержащей более четырёх с половиной миллионов коэффициентов (в 76 раз больше, чем в (8)).

Рассмотренное локальное моделирование ГПЗ проще производить в районах с достаточно однородным полем. Поэтому, если в моделируемой области поле имеет сложную структуру, то целесообразно её предварительно разбить на сегменты, в каждом из которых поле будет однородным. В диссертации предлагается производить сегментацию поля на основе вейвлет-анализа имеющейся гравиметрической информации, поскольку именно вейвлет-анализ позволяет не только выявить наличие тех или иных амплитуд в спектре, но и определить их местоположение. При этом важную роль играет выбор критерия однородности. Например, можно в качестве критерия использовать модуль разности между экстремальными значениями вейвлет-коэффициентов. Если он превышает определённый порог, то необходимо разбить область на четыре части и в каждой из них повторить процедуру. Если для какой-нибудь четверти критерий опять не выполняется, то она аналогичным способом делится на более мелкие четверти и так далее. Такой способ обычно представляется в виде так называемого *квадродерева* (вершины, не являющиеся листьями, имеют ровно четыре потомка). Если все полученные блоки удовлетворяют указанному порогу, то процедура завершается. На рисунке 6 показаны коэффициенты $sA1$ одноуровневого двумерного вейвлет-преобразования аномалий $\Phi_{\text{ая}}$ на миллионном листе карты N45 (слева) и результат сегментации соответствующего гравитационного поля (справа). Для уточнения указанного критерия однородности полезно привлечь скорость изменения анализируемого гравитационного поля или его вейвлет-преобразования с изменением местоположения. Практически для этого достаточно вычислить модули градиентов и полагать поле неоднородным там, где модуль градиента превышает определённое пороговое значение. При этом форма блоков оказывается произвольной.

При региональном моделировании поля может возникнуть проблема несогласованности результатов моделирования на стыках областей. Для преодоления этой проблемы разработаны СРБФ специального вида, в которых квадрат евклидова расстояния между точками заменяется квадратичной формой Маха-

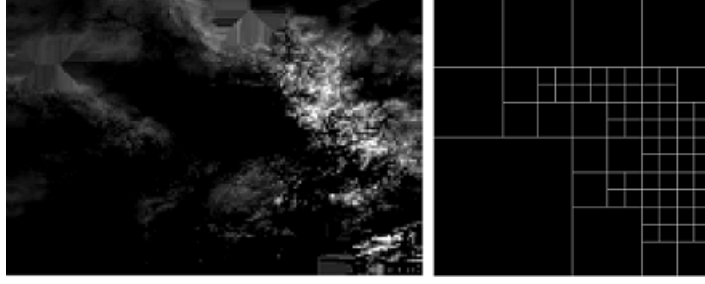


Рис. 6.

ланобиса, обобщающей это понятие.

Предположим, что некоторый регион моделирования высокочастотной части ГПЗ по наземной гравиметрической информации разделен на сегменты. Пусть R обозначает средний радиус Земли, l - длину дуги радиуса R между точками Q и P на земной сфере, принадлежащими данному региону, s - длину соответствующей хорды, ψ - сферическое расстояние между точками Q и P . Тогда

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{s}{2R} \Rightarrow 1 - \cos \psi = 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} = \frac{s^2}{2R^2}. \quad (9)$$

Здесь $s^2 = \overrightarrow{QP}^T \overrightarrow{QP}$ - квадрат евклидова расстояния между точками Q и P . Заменяем теперь s^2 в (9) квадратичной формой Q_{ij}

$$1 - \cos \psi = \frac{Q_{ij}}{2R^2}, \quad (10)$$

определяемой выражением

$$Q_{ij} = \overrightarrow{QP}^T \Sigma^{-1} \overrightarrow{QP} \quad (11)$$

в случае, когда точки Q и P принадлежат одному сегменту, и выражением

$$Q_{ij} = \overrightarrow{QP}^T \left[\frac{1}{2} (\Sigma_i + \Sigma_j) \right]^{-1} \overrightarrow{QP}, \quad (12)$$

