

Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет  
геодезии и картографии

Л.В. Огородова

**Высшая геодезия  
и основы координатно-временных систем**

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Москва  
2017

**Рецензенты:**

кандидат физ.-мат. наук **А.А. Конопихин**;  
профессор, кандидат техн. наук **А.С. Елизаренко** (декан ФДФО)

**Составители: Л.В. Огородова**

Высшая геодезия и основы координатно-временных систем: учебно-методическое пособие. — М.: МИИГАиК, 2017. — 40 с.

Рассмотрены преобразования систем координат, используемые в повседневной практике инженером-геодезистом. Раскрыты основные принципы преобразования координат. Теоретический материал сопровождается алгоритмом обработки информации, получаемой при геодезических определениях. Завершается пособие подборкой вариантов задач для самостоятельного выполнения контрольной работы № 1.

Для студентов заочного отделения факультета дистанционных форм обучения специальностей: прикладная геодезия, городской кадастр, землеустройство и кадастр.

Электронная версия учебно-методического пособия размещена на сайте библиотеки МИИГАиК <http://library.miiгаik.ru>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Студенты заочного отделения факультета дистанционных форм обучения специальности прикладная геодезия в процессе изучения дисциплины «Высшая геодезия и основы координатно-временных систем» выполняют две контрольные работы.

В данном учебном пособии дана теоретическая часть курса «Высшая геодезия и основы координатно-временных систем» и методические указания по выполнению контрольной работы № 1 для студентов IV курса заочного отделения факультета дистанционных форм обучения специальностей прикладная геодезия, городской кадастр, землеустройство и кадастр.

### 1. РАЗДЕЛЫ ПРОГРАММЫ КУРСА «ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ И ОСНОВЫ КООРДИНАТНО- ВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ»

Предмет и задачи высшей геодезии. Место высшей геодезии в ряду наук о Земле. Методы высшей геодезии в их историческом развитии. Современные задачи и методы. Опорные геодезические сети.

Основные сведения о поверхности и поле силы тяжести Земли: Физическая поверхность Земли. Понятие о силе тяжести и ее потенциале. Силовые линии и уровенные поверхности поля силы тяжести. Геоид. Принцип определения высоты в поле силы тяжести. Геопотенциальное число. Изменения поверхности и гравитационного поля во времени.

#### *Раздел 1. Земной эллипсоид и геодезические системы координат*

Составные части земной координатной структуры: система координат, фундаментальные постоянные Земли, отсчетная основа (геодезическая сеть). Натуральная система координат. Геодезические прямоугольные координаты. Общеземные и референсные координаты. Преобразование прямоугольных координат. Криволинейные геоцентрические и полярные координаты. Геодезические криволинейные координаты. Земной эллипсоид. Основные параметры эллипсоида. Уравнения поверхности эллипсоида в геоцентрических системах координат. Радиус-вектор эллипсоида. Радиусы кривизны поверхности эллипсоида. Связь геодезических прямоугольных и криволинейных координат. Система координат с приведенной широтой. Связь геодезической, геоцентрической и приведенной широты. Топоцентрические системы координат. Связь геодезической криволинейной и натуральной систем координат.

Уклонения отвесной линии. Дифференциальные зависимости координат различных систем. Эллипсоид как поверхность относимости. Кривизна поверхности эллипсоида. Главные нормальные сечения. Прямое и обратное нормальные сечения. Геодезическая линия. Сравнение длины дуг окружности, нормального сечения и геодезической линии. Угол между геодезической линией и нормальным сечением. Средний радиус эллипсоида. Проекция Гаусса–Крюгера. Вычисление координат проекции Гаусса–Крюгера по геодезическим координатам и обратное преобразование. Система UTM. Локальные системы координат. Местные (ведомственные) системы координат и проблема их связи.

## *Раздел 2. Теория высот в гравитационном поле*

Специфика высокоточных измерений горизонтальных и вертикальных углов. Требования, предъявляемые к высокоточным угломерным приборам, и их классификация. Основные источники ошибок высокоточных угловых измерений. Краткие сведения о физике приземного слоя атмосферы. Горизонтальная и вертикальная рефракция и ее влияние на результаты угловых измерений. Выгоднейшее время измерения горизонтальных и вертикальных углов. Понятие о способах тригонометрического нивелирования. Оценка точности угловых измерений. Угловые измерения в сетях специального назначения. Высокоточные линейные измерения на поверхности Земли. Глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС). Абсолютные и относительные спутниковые определения. Геометрический аспект определения разностей геодезических координат из спутниковых относительных определений. Рекогносцировка, выбор и закрепление центров геодезических измерений на местности. Приведение результатов измерений к центрам. Предварительная обработка результатов измерений. Уравнивание результатов угловых и линейных измерений.

Понятие о нормальной Земле. Уровенный эллипсоид. Кривизна силовых линий и уровенных поверхностей нормального поля. Система координат в нормальном поле и ее связь с геодезической криволинейной системой координат.

Геодезическая высота и методы ее определения (тригонометрическое нивелирование, геометрическое нивелирование, спутниковые определения). Геопотенциальное число и динамическая высота. Ортометрическая высота и высота геоида. Нормальная высота и аномалия высоты. Методы определения разности нормальных высот и аномалии высоты. Астрономическое, астрономо-гравиметрическое, спутниковое нивелирование.

Высокоточное геометрическое нивелирование. Высокоточные нивелиры и инварные рейки, их устройство и исследования. Цифровые ни-

велиры. Источники ошибок при высокоточном нивелировании и методы ослабления их влияния. Методика нивелирования I и II классов в России. Опыт зарубежных стран. Методика нивелирования в специальных сетях. Обработка полевых результатов высокоточного нивелирования. Оценка точности результатов. Закрепление нивелирных линий на местности. Требования к закладке нивелирных центров. Типы нивелирных центров. Современные тенденции в развитии высокоточного геометрического нивелирования.

### *Раздел 3. Методы создания опорных геодезических сетей*

Опорные геодезические сети, их назначение. Методы построения опорной геодезической сети. Концепция создания опорной геодезической сети на основании спутниковых технологий. Необходимая точность построения и требуемая плотность пунктов в государственной и специальных сетях. Государственная геодезическая сеть. Редуцирование измерений на поверхность эллипсоида. Редукция длины и азимута хорды эллипсоида к длине и азимуту геодезической линии. Определение длины и азимута геодезической линии по разностям геодезических криволинейных координат (обратная геодезическая задача). Схема построения государственной нивелирной сети. Этапы создания государственной геодезической сети России и перспективы ее развития. Современная концепция создания опорных геодезических сетей. Основные требования, предъявляемые к геодезическим проекциям.

Основные сведения по организации геодезических работ при создании опорных геодезических сетей, экономике и технике безопасности. Нормативно-правовая основа высшей геодезии. Проектирование геодезических работ и отчет о выполненных работах

### *Раздел 4. Фундаментальные геодезические постоянные и мировые опорные сети*

Национальные, региональные и локальные координатные основы. Фундаментальные геодезические постоянные и принципы их определения. Современные системы постоянных (ГРС-80, WGS-84, ПЗ-90). Глобальные модели Земли (EGM-96, EGM2008, ПЗ-90, ПЗ-90-02, ГАО-2000, SRTM). Концепция создания глобальной и региональной многомерных систем координат. Международные системы координат (WGS-84, IGS, ETRS) и их реализации (сети GPS, ГЛОНАСС). Отсчетная основа (геодезическая сеть) земных координатных систем. Международные координатные основы ITRF. Международные геоцентрические геодезические сети (координатные основы) (WGS-84, IGS). Национальные и региональные сети (координатные основы). Инерциальные системы.

### ***Раздел 5. Введение в геодинамику***

Классификация геодинимических явлений. Глобальная, региональная и локальная геодинамика. Особенности проявления геодинимики и принципы получения геодинимической информации геодезическими методами. Мониторинг деформаций земной поверхности. Методы интерпретаций и прогнозирования геодинимических явлений.

#### ***Контрольные работы***

1. *Контрольная работа № 1* — Системы координат, применяемые в высшей геодезии. Определение разности геодезических координат.

2. *Контрольная работа № 2* — Вычисление плоских прямоугольных координат. Совместная обработка результатов наземных и спутниковых измерений в локальной области. Вычисление нормальных и динамических высот

При изучении курса рекомендована учебная литература — основная [–3] и дополнительная [4–1].

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОТДЕЛЬНЫМ ТЕМАМ

### 2.1. Системы координат, используемые в высшей геодезии. Преобразования координат

Общие сведения о системах геодезических координат изложены в [1, 4, 11]. Ознакомьтесь с видами систем геодезических координат.

#### *Дополнительные пояснения*

Различают геодезические общеземные и референчные системы координат. Начало общеземных систем координат находится в центре масс Земли, ось  $Z$  совмещена с осью вращения Земли, ось  $X$  лежит в плоскости гринвичского меридиана, ось  $Y$  дополняет систему до правой. Реализация геодезических систем координат, т.е. их связь с поверхностью Земли, выполняется на основании измерений. Поэтому из-за неизбежных ошибок возможны различные реализации общеземных систем. Начало референчной системы координат находится в центре связанного с этой системой эллипсоида, ось  $Z$  совпадает с малой осью эллипсоида и параллельна оси вращения Земли, оси  $X$  и  $Y$  параллельны осям общеземной системы.

Референчные системы координат вводят под условием близости поверхности эллипсоида к уровенной поверхности в пределах территории того или иного государства. В связи с этим существует большое число отсчетных эллипсоидов и связанных с ними региональных референчных систем. Параметры эллипсоидов, используемых в современных системах координат, приведены в табл. 1.

Взаимное расположение систем координат определяют положением начала координат относительно центра масс Земли и углами между осями координат. Координаты  $x_o, y_o, z_o$  центра масс и углы  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  между осями координат называют внутренними элементами ориентирования.

В России в качестве общеземных используют системы ПЗ-90 (ПЗ — параметры Земли), ее уточненные варианты ПЗ-90.02, ПЗ-90.11 и международную систему WGS-84 (World Geodetic System).

Т а б л и ц а 1

## П а р а м е т р ы з е м н ы х э л л и п с о и д о в

Эллипсоид	Большая полуось $a$ , м	Квадрат эксцентриситета $e^2$	Знаменатель сжатия $1:\alpha$
Бесселя	6 377 397	0,006674434883	299,15
Красовского	6 378 245	0,006693421623	298,3
ГРС-67	6 378 160	0,006694605329	298,2471674
ГРС80	6 378 137	0,006694380023	298,257222101
WGS-84	6 378 137	0,006694379990	298,257223563
ПЗ-90	6 378 136	0,006694366193	298,257839303
ПЗ-90.02	6 378 136	0,006694366193	298,257839303
ПЗ-90.11	6 378 136	0,0066943662	298,25784

Референчными системами в нашей стране являются системы координат 1932, 1945 и 1995 гг. — СК-32, СК-42, СК-95. Законодательно в России закреплены системы ПЗ-90 и СК-95. Сведения об ориентировании систем геодезических координат приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

## Э л е м е н т ы о р и е н т и р о в а н и я с и с т е м к о о р д и н а т

Системы координат	$x_o$ , м	$y_o$ , м	$z_o$ , м	$\varepsilon_x \cdot 10^6$ радианы	$\varepsilon_y \cdot 10^6$ радианы	$\varepsilon_z \cdot 10^6$ радианы	$m \cdot 10^6$
1	2	3	4	5	6	7	8
Общеземные:							
ПЗ-90	0	0	0	0	0	0	0
ПЗ-90.02	-1,07	-0,03	0,02	0	0	0,6302	0,22
WGS-84	-1,1	-0,3	-0,9	0	0	0,82	0,12
Референчные:							
СК-32	-375,3	-154	-582	0	-1,770	2,996	0,424
СК-42	-22,736	128,884	83,807	-0,5236	-0,3539	-0,0921	0,424
СК-95	-25,90	130,94	81,76	0	0	0	0

В табл. 2  $x_o, y_o, z_o$  — координаты начала системы ПЗ-90 относительно остальных систем координат. В графе 8 приведен масштабный множитель  $m$  — отличие масштаба от единицы. Переход от любой системы к системе ПЗ-90 выполняется преобразованием

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{90} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} m & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & m & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$



Положение точек поверхности Земли удобнее определять в системе геодезических криволинейных координат  $B, L, H$ . Геодезические прямоугольные и криволинейные координаты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Y &= (N + H - Ne^2) \sin B; \end{aligned} \quad (2)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y}{X}; \operatorname{tg} B_0 = \frac{Z}{(1 - e^2)D}; H = D \cos B_0 + Z \sin B_0 - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z - He^2 \sin B_0}{(1 - e^2)D}; D = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Изменения  $dH, dB, dL$  геодезических криволинейных координат при переходе от одного отсчетного эллипсоида к другому можно оценить по дифференциальным формулам:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dH \\ (M + H)dB \\ (N + H) \cos B dL \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \\ -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} a_1 - a_2 + k \sin^2 B \\ -k \sin 2B \\ 0 \end{pmatrix}_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где —  $M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}$  радиус кривизны меридиана;  
 $k = \frac{1}{2}[(a_2 - a_1)e_1^2 + (e_2^2 - e_1^2)a_1]$ .