когда Q и P принадлежат разным сегментам с номерами i, j . Матрица анизотропности Σ характеризует ковариационную структуру поля. В двумерном

случае она определяется соотношением

$$\Sigma = A(\alpha) \begin{pmatrix} \theta_1^{-1} & 0 \\ 0 & \theta_2^{-1} \end{pmatrix} A(\alpha)^T = \begin{pmatrix} \theta_1^{-1} \cos^2 \alpha + \theta_2^{-1} \sin^2 \alpha & (\theta_1^{-1} - \theta_2^{-1}) \cos \alpha \sin \alpha \\ (\theta_1^{-1} - \theta_2^{-1}) \cos \alpha \sin \alpha & \theta_2^{-1} \cos^2 \alpha + \theta_1^{-1} \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (13)$$

Если поле неизотропное, то радиус корреляции d в общем случае является некоторой функцией направления, то есть $d = d(\alpha)$, где α - наименьший угол, отсчитываемый от оси абсцисс в положительном направлении. Направление α_{an} , соответствующее наибольшему радиусу корреляции $d_{max} = d_1$, называется направлением анизотропности. Угол $\alpha_{an} + \pi/2$ соответствует наименьшему радиусу корреляции $d_{min} = d_2$. Указанные три значения - α_{an} , d_1 , d_2 - называют существенными параметрами двумерной ковариационной функции однородного неизотропного поля. В соотношении (13) $\theta_j = 1/d_j^2$, а

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} -$$

матрица поворота.

Если в выражении какой-нибудь СРБФ $\cos \psi$ заменить в соответствии с формулой (10), то значение расстояния точки P от полюса Q будет определяться ковариационной структурой поля в направлении \overrightarrow{QP} .

Например, простейшее ядро Гаусса

$$K(P, Q) = e^{-\rho(1-\nu)}, \quad \rho > 0 - \text{параметр,}$$

примет вид

$$B(P, Q) = e^{-\rho \frac{Q_{ij}}{2R^2}}. \quad (14)$$

Также в диссертационной работе получены новые масштабирующие функции и вейвлеты, представляющие собой модификации известных функций Абеля-Пуассона и Стокса.

Модифицированные масштабирующие функции Абеля-Пуассона (6)

$$L_{\delta g} \Phi_{b_j}(\nu) = -\frac{3 \cdot b_j \cdot (r_P - r_Q \cdot \nu)}{r_Q \cdot r_P \cdot (1 + b_j^2 - 2b_j \nu)} \cdot \Phi_{b_j}(\nu),$$

$$L_{\Delta g} \Phi_{b_j}(\nu) = \left(-\frac{2}{r_P} - \frac{3 \cdot b_j (r_P - r_Q \cdot \nu)}{r_Q \cdot r_P \cdot (1 + b_j^2 - 2b_j \nu)} \right) \cdot \Phi_{b_j}(\nu).$$

где $b_j = e^{-\rho^{2-j}}$, $L_{\delta g}$ и $L_{\Delta g}$ - операторы возмущения силы тяжести и аномалии силы тяжести соответственно, расширяют возможные геодезические приложения этих функций. В частности, как показал проведённый численный эксперимент, они могут быть успешно использованы для разномасштабного анализа и синтеза функционалов на геопотенциале.

Модификации ядра Стокса вытекают из следующих рассуждений. Как известно, задача определения аномалий высоты ζ по аномалиям силы тяжести в локальном районе ω_0 радиуса ψ_0 решается с помощью интегрального преобразования (здесь γ - нормальная сила тяжести, можно пользоваться и её средним значением $9,8 \text{ м/с}^2$)

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega_0} \bar{S}(\psi) \Delta g \cdot d\omega + \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega - \omega_0} \Delta S(\psi) \Delta g \cdot d\omega,$$

использующего разбиение ядра Стокса на внутреннюю $\bar{S}(\psi)$ и внешнюю $\Delta S(\psi)$ части:

$$\bar{S}(\psi) = \begin{cases} S(\psi); & 0 < \psi \leq \psi_0 \\ 0; & \psi_0 < \psi \leq \pi \end{cases}, \quad \Delta S(\psi) = \begin{cases} 0; & 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ S(\psi); & \psi_0 < \psi \leq \pi \end{cases}. \quad (15)$$

Коэффициенты усечения, введённые Молоденским в связи с этой задачей, можно представить в виде коэффициентов Фурье внешней части ядра Стокса $\Delta S(\psi)$ при её разложении по ортогональной системе ненормированных полиномов Лежандра. С учётом этого, внешнюю часть ядра Стокса можно записать в виде ряда (16), а внутреннюю, соответственно, – в виде (17):

$$\Delta S(\nu) = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n-1}{2} Q_n(\psi_0) \right] \frac{2n+1}{n-1} P_n(\nu); \quad (16)$$

$$\bar{S}(\nu) = \sum_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n(\psi_0) \right] \frac{2n+1}{n-1} P_n(\nu); \quad (17)$$

Сомножители, стоящие в квадратных скобках в (16) и (17), в диссертации предлагается интерпретировать как *частотную характеристику оператора усечения ядра Стокса* на внутреннюю и внешнюю зону, соответственно, радиуса ψ_0 . При изменении ψ_0 от 0 до π эта частотная характеристика изменяется от 0 до 1 в первом случае, и от 1 до 0 во втором.

Эти частотные характеристики позволяют разделить глобальную модель геопотенциала (и, следовательно, геодезические функционалы на потенциале) на две неперекрывающиеся части:

$$T_{in}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n(\psi_0)\right] \sum_{m=-n}^n \bar{a}_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda); \quad (18)$$

$$T_{out}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left[\frac{n-1}{2} Q_n(\psi_0)\right] \sum_{m=-n}^n \bar{a}_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda). \quad (19)$$

Здесь (18) отражает влияние внутренней круговой зоны радиуса ψ_0 с центром в точке вычисления, а (19) – влияние соответствующей остаточной зоны. Параметром служит не только ψ_0 , но и N .

Уменьшить погрешность влияния дальней зоны при условии, что размер ближней зоны ψ_0 фиксирован, можно лишь увеличением скорости сходимости коэффициентов $Q_n(\psi_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Наиболее распространённая модификация ядра Стокса, направленная на решение этой задачи, предложена О.М.Остачем:

$$\bar{S}^o(\psi) = \begin{cases} S(\psi) - S(\psi_0); & 0 < \psi \leq \psi_0 \\ 0; & \psi_0 < \psi \leq \pi \end{cases}, \quad \Delta S^o(\psi) = \begin{cases} S(\psi_0); & 0 \leq \psi \leq \psi_0 \\ S(\psi); & \psi_0 < \psi \leq \pi \end{cases}. \quad (20)$$

Здесь важно то, что *обе функции в (20) непрерывны на всей области определения $S(\psi)$* , в отличие от $\bar{S}(\psi)$ и $\Delta S(\psi)$ в формуле (15), и как следствие, убывают быстрее.

В диссертации выведены формулы, устанавливающие связь между классическими и модифицированными по Остачу коэффициентами Молоденского:

$$Q_n^0(\psi_0) = Q_n(\psi_0) + \frac{S(\psi_0)}{2n+1} [P_{n-1}(\nu_0) - P_{n+1}(\nu_0)],$$

или

$$Q_n^0(\psi_0) = Q_n(\psi_0) + \frac{S(\psi_0)}{n+1} [P_{n-1}(\nu_0) - \nu_0 P_n(\nu_0)].$$

Предложенная частотная характеристика оператора усечения ядра Стокса находит успешное применение, например, в следующей задаче. При локальном моделировании, предназначенном для описания деталей "полезного сигнала" целесообразно вместо традиционного интегрирования пользоваться аппроксимацией масштабирующими функциями $\Phi(P, Q)$:

$$f(P) \approx \sum_{i=1}^n \Phi(P, Q_i) x_i. \quad (21)$$

Здесь $f(P)$ символизирует сигнал (например, аномалию высоты), x_i - весовые коэффициенты, подлежащие определению, k - количество полюсов. Это обеспечивает пространственную локализацию базисных функций и их согласование с разрешающей способностью имеющихся исходных данных.