Если координаты обеих точек относятся к одному и тому же эллипсоиду, формула (5) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} dH \\ (M + H)dB \\ (N + H) \cos B dL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \\ -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_i \quad (6)$$

Формулы (6) можно использовать только в том случае, если разности  $dX, dY, dZ$  прямоугольных координат не превышают десятков метров. При расстояниях между пунктами в несколько километров разности координат по этим формулам определяются с ошибками в несколько метров.

Разности

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}$$

геоцентрических прямоугольных координат представляют собой координаты точки 2 в *топоцентрической экваториальной* системе координат, начало которой находится в точке 1 поверхности Земли, а оси параллельны осям геоцентрической системы. Наряду с экваториальными используют также *топоцентрические горизонтные* системы координат: прямоугольные  $x, y, z$  и криволинейные  $S, \theta, A$  (рис. 1).

Ось  $z$  совмещена с нормалью к эллипсоиду, ось  $x$  направлена на север, ось  $y$  — на восток,  $S$  — радиус-вектор (расстояние текущей точки от начала 1 координат),  $\theta$  — геодезическое зенитное расстояние,  $A$  — геодезический азимут.

Связь топоцентрических координат определяет соотношение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \sin \Theta \cos A \\ \sin \Theta \sin A \\ \cos \Theta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

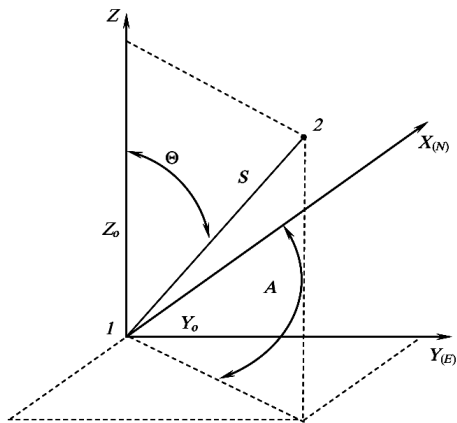


Рис. 1. Топоцентрические горизонтные системы координат

где  $l, m, n$  — направляющие косинусы отрезка  $S$ .

Если заменить в (6) дифференциалы  $dX, dY, dZ, dB, dL, dH$ , конечными приращениями  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta B, \Delta L, \Delta H$  и сравнить (6) с (7), то получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M + H) \Delta B \\ (N + H) \cos B \Delta L \\ \Delta H \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Это преобразование позволяет приблизительно оценить изменения широты, высоты и долготы по топоцентрическим координатам.

натам. Для получения топоцентрических экваториальных координат, т.е. разностей  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  по топоцентрическим горизонтным служит преобразование

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin B \cos L & -\sin L & \cos B \cos L \\ -\sin B \sin L & \cos L & \cos B \sin L \\ \cos B & 0 & \sin B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\ &= S \begin{pmatrix} -\sin B \cos L & -\sin L & \cos B \cos L \\ -\sin B \sin L & \cos L & \cos B \sin L \\ \cos B & 0 & \sin B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \Theta \cos A \\ \sin \Theta \sin A \\ \cos \Theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя (2), получим точные зависимости разностей прямоугольных и криволинейных геодезических координат. Напишем разности прямоугольных координат в виде

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_2 - X_1 = D_2 \cos L_2 - D_1 \cos L_1 = \\ &= (N + H)_2 \cos B_2 \cos L_2 - (N + H)_1 \cos B_1 \cos L_1; \\ \Delta Y &= Y_2 - Y_1 = D_2 \sin L_2 - D_1 \sin L_1 = \\ &= (N + H)_2 \cos B_2 \sin L_2 - (N + H)_1 \cos B_1 \sin L_1; \\ \Delta Z &= Z_2 - Z_1 = (N_2 + H_2) \sin B_2 - (N_1 + H_1) \sin B_1 - e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) = \\ &= (N_2 + H_2) \sin B_2 - (N_1 + H_1) \sin B_1 + \delta, \end{aligned}$$

где  $D_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = (N_1 + H_1) \cos B_1$ ;  $D_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = (N_2 + H_2) \cos B_2$  — расстояния до точек 1 и 2 от оси  $Z$  («радиусы параллели»);

$$\delta = e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1). \quad (10)$$

Для нахождения разностей  $\Delta B = B_2 - B_1$ ,  $\Delta L = L_2 - L_1$ ,  $\Delta H = H_2 - H_1$  преобразуем эти уравнения. Повернем систему координат  $OXYZ$  вокруг оси  $Z$  на угол  $L_1$ , т.е. совместим начальный меридиан с меридианом точки 1. Приращения  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  при этом изменятся и в новой системе координат будут равны

$$\begin{pmatrix} \Delta X' \\ \Delta Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos L_1 & \sin L_1 \\ -\sin L_1 & \cos L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{pmatrix}; \quad (11)$$

$$\Delta X' = \Delta X \cos L_1 + \Delta Y \sin L_1 = D_2 \cos(L_2 - L_1) - D_1;$$

$$\Delta Y' = -\Delta X \sin L_1 + \Delta Y \cos L_1 = D_2 \sin(L_2 - L_1),$$

где произведение  $D_2 \cos(L_2 - L_1)$  является проекцией радиуса параллели точки 2 на плоскость меридиана точки 1. Из этих уравнений находим разность долгот

$$\operatorname{tg}(L_2 - L_1) = \frac{\Delta Y'}{\Delta X' + D_1} = \frac{-\Delta X \sin L_1 + \Delta Y \cos L_1}{\Delta X \cos L_1 + \Delta Y \sin L_1 + D_1}; \quad (12)$$

$$L_2 = L_1 + (L_2 - L_1).$$

Составив разность  $\Delta Z \cos B_1 - \Delta X' \sin B_1$  и сумму  $\Delta Z \sin B_1 + \Delta X' \cos B_1$  для разности широт и высот получим:

$$(N_2 + H_2) \sin(B_2 - B_1) = \Delta Z \cos B_1 - \Delta X' \sin B_1 - \\ - (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin B_1 (1 - \cos(L_2 - L_1)) + \delta \cos B_1, \quad (13)$$

$$(H_2 - H_1) = \Delta X' \cos B_1 + \Delta Z \sin B_1 + \\ + (N_2 + H_2)(1 - \cos \psi) + \delta \sin B_1 - (N_2 - N_1). \quad (14)$$

В формулах (13), (14) величина  $\delta$  определена равенством (10)

$$\cos \psi = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1).$$

Формула (14) эквивалентна формуле одностороннего тригонометрического нивелирования, так как согласно (7) первые два члена правой части равны  $S \cos \theta$  (проверьте).