Для решения задачи вычисления высот квазигеоида по гравиметрической информации в ограниченной области ω_0 в диссертационной работе предлагается использовать выражение вида

$$\Phi_{j,\psi_0}(P, Q) = \sum_{n=2}^{2^j} \sqrt{2n+1} \sigma_n \left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n^o(\psi_0) \right] P_n(\cos \psi); \quad j = 2, 3, \dots, \quad (22)$$

и называть его масштабирующей функцией Стокса масштаба j для работы в локальной круговой зоне радиуса $0 < \psi_0 \leq \pi$. Здесь используется частотная характеристика оператора усечения ядра Стокса на внутреннюю зону радиуса ψ_0 с модифицированными по Остачу $Q_n^o(\psi_0)$ коэффициентами Молоденского, здесь σ_n^2 - степенные дисперсии геопотенциала. Использование введённой частотной характеристики позволяет отсекалть неявное влияние дальней зоны. Разность двух последовательных масштабирующих функций задаёт вейвлет Стокса

$$\Psi_{j,\psi_0}(\nu) = \Phi_{j+1,\psi_0}(\nu) - \Phi_{j,\psi_0}(\nu).$$

Для проверки эффективности предложенного подхода проведён численный эксперимент в области $4^\circ \times 6^\circ$. С помощью глобальной модели геопотен-

циала EGM2008 относительно референц-эллипсоида WGS84 были вычислены значения аномалии силы тяжести Δg на регулярной сетке $5' \times 7,5'$. Эти значения затем использованы в качестве исходных данных для вычисления аномалий высот ζ во внутренней зоне $2^\circ \times 4^\circ$. Область с исходными данными для предотвращения краевых эффектов на один градус с каждой стороны шире зоны вычисления ζ .

Первый этап эксперимента состоял в моделировании всех сеточных значений аномалии силы тяжести линейной комбинацией (21), где в качестве СРБФ используется масштабирующая функция (22) с частотной характеристикой, тождественно равной единице. Степенные стандарты σ , имеющие размерность мГал, для масштабов $j < 12$ подсчитаны по модели EGM2008. Для масштабов $j \geq 12$ степенные стандарты для степеней > 2048 получены по модели Флури:

$$n \geq 400, \sigma_n^2 = \frac{6,8 \cdot 10^7}{(n + 0,5)^{3,1}} \text{ мГал}^2.$$

Среднеквадратическая ошибка поточечной аппроксимации составила 0,5 мГал. Полученные в первом этапе подмножество оптимальных полюсов Q_i , отобранных из узлов сетки Рейтера в соответствии с предложенным в данной работе алгоритмом, и столбец безразмерных коэффициентов x_i используются далее во втором этапе эксперимента для аппроксимации во внутренней зоне точечных значений аномалии высоты. При этом использовалась масштабирующая функция (22) с частотной характеристикой усечения ядра Стокса и соответствующими степенными стандартами σ в метрах. Результат оценивания аномалий высоты в ближней зоне $\psi_0 = 1,6^\circ$, радиус которой приближённо подсчитан как радиус круга, равновеликого площади зоны вычисления ζ , проиллюстрирован на рисунке 7.

Среднеквадратическая ошибка поточечной аппроксимации составляет 0,009 м, а коэффициент корреляции между ζ и $\hat{\zeta}$ равен 0,998.

Погрешности, возникающие за счёт линеаризации краевой задачи геодезии и сферической аппроксимации, можно попытаться ослабить, если стандартное