Формулы (13), (14) можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} (N_2 + H_2) \sin(B_2 - B_1) \\ H_2 - H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin B_1 & \cos B_1 \\ \cos B_1 & \sin B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X' \\ \Delta Y \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \sin B_1 \cos B_2 (\cos(L_2 - L_1) - 1) & \cos B_1 \\ 1 - \cos \psi & \sin B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (N_2 + H_2) \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_1 - N_2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Формулы (12) – (15) являются точными и их можно использовать при любых значениях разностей прямоугольных координат. В правые части формул (13) – (15) входят и широта и высота определяемой точки, поэтому разности и находят приближениями. В начальном приближении можно оставить в преобразовании (15) только первый член правой части или использовать полученные по формулам (7), (8) приращения координат. Удобнее получать приращения  $\Delta B$ ,  $\Delta H$  широты и высоты совместно. В нулевом приближении

$$\begin{aligned}
& (N_1 + H_1) \sin \Delta B_0 = \\
& = \Delta Z \cos B_1 - \Delta X' \sin B_1 - (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin B_1 (1 - \cos(L_2 - L_1)); \\
& (B_2)_0 = B_1 + \Delta B_0; \quad (N_2)_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}}; \\
& \cos \psi_0 = \sin B_1 \sin (B_2)_0 + \cos B_1 \cos (B_2)_0 \cos (L_2 - L_1); \\
& \Delta H_0 = \Delta X' \cos B_1 + \Delta Z \sin B_1 + (N_1 + H_1)(1 - \cos \psi_0).
\end{aligned} \tag{16}$$

## 2.2. Измерение поверхности Земли

Основными видами геодезических измерений являются угловые и линейные измерения и геометрическое нивелирование. Подробные сведения о высокоточных угловых измерениях и геометрическом нивелировании приведены в [11]. С историческими сведениями о наземных линейных измерениях можно ознакомиться по учебнику [13].

Дадим дополнительные пояснения по определению разностей геодезических координат по наблюдениям ИСЗ.

При относительных спутниковых определениях находят приращение координат текущего пункта сети относительно исходного (базовой станции) по измерениям расстояний от ИСЗ до обоих пунктов. Принцип относительных определений пояснен на рис. 2. Здесь 1 — базовая станция, 2 — определяемая, ИСЗ — спутник навигационной системы,  $O$  — начало прямоугольной геоцентрической системы координат,  $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$  — радиус-векторы «спутник-приемник»  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_i$  — геоцентрические радиус-векторы станций 1, 2 и ИСЗ,  $\bar{D}$  — вектор расстояния от базовой станции до определяемой точки.

Согласно рис. 2 вектор  $\bar{D}_{12}$  равен как разности геоцентрических радиус-векторов станций, так и разности векторов «спутник-приемник»  $\bar{D}_{12} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1$ .

Найдем разность квадратов векторов  $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ , рассматривая квадрат вектора как скалярное произведение

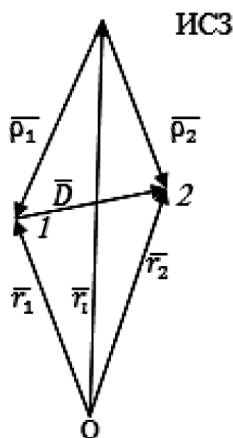


Рис. 2. К относительным спутниковым определениям

$$\bar{\rho}_2^2 - \bar{\rho}_1^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2 = (\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 + \rho_1) = 2(\rho_2 - \rho_1)\rho_{cp}.$$

где  $\rho_{cp} = (\rho_2 + \rho_1)/2$  — среднее арифметическое из расстояний «спутник–приемник».

Теперь разность  $\bar{\rho}_2^2 - \bar{\rho}_1^2$  выразим через геоцентрические радиус-векторы. Для этого напишем согласно рис. 1:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r}_i, \bar{\rho}_2 = \bar{r}_2 - \bar{r}_i,$$

Для разности квадратов векторов  $\bar{\rho}_1$  и  $\bar{\rho}_2$  получаем

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_2^2 - \bar{\rho}_1^2 &= (\bar{r}_2 - \bar{r}_i)^2 - (\bar{r}_1 - \bar{r}_i)^2 = \bar{r}_2^2 - \bar{r}_1^2 - 2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{r}_i = \\ &= 2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_{cp} - \bar{r}_i) = 2\bar{D}(\bar{r}_{cp} - \bar{r}_i), \end{aligned}$$

где  $\bar{r}_{cp}$  — среднее из радиус-векторов станций 1 и 2.

Приравняем выражения для  $\bar{\rho}_2^2 - \bar{\rho}_1^2$ :

$$(\rho_2 - \rho_1)\rho_{cp} = \bar{D}(\bar{r}_{cp} - \bar{r}_i)$$

В правой части этого выражения стоит скалярное произведение векторов. Для его вычисления запишем в развернутом виде векторы:

$$\bar{D} = (X_2 - X_1)i + (Y_2 - Y_1)j + (Z_2 - Z_1)k;$$

$$\bar{r}_{cp} = X_{cp}i + Y_{cp}j + Z_{cp}k;$$

$$\bar{r}_i = X_i i + Y_i j + Z_i k,$$

где  $i, j, k$  — единичные векторы;  $X_{cp}, Y_{cp}, Z_{cp}$  — среднее из координат станций 1 и 2;  $X_i, Y_i, Z_i$  — координаты спутника.

Получаем скалярное произведение

$$\begin{aligned} \bar{D}(\bar{r}_{cp} - \bar{r}_i) &= (X_{cp} - X_i)(X_2 - X_1) + (Y_{cp} - Y_i)(Y_2 - Y_1) + \\ &+ (Z_{cp} - Z_i)(Z_2 - Z_1) = (\rho_2 - \rho_1)\rho_{cp}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\rho_{cp}^2 = (X_{cp} - X_i)^2 + (Y_{cp} - Y_i)^2 + (Z_{cp} - Z_i)^2. \quad (18)$$

Для вычисления  $X_{cp}, Y_{cp}, Z_{cp}, \rho_{cp}$  необходимо знать приближенные координаты определяемой станции.