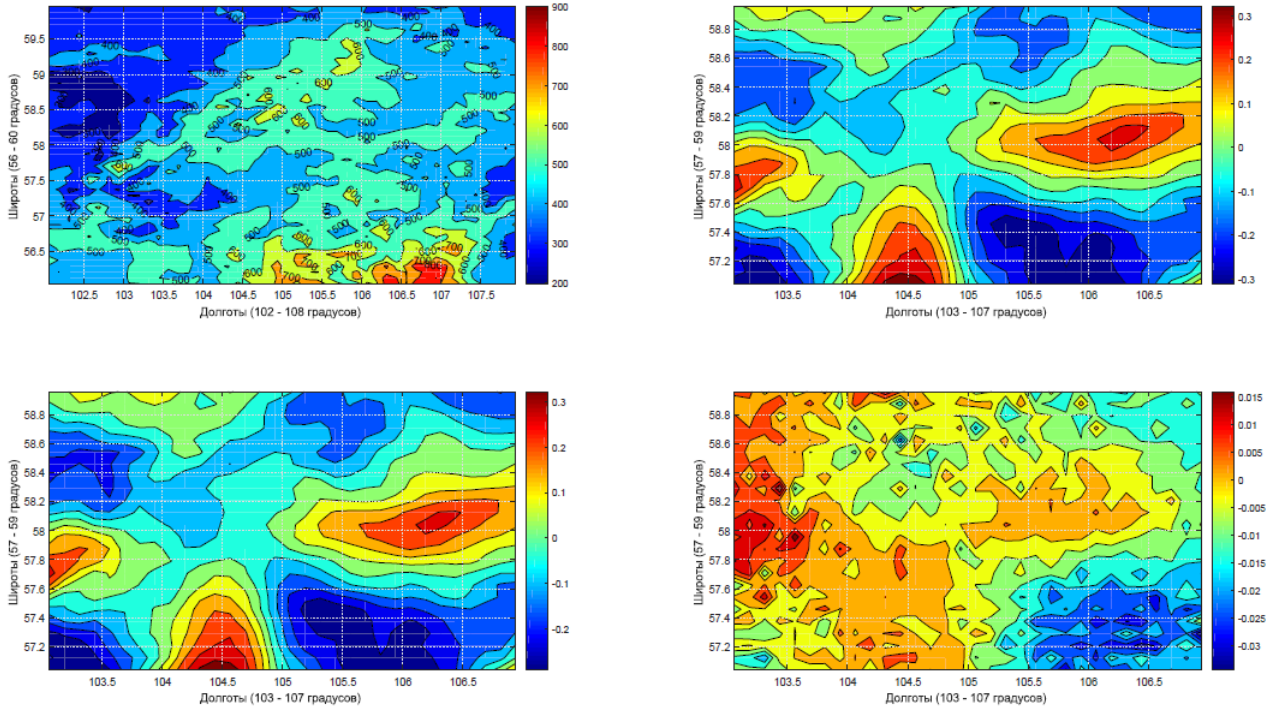


Рис. 7. Верхний ряд: рельеф области вычислений и исходное поле аномалий высоты. Нижний ряд: результат аппроксимации и остаточное поле.

нормальное поле, генерируемое уровнем эллипсоидом, заменить низкочастотной частью одной из современных глобальных моделей геопотенциала. Предлагаемый новый нормальный потенциал имеет следующий вид:

$$\tilde{U}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \left[\sum_{n=0}^N \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right] + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta.$$

Здесь c_{nm}, s_{nm} - гармонические коэффициенты используемой модели геопотенциала, P_{nm} - присоединённые функции Лежандра степени n и порядка m , ω - угловая скорость вращения Земли, а верхняя тильда $\tilde{}$ говорит о том, что речь идёт о понятиях, связанных с новым нормальным полем. Соответствующая нормальная сила тяжести $\tilde{\gamma}$ и её модуль могут быть найдены по следующим формулам:

$$\tilde{\gamma} = grad\tilde{U} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} \cdot \vec{e}_\lambda + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \cdot \vec{e}_r =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z, \\
\tilde{\gamma} = |\tilde{\gamma}| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta}\right)^2 + \left(-\frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r}\right)^2} = \\
&\quad \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Здесь единичные направляющие векторы $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_r$ касательных к координатным линиям θ, λ, r составляют ортонормированный базис локальной системы координат (LNOF), а единичные направляющие векторы $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ составляют ортонормированный базис глобальной геоцентрической системы координат Земли (ECEF).

Оценки нормальных высот H можно получить по формуле $H(P) = h(P) - \zeta$. По сути, это есть геодезические высоты h точек Q теллуроида, соответствующего общепринятому нормальному полю, так как $h(Q) = H(P)$.