Разделим обе части (17) на  $\rho_{cp}$ ,

$$(\rho_2 - \rho_1) = l_i(X_2 - X_i) + m_i(Y_2 - Y_i) + n_i(Z_2 - Z_i), \quad (19)$$

$l_i, m_i, n_i$  — направляющие косинусы линии  $\rho_{cp}$ ,

$$l_i = \frac{X_{cp} - X_i}{\rho_{cp}}, m_i = \frac{Y_{cp} - Y_i}{\rho_{cp}}, n_i = \frac{Z_{cp} - Z_i}{\rho_{cp}}. \quad (20)$$

Уравнения (19) можно составить для каждого спутника. Но в левые части этих уравнений входят расстояния до спутников. Из-за ошибок хода часов спутников и приемников по результатам измерений получают не расстояния, а так называемые псевдодалности  $P$ . Связь псевдодалности  $P$  и расстояния  $\rho$  в общем виде можно написать так

$$P_1 = \rho_1 + \Delta\rho_{\text{ч}} + v,$$

где  $\Delta\rho_{\text{ч}}$  — ошибка, вызванная разностью хода часов спутника и приемника;  $v$  — влияние остальных источников ошибок.

Если не учитывать ошибки  $v$ , для разности псевдодалностей получаем

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho_2 - \rho_1 + (\Delta\rho_{\text{ч}})_2 - (\Delta\rho_{\text{ч}})_1. \quad (21)$$

Левая часть (21) содержит постоянную ошибку, равную разности величин  $\Delta\rho_{\text{ч}}$  для каждого приемника. Разности  $\Delta P$  псевдодалностей, полученных в один и тот же момент времени от одного и того же спутника до двух станций (до двух приемников) называют одинарными или первыми разностями. Для исключения постоянной ошибки образуют так называемые двойные или вторые разности, вычитая из всех уравнений вида (21) какое-либо одно. Если отнять уравнение для спутника  $i=1$ , получим систему уравнений

$$\Delta\Delta P_2 = \Delta l (X_2 - X_1) + \Delta m (Y_2 - Y_1) + \Delta n (Z_2 - Z_1) \quad (22)$$

или

$$\Delta\Delta P_2 = P_{2i} - P_{1i} - (P_{22} - P_{11}), \quad (23)$$

где  $P_{2i}$ ,  $P_{1i}$  — измеренные псевдодалности от спутника  $i$  до станций 1 и 2;

$$\Delta l = l_i - l_1, \Delta m = m_i - m_1, \Delta n = n_i - n_1. \quad (24)$$

Для нахождения неизвестных приращений координат  $X_2 - X_1$ ,  $Y_2 - Y_1$ ,  $Z_2 - Z_1$  составляют три уравнения вида (22), т.е. необходимы измерения псевдодалностей по крайней мере до четырех спутников. В этом случае получаем

$$\begin{pmatrix} \Delta\Delta P_2 \\ \Delta\Delta P_3 \\ \Delta\Delta P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta l_2 & \Delta m_2 & \Delta n_2 \\ \Delta l_3 & \Delta m_3 & \Delta n_3 \\ \Delta l_4 & \Delta m_4 & \Delta n_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где  $\Delta l$ ,  $\Delta m$ ,  $\Delta n$  — разности направляющих косинусов.

Для разностей прямоугольных координат находим

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta l_2 & \Delta m_2 & \Delta n_2 \\ \Delta l_3 & \Delta m_3 & \Delta n_3 \\ \Delta l_4 & \Delta m_4 & \Delta n_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\Delta P_2 \\ \Delta\Delta P_3 \\ \Delta\Delta P_4 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

При использовании большого числа спутников выполняют уравнение результатов измерений.

### 2.3. Редуцирование измерений к эллипсоиду и решение задач на его поверхности

Вопросы редуцирования результатов геодезических измерений к поверхности эллипсоида рассмотрены в [1, гл. 6], [7, гл. 20].

Методика редуцирования наземных и спутниковых измерений различна. При наземных измерениях инструменты ориентируют по направлению силы тяжести, которое не совпадает с направлением нормали к эллипсоиду. Поэтому, прежде всего наземные измерения приводят в геодезическую систему координат. Это достигается введением поправок за уклонение отвеса. После этого редуцирование любых измерений одинаково и определяется видом измеренных величин.

Редуцирование измеренного наклонного расстояния  $S$  выполняют в несколько этапов: сначала переходят к хорде  $d_o$  эллипсоида, затем вычисляют дугу  $d$  нормального сечения и после этого находят длину  $S_o$  геодезической линии, соединяющей проекции измерительных точек на эллипсоид (рис. 3, а).

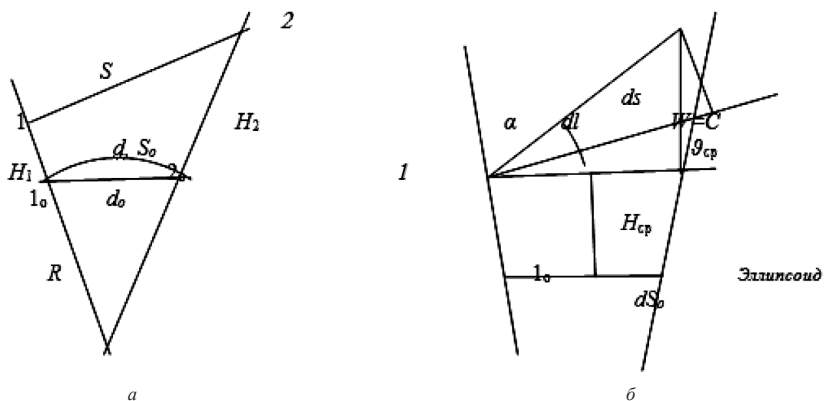


Рис. 3. Редуцирование линейных измерений:

а — редуция пространственного отрезка  $S$ ; б — редуция измеренного на поверхности Земли расстояния  $dS$



Вычисление длины хорды можно выполнить по формуле (6.26) из учебника [3]:

$$d_0^2 = \frac{S^2 - (H_2 - H_1)^2}{(1 + H_2/\rho)(1 + H_1/\rho)},$$

где  $\rho$  — средний радиус кривизны поверхности эллипсоида в азимуте хорды  $d_0$ .

Для расстояний, не превышающих 10–20 км, хорду эллипсоида можно вычислить по приближенной формуле

$$d_0^2 = \sqrt{(S^2 - \Delta H^2) \left(1 - \frac{H_1 + H_2}{R}\right)}, \quad (27)$$

а длину дуги нормального сечения эллипсоида заменить дугой окружности радиуса  $R$ ,

$$S_0 \approx d = d_0 \left(1 + \frac{1}{24} \left(\frac{d_0}{R}\right)^2\right), \quad (28)$$

где  $R = 6400$  км — средний радиус Земли.

Измеренное на Земле расстояние  $ds$  сначала приводят к горизонту, т.е. получают проекцию  $dl$  измеренного отрезка на уровенную поверхность  $W=C$  (рис. 3, б), затем находят проекцию на поверхность, параллельную эллипсоиду, и наконец, учитывают высоту линии над эллипсоидом. Редуцирование можно выполнить по формулам [1, (6.36)], [7, (20.10)], которые запишем в виде

$$S_0 = s_1 \left(1 - \frac{H_{cp}}{R} + \left(\frac{H_{cp}}{R}\right)^2\right) + \vartheta_{cp} (H_2 - H_1), \quad (29)$$

где  $S_0$  — длина геодезической линии;  $s_1 = \sum dl$  — измеренная линия, «приведенная к горизонту», т.е. лежащая на уровенной поверхности;  $H_{cp}$ ,  $\vartheta_{cp}$  — средняя высота и среднее значение составляющей уклонения отвеса вдоль линии  $s = \sum ds$ ;  $H_{cp} = (H_1 + H_2)/2$ ;  $\vartheta_{cp} = \xi_{cp} \cos A + \eta_{cp} \sin A$ ;  $\xi_{cp}$ ,  $\eta_{cp}$  — средние значения составляющих астрономо-геодезического уклонения отвеса в плоскости меридиана и первого вертикала.

При редуцировании результатов спутниковых измерений можно перейти от координат  $X, Y, Z$  точек поверхности Земли к координатам  $X_o, Y_o, Z_o$  их проекций на эллипсоид. Если геодезические высоты известны, из формул (2) и (10) можно получить разности  $\Delta X_o, \Delta Y_o, \Delta Z_o$  прямоугольных координат проекций точек 1 и 2 на эллипсоид:

$$\begin{aligned}
\Delta X_0 &= \Delta X - H_2 \cos B_2 \cos L_2 + H_1 \cos B_1 \cos L_1; \\
\Delta Y_0 &= \Delta Y - H_2 \cos B_2 \sin L_2 + H_1 \cos B_1 \sin L_1; \\
\Delta Z_0 &= \Delta Z - H_2 \sin B_2 + H_1 \sin B_1.
\end{aligned} \tag{30}$$

После этого длина  $d_0$  и азимут  $A_0$  хорды эллипсоида, соединяющей проекции  $1_0$  и  $2_0$  точек  $1$  и  $2$ , определяются с помощью преобразования (7)

$$d_0 \begin{pmatrix} \sin \Theta_0 \cos A_0 \\ \sin \Theta_0 \sin A_0 \\ \cos \Theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin B_1 \cos L_1 & -\sin B_1 \sin L_1 & \cos B_1 \\ -\sin L_1 & \cos L_1 & 0 \\ \cos B_1 \cos L_1 & \cos B_1 \sin L_1 & \sin B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где  $\theta_0$  — зенитное расстояние хорды.

Согласно (31)

$$\begin{aligned}
d_0 &= \sqrt{\Delta X_0^2 + \Delta Y_0^2 + \Delta Z_0^2}; \\
\operatorname{tg} A_0 &= \frac{y}{x} = \frac{-\Delta X_0 \sin L_1 + \Delta Y_0 \cos L_1}{-(\Delta X_0 \cos L_1 + \Delta Y_0 \sin L_1) \sin B_1 + \Delta Z_0 \cos B_1}; \\
A_0 &= \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & x, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & x < 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + 2\pi & x > 0, y < 0. \end{cases} \tag{32}
\end{aligned}$$

Для нахождения азимута геодезической линии в азимут хорды нужно ввести поправку  $\delta_3$  [1, гл. 6]. При расстояниях между точками менее 20 км азимут  $A_0$  хорды можно считать равным азимуту геодезической линии, а длину  $S_0$  геодезической линии определять по формуле (28).

# КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1.1

## Системы координат, применяемые в высшей геодезии

Контрольная работа № 1.1 состоит из двух заданий:

*Задание 1.* Общие сведения о системах координат;

*Задание 2.* Связь различных систем геодезических координат.

### Задание 1. Общие сведения о системах координат

*Дайте ответы на вопросы*

1. Где находится начало геодезической прямоугольной системы координат? Как расположены оси этой системы?
2. Что такое сжатый эллипсоид вращения?
3. Что такое отсчетный эллипсоид?
4. Напишите формулы, связывающие основные параметры эллипсоида вращения.
5. Что такое меридиан?
6. Дайте определение геодезических криволинейных координат
7. Что такое астрономическая широта?
8. Что такое астрономическая долгота?

*Поясните эти понятия с помощью рисунка.*

### Задание 2. Связь различных систем геодезических координат

*Содержание задания 2.* По любой карте или атласу найдите географические координаты и высоту над уровнем моря вашего дома. Примите эти координаты равными геодезическим криволинейным координатам  $B$ ,  $L$ ,  $H$  в референцной системе, соответствующей вашему варианту. Параметры референцной и общеземной систем выберите из табл. 1 и 2 согласно вашему шифру (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

**Шифры систем координат для определения задания**

Последние цифры шифра	Общеземная система	Референцная система	Последние цифры шифра	Общеземная система	Референцная система
00-09	ПЗ-90	СК-32	50-59	ПЗ-90.02	СК-95
10-19	ПЗ-90	СК-42	60-69	WGS-84	СК-32
20-29	ПЗ-90	СК-95	70-79	WGS-84	СК-42
30-39	ПЗ-90.02	СК-32	80-89	WGS-84	СК-95
40-49	ПЗ-90.02	СК-42	90-99	ПЗ-90.02	ПЗ-90

Выполните задания.

1. Вычислить геодезические прямоугольные координаты  $X, Y, Z$  в референционной системе.
2. Используя приведенные в табл. 2 значения  $m, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, x_o, y_o, z_o$ , найти прямоугольные координаты в общеземной системе.
3. Найти геодезические криволинейные координаты в общеземной системе.
4. Выполнить контрольные вычисления по дифференциальным формулам.

### Методические указания к выполнению задания 2

Для перехода от геодезических прямоугольных координат  $X_1, Y_1, Z_1$  в системе  $O_1X_1Y_1Z_1$  к координатам  $X_2, Y_2, Z_2$  в системе  $O_2X_2Y_2Z_2$  используйте преобразование (1), записав его для вашего конкретного варианта. Если в качестве общеземной используется система ПЗ-90, параметры  $x_o, y_o, z_o, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, m$  выпишите из табл. 2. Если используются системы ПЗ-90.02 и WGS-84, нужно взять разности параметров референционной системы и соответствующей общеземной. Криволинейные геодезические координаты в новой системе найдите по формулам (4). Для проверки правильности вычисления используйте формулы (5), (6). Сравните результаты вычисления.