Точки \tilde{Q} соответствующего нового теллуроида можно получить методом последовательных приближений, начиная с соотношения $h_0(\tilde{Q}) = H(P)$. Здесь нижний индекс 0 обозначает нулевое приближение.

Практика показывает, что процесс сходится очень быстро и двух - трёх приближений, как правило, достаточно.

В диссертации изложены результаты численного эксперимента по уточнению нормального поля. В качестве нового нормального поля были использованы первые 70 степеней модели *GO_CONS_GCF2_DIR_R5*. Выбор указанного диапазона частот основан на том, что при сравнении [5] современные модели геопотенциала показывают практически одинаковую точность в полосе от $n = 2$ до $n = 70$. Таким образом, в предыдущих формулах $N = 70$. В 6169 пунктах на территории США, заданных своими геодезическими координатами B, L, h , были вычислены значения аномалии высоты, аномалии силы тяжести и возмущающего потенциала относительно нормального поля WGS84 и нового нормального поля. Статистика вычислений показывает, что аномалии

высоты и возмущающий потенциал уменьшились более, чем в 28 раз. Поэтому предложенное уточнение нормального поля может оказаться полезным при решении конкретных задач, основанных на предположении о малости возмущающего потенциала, близости искусственно построенного теллуроида к реальной поверхности Земли и т.п. При этом дополнительные вычислительные затраты незначительны и вполне окупаемы.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [7], [9], [10], [5], [15], [16], [17], [18], [22], [26].

Заключение

Итоги

Итак, оставаясь в рамках традиционного подхода к моделированию ГПЗ, невозможно создать модель, способную удовлетворять всё возрастающие требования к точности моделирования геопотенциала. В диссертации обоснована оптимальность комбинированного использования шаровых функций для описания низкочастотной части и СРБФ для описания локальных особенностей поля, характерных для высокочастотной части. Представлены необходимые сведения для создания высокоточной модели ГПЗ, базовая структура которой представляет собой сумму двух составляющих, описывающих соответствующие части спектра, – ряда Фурье по шаровым функциям и линейной комбинации СРБФ.

Наиболее подходящей исходной информацией для определения гармонических коэффициентов первого слагаемого, а точнее, его среднечастотной части, является, по-видимому, спутниковая градиентометрия, обеспечивающая равномерное покрытие почти всей поверхности планеты (кроме полярных шапок). Поэтому одной из задач диссертации является освоение доступного зарубежного опыта по результатам реализации европейского проекта GOCE и разработка собственных методов, алгоритмов и программ. Указана тесная связь теории гармонического анализа ГПЗ с теоремами о выборке на сфере. Исследованы четыре такие теоремы; две из них представляют собой последние достижения математики, и для задач гармонического анализа ГПЗ использованы впервые.

В конечном счёте, сформулирована методика и практически реализован соответствующий алгоритм моделирования ГПЗ по результатам спутниковой градиентометрии до 250-ой степени и порядка. Этот алгоритм обеспечен пакетом необходимых программ.

При описании высокочастотной полосы гравитационного спектра важно, прежде всего, произвести правильную разбивку поверхности сферы на блоки. Здесь рекомендуется произвести сегментацию таким образом, чтобы внутри областей поле было приближённо пространственно стационарным. Следующий не менее важный шаг состоит в подборе наиболее подходящих СРБФ с учётом особенностей поля внутри каждого блока и имеющейся там гравиметрической информации. В диссертации предложено несколько адаптированных для геодезических приложений типов СРБФ, как взятых из зарубежных источников, так и полученных самостоятельно. Важнейший вопрос об оптимальном размещении полюсов СРБФ решён на основе теории ортогонального метода наименьших квадратов.

Показано, что при воспроизведении высокочастотной части ГПЗ полезно заменить стандартное нормальное поле в виде уровенного эллипсоида более близким к реальности нормальным потенциалом в виде низкочастотной части какой-либо известной гармонической спутниковой модели. Это позволяет существенно снизить влияние линеаризации и сферической аппроксимации краевой задачи геодезии и, следовательно, повысить точность воспроизведения деталей поля. Таким образом, для повышения разрешающей способности моделей ГПЗ полезно изменить не только базисные функции, но и нормальное поле. Хочется думать, что какой-то маленький шаг в этом направлении сделан.