### Пример выполнения задания

Исходные данные:

Студент	Референционная система	$B$	$L$	$H, \text{ м}$	Общеземная система
Иванов	СК-32	55°59'16"	37°54'52"	120	ПЗ-90

Вычисление прямоугольных координат в исходной системе по формулам (2)

$X_{32}, \text{ м}$	$Y_{32}, \text{ м}$	$Z_{32}, \text{ м}$
2820893,823	2197148,288	5263239,362

Вычисление прямоугольных координат в системе ПЗ-90 по формуле (1):

$$\begin{pmatrix} X_{90} - X_{32} \\ Y_{90} - Y_{32} \\ Z_{90} - Z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,424 & 2,996 & 1,770 \\ -2,996 & 0,424 & 0 \\ 1,770 & 0 & 0,424 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,82089 \\ 2,19715 \\ 5,26324 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -375,3 \\ -154 \\ -582 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 392,3946 \\ 146,4802 \\ 579,2386 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} X_{90} \\ Y_{90} \\ Z_{90} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2820893,823 \\ 2197148,288 \\ 5263239,362 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 392,3946 \\ 146,4802 \\ 579,2386 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2821286,217 \\ 2197294,768 \\ 5263818,601 \end{pmatrix}.$$

Вычисление криволинейных координат в системе ПЗ-90 по формулам (4):

$X, \text{ м}$	2 821 286,217	$D = \sqrt{X^2 + Y^2}$	3 575 997,787 м
$Y, \text{ м}$	2 197 294,768	$B_0 = \text{arctg} \left( \frac{Z}{(1-e^2)D} \right)$	55°59'17,769"
$Z, \text{ м}$	5 263 818,601	$L = \text{arctg} \left( \frac{Y}{X} \right)$	37°54'44,758"
$a, \text{ м}$	6 378 136	$H = D \cos B_0 + Z \sin B_0 - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}$	130,128 м
$e^2$	0,006694366193	$B_0 = \text{arctg} \left( \frac{Z - He^2 \sin B_0}{(1-e^2)D} \right)$	55°59'17,755"

Вычисление разностей координат по дифференциальным формулам (5), (6):

$$\begin{pmatrix} H_{90} - H_{32} \\ (M+H)(B_{90} - B_{32}) \\ (N+H)\cos B(L_{90} - L_{32}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,441308 & 0,343704 & 0,828924 \\ -0,653979 & -0,509338 & 0,559362 \\ -0,614457 & 0,788950 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 392,3946 \\ 146,4802 \\ 579,2386 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -693,6365 \\ 61,2380 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,019 \\ 54,013 \\ -125,558 \end{pmatrix};$$

$$M_{32} = a(1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2} = 6378660 \text{ м};$$

$$N_{32} = a / (1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2} = 6392071 \text{ м};$$

$$B_{90} - B_{32} = \frac{54,013}{6378780} * \rho'' = 1,747'';$$

$$L_{90} - L_{32} = \frac{-125,558}{6392191} * \cos B_{32} \rho'' = -7,243''.$$

Сравнение результатов	Непосредственно вычислены	По дифференциальным формулам
$H_{90} - H_{32}$	$130,128 \text{ м} - 120 \text{ м} = 10,128 \text{ м}$	10,019 м
$B_{90} - B_{32}$	$17,755'' - 16'' = 1,755''$	1,747''
$L_{90} - L_{32}$	$44,758'' - 52'' = -7,242''$	-7,243''

Полученные расхождения можно объяснить тем, что в рассматриваемом примере разности прямоугольных координат достигают почти 600 м, поэтому применение дифференциальных формул (5) некорректно.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1.2

### Определение разности геодезических координат

Контрольная работа состоит из пяти заданий:

*Задание 1.* Определение разности геодезических прямоугольных координат из относительных спутниковых определений;

*Задание 2.* Вычисление топоцентрических координат;

*Задание 3.* Определение разностей геодезических криволинейных координат;

*Задание 4.* Редуцирование результатов измерений к поверхности эллипсоида;

*Задание 5.* Оценивание точности.

**Задание 1. *Определение разности геодезических прямоугольных координат из относительных спутниковых определений.***

*Исходные данные:* геодезические прямоугольные координаты базовой станции и четырех спутников Глобальной навигационной спутниковой системы (ГЛОНАСС) и псевдодальности от четырех спутников до базовой станции 1 и определяемой станции 2. Для всех вариантов базовой станцией является МИИГАиК. Определяемую станцию и используемые в решении псевдодальности нужно выбрать из табл. 4 и 5 согласно шифру. Приближенные координаты определяемой станции приведены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

**Выбор определяемой станции и ее примерных координат**

Определяемая станция	ГАИШ*	Нескучный сад	Останкино	Люблино
X, км	2851,5	2852,5	2847,5	2850,0
Y, км	2193,5	2196,0	2194,0	2200,0
Z, км	5249,0	5247,5	5251,0	5247,0
Последние цифры шифра	00-24	25-49	50-74	75-99

\*ГАИШ — Государственный астрономический институт им. Штернберга

Выбор псевдодальностей

Последние цифры шифра				№№ спутников		Последние цифры шифра				№№ спутников	
00	25	50	75	1-2-3-4	2	13	38	63	88	6-3-4-5	3
01	26	51	76	1-2-3-4	4	14	39	64	89	6-3-4-5	4
02	27	52	77	1-2-3-9	1	15	40	65	90	6-3-5-9	5
03	28	53	78	1-2-3-9	9	16	41	66	91	6-3-5-9	9
04	29	54	79	1-2-4-9	2	17	42	67	92	10-3-7-9	10
05	30	55	80	1-2-4-9	4	18	43	68	93	10-3-7-9	7
06	31	56	81	1-3-4-8	3	19	44	69	94	10-4-5-11	11
07	32	57	82	1-3-5-9	1	20	45	70	95	10-4-5-11	4
08	33	58	83	6-2-3-4	2	21	46	71	96	10-4-7-9	9
09	34	59	84	6-2-8-11	6	22	47	72	97	10-4-7-9	7
10	35	60	85	6-2-8-11	8	23	48	73	98	10-4-8-11	8
11	36	61	86	6-2-9-11	11	24	49	74	99	10-4-8-11	10
12	37	62	87	6-2-9-11	2						

В последней графе табл. 5 приведен номер псевдодальности, которую нужно использовать при составлении двойных разностей согласно (23).