Рекомендации

Результаты диссертационного исследования могут быть использованы для повышения точности моделирования среднечастотной части ГПЗ с использованием градиентометрической информации, для теоретически неограниченного повышения разрешающей способности и точности моделирования высокочастотной части ГПЗ.

стотной части ГПЗ в соответствии с количественным и качественным ростом исходных данных. Разработанная методика регионального моделирования ГПЗ с помощью пространственно локализованных базисных функций может быть использована для моделирования не только геопотенциала, но и любых скалярных полей сложной структуры, заданных на поверхности Земли (сферы), например, рельефа. Предложенный метод подбора оптимальных полюсов СРБФ может быть использован также для решения широкого класса задач, связанных с оптимизацией различного рода геодезических построений.

Перспективы

Что касается дальнейших исследований, то они видятся автору в нескольких направлениях.

Прежде всего, необходимо стандартизировать технологии выделения пространственно стационарных регионов и их моделирования, а также практически осуществить сегментацию поверхности планеты (или хотя бы территории Российской Федерации) на основе единых алгоритмов. При последующем локальном моделировании важная роль отводится предложенным здесь СРБФ с метрикой Махаланобиса. Необходимо более детально проработать этот вопрос, численно проверить эффективность использования этих базисных функций для обеспечения согласованности между локальными моделями.

Важным объектом дальнейших исследований представляются также методы обработки результатов различных современных проектов спутниковой гравиметрии, обзор которых можно найти в одной из статей автора [12]. Это наверняка потребует внедрения в отечественные учебные планы ТМОГИ (теории математической обработки геодезических измерений) принципов современной геостатистики и систематических методов обработки не только разного рода геометрических построений, но и результатов различных измерений физической геодезии.

Проделанные эксперименты с изменением традиционного нормального поля убедительно доказывают перспективность серьёзного уточнения этого по-

ля. В качестве нового нормального потенциала в настоящее время легко выбрать низкочастотную часть какой-нибудь одной из современных моделей ГПЗ в виде конечного ряда по шаровым функциям и потенциала центробежной силы за счёт вращения Земли. Дальнейшие исследования должны обоснованно осуществить такой выбор и определить оптимальную наибольшую степень N выбранного ряда. Возможно и комбинирование нескольких моделей или даже разработка какой-нибудь специальной конструкции нового нормального поля, позволяющего существенно приблизить нормальные высоты к геодезическим, аномалии силы тяжести приблизить к возмущающим значениям и, в конечном счёте, ослабить влияние разного рода допущений и аппроксимаций, которые всегда неизбежны в прикладных науках.

Список публикаций автора по теме диссертации:

1. *Сугаипова Л.С.* Модель цветного шума градиентометра миссии GOCE / Нейман Ю.М. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2005. №2. С. 31-42.
2. *Сугаипова Л.С.* Уравнения связи спутниковой градиентометрии / Крылов В.И., Нейман Ю.М., Яшкин С.Н. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2006. №5. С. 61-77.
3. *Сугаипова Л.С.* О ковариации между точечными и усредненными значениями вторых производных геопотенциала // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2010. №5. С. 36-44.
4. *Сугаипова Л.С.* Замечания об определении гравитационного поля Земли кинематическими методами / Нейман Ю.М. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2011. №4. С. 27-30.
5. *Сугаипова Л.С.* Сравнение современных моделей глобального гравитационного поля Земли // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2011. №6. С. 14-20.
6. *Сугаипова Л.С.* Создание регулярной сетки усредненных значений вторых

- производных геопотенциала по результатам проекта GOCE // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2012. №5. С. 5-9.
7. *Сугаипова Л.С.* О ковариационном анализе неоднородного гравитационного поля Земли / Нейман Ю.М. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. № 5. С. 15-22.
 8. *Сугаипова Л.С.* О гармоническом анализе по результатам спутниковой градиентометрии // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2014. № 2. С. 19-24.
 9. *Сугаипова Л.С.* Об адаптации глобальной модели геопотенциала к региональным особенностям (часть 1) / Нейман Ю.М. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2014. № 3. С. 3-12.
 10. *Сугаипова Л.С.* Об адаптации глобальной модели геопотенциала к региональным особенностям (часть 2) / Нейман Ю.М. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2014. № 4. С. 3-7.
 11. *Сугаипова Л.С.* Классические теоремы о выборке и гармонический анализ на сфере / Нейман Ю.М. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2015. №5. С. 3-9.
 12. *Сугаипова Л.С.* О планируемых проектах спутниковой гравиметрии // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2015. №6. С. 3-8.
 13. *Сугаипова Л.С.* Численные эксперименты с гармоническим анализом и синтезом гравитационного поля Земли на основе оптимальной выборки / Нейман Ю.М. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2016. №1. С. 3-9.
 14. *Сугаипова Л.С.* О создании регулярной сетки по результатам спутниковой градиентометрии / Нейман Ю.М. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2017. №2. С. 8-13.
 15. *Сугаипова Л.С.* О применении вейвлетов Абеля-Пуассона для анализа силы тяжести в локальном районе // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2017. № 5. С. 3-13.
 16. *Сугаипова Л.С.* Несколько замечаний относительно коэффициентов Молоденского при вычислении аномалии высот // Изв. вузов. Геодезия и аэро-

- фотосъемка. 2017. №6. С. 17-24.
17. *Сугаипова Л.С.* От интеграла Стокса к аппроксимации с помощью СРБФ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2018. Т. 62. №1. С. 15-22.
 18. *Сугаипова Л.С.* Об уточнении нормального поля // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2018. Т.62. №2. С. 127-131.
 19. *Сугаипова Л.С.* Первичная обработка данных спутниковой градиентометрии // Тезисы докладов международной научной – технической конференции «Геодезия, картография и кадастр – XXI век». Москва. МИИГАиК. 2009. С. 40.
 20. *Сугаипова Л.С.* Основные задачи первичной обработки результатов спутниковой градиентометрии. Сборник статей по итогам международной научно-технической конференции, посвященной 230-летию основания МИИГАиК. Москва. МИИГАиК. Вып. 2. Ч. 2. 2009. С. 71-75.
 21. *Сугаипова Л.С.* Эксперименты со спутниковой градиентометрией / Нейман Ю.М., Попадьев В.В. // «Геодезия и картография». Специальный выпуск, посвященный конференции «Отечественные разработки в области геодезии и картографии и их применение в хозяйственной и оборонной деятельности страны». 2012. С. 3-7.
 22. *Сугаипова Л.С.* Структура ковариационной функции нестационарного гравитационного поля Земли / Нейман Ю.М. // Приложение к журналу Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. Сборник статей по итогам научно-технической конференции. 2013. Вып. 6. С. 20-27.
 23. *Сугаипова Л.С.* О гармоническом анализе геопотенциала по результатам проекта GOCE / Нейман Ю.М. // Альманах современной метрологии. 2015. №3. С. 126-131.
 24. *Сугаипова Л.С.* Модель геопотенциала по результатам спутниковой градиентометрии / Нейман Ю.М., Тупицын И.Н. // Навигация по гравитационному полю Земли и её метрологическое обеспечение. Доклады научно-технической конференции, Менделеево-2017. С. 214-226.

25. *Сугаипова Л.С.* Исследование возможности применения пространственного подхода для построения модели гравитационного поля Земли с использованием градиентометрической измерительной информации КА / Тупицын И.Н. // Научно-технический сборник 29 НИИ Министерства обороны Российской Федерации. №29. 2017. С. 21-26.

Монография:

26. *Сугаипова Л.С.* Основы разномасштабной аппроксимации геопотенциала. / Нейман Ю.М. Монография. М.: Изд-во МИИГАиК, 2016. 218 с.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность научному консультанту профессору Ю.М. Нейману за постоянное внимание к работе.