*Пример* выбора исходных данных: шифр 15п-41. Согласно табл. 4 определяемая станция 2 — Нескучный сад. Согласно табл. 5 нужно использовать псевдодальности от спутников 6-3-5-9 и составлять двойные разности по правилу

$$\Delta\Delta P = (P_{6-2} - P_{6-1}) - (P_{9-2} - P_{9-1}).$$

Криволинейные координаты МИИГАиК даны в Приложении 1, прямоугольные координаты МИИГАиК и ИСЗ в системе ПЗ-90 приведены в Приложении 2, псевдодальности от 11 спутников до четырех пунктов московской сети — в Приложении 3.

*Пример* выполнения задания.

Определим разности координат между пунктами МИИГАиК (базовая станция) и МГУ (определяемая станция).

Исходные данные: координаты опорной станции и приближенные координаты определяемой станции



Координаты	$X$ , тыс. км	$Y$ , тыс. км	$Z$ , тыс. км
МИИГАиК	2847337,771	2197790,778	5249692,777
МГУ(приближенные)	2853300	2195000	5247700
Среднее	2850318,886	2196395,389	5248696,389

### Вычисление первых и вторых разностей псевдодальностей

ИСЗ <sub><i>i</i></sub>	1	2	3	4
$P_{\text{МИИГАиК}}$ , м	19144321,58	19520344,54	19405484,02	20020928,12
$P_{\text{МГУ}}$ , м	19144088,50	19519608,55	19407563,30	20018400,31
$P_{\text{МГУ}} - P_{\text{М}}$ , м	-233,077	-735,99	2079,28	-2527,81
$\Delta(P_{\text{МГУ}} - P_{\text{М}})$	0	-502,913	2312,357	-2294,733

Вычисление средних расстояний  $\rho_{\text{cp}}$  и направляющих косинусов  $l$ ,  $m$ ,  $n$  по формулам (18) и (20)

ИСЗ	1	2	3	4
$X_{i\text{,}}$ м	11513918,700	10767186,55	53282736,330	18489861,270
$Y_{i\text{,}}$ м	7766236,225	1396502,488	9460022,485	12471568,900
$Z_{i\text{,}}$ м	21386099,480	23073089,840	23073089,840	12362645,320
$X_{\text{cp}} - X_{i\text{,}}$ м	-8663599,810	-7916867,660	-2477954,748	-15639542,400
$Y_{\text{cp}} - Y_{i\text{,}}$ м	-5569840,860	799892,901	-7263627,096	-10275174,400
$Z_{\text{cp}} - Z_{i\text{,}}$ м	-16137403,100	-17824393,500	-17824393,450	-7113948,930
$\Delta_{\text{cp}}$ , м	19144107,910	19519877,670	19406430,380	20019559,550
$l_i$	-0,45254654	-0,40557978	-0,127687303	-0,78121311
$m_i$	-0,29094283	0,040978377	-0,374289705	-0,51325677
$n_i$	-0,84294359	-0,91314063	-0,918478726	-0,35534992
$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2$	1	1	1	1
$\Delta l$	0	-0,32866657	0,046966762	0,324859239
$\Delta m$	0	-0,22231394	0,331921203	-0,083346878
$\Delta n$	0	0,48759367	-0,07019704	-0,075535133

Составление матрицы (28):

$$\begin{pmatrix} -502,913 \\ 2312,357 \\ 2294,733 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,046966762 & 0,331921203 & 0,07019704 \\ 0,324859239 & -0,083346878 & -0,07553513 \\ -0,32866657 & -0,222313941 & 0,48759367 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\text{МГУ}} - X_{\text{М}} \\ Y_{\text{МГУ}} - Y_{\text{М}} \\ Z_{\text{МГУ}} - Z_{\text{М}} \end{pmatrix}$$

Определение разностей координат:

$$\begin{pmatrix} X_{\text{МГУ}} - X_{\text{М}} \\ Y_{\text{МГУ}} - Y_{\text{М}} \\ Z_{\text{МГУ}} - Z_{\text{М}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,43434102 & 3,65221233 & 0,7722759 \\ 3,33594707 & 0,00426378 & 0,48092437 \\ 2,4878245 & 2,46374813 & 2,79072011 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -502,913 \\ 2312,357 \\ 2294,733 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5951,703 \\ -2771,425 \\ -1958,052 \end{pmatrix}$$

Правило обращения матрицы размером 3x3 приведено в Приложении 5.

Т а б л и ц а 6

**Координаты МГУ в системе ПЗ-90**

	$X, \text{ м}$	$Y, \text{ м}$	$Z, \text{ м}$	$B$	$L$	$H, \text{ м}$
МИИГАиК	2847337,771	2197790,778	5249692,777	55°45'42,342	37°39'49,238"	157,000
Приращения координат	5951,703	-2771,425	-1958,052			
МГУ	2853289,474	2195019,353	5247734,725	55 43 45,924	37 34 15,165	239,987

Координаты МИИГАиК выбраны из Приложения 1, криволинейные координаты МГУ вычислены по формулам (4).

Т а б л и ц а 7

**Координаты МГУ в системе СК-95**

	$X, \text{ м}$	$Y, \text{ м}$	$Z, \text{ м}$	$B$	$L$	$H, \text{ м}$
МИИГАиК	2847311,871	21979291,718	5249774,537	0,973225449 рад 55°45'42,159"	0,657388393 рад 37°39'56,089"	147,258
Приращения координат	5951,703	-2771,425	-1958,052	-0,00056437 рад -0°01'56,411"	-0,00161963 рад -0°05'34,073	82,881
МГУ	2853263,574	2195150,293	5247816,485	0,972661074 рад 55°43'45,748"	0,655768759 рад 37°34'22,016"	230,139

### Вопросы к заданию 1

1. Используя приведенные в табл. 2 данные и формулу (1), найдите изменения  $\Delta X_{90} - \Delta X_{95} = ?$   $\Delta Y_{90} - \Delta Y_{95} = ?$   $\Delta Z_{90} - \Delta Z_{95} = ?$  разностей координат при переходе от ПЗ-90 к СК-95.

2. Почему приращения  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  прямоугольных координат в системах ПЗ-90 и СК-95 одинаковы?

3. Как перейти от геодезических прямоугольных координат МИИГАиК в системе ПЗ-90 к соответствующим координатам в системе СК-95?

### Задание 2. Вычисление топоцентрических координат

#### Вопросы к заданию 2.

1. Какие системы координат называют топоцентрическими?

2. Как связаны экваториальные геоцентрические и топоцентрические координаты?

3. Какие топоцентрические координаты получают из относительных спутниковых определений?

4. Какую систему координат называют криволинейной?

5. Какие топоцентрические координаты получают при наблюдениях с тахеометром?

Вычислить криволинейные топоцентрические координаты, используя полученные в задании 1 экваториальные прямоугольные топоцентрические координаты. Вычисления выполнять в любой системе – ПЗ-90 или СК-95 (по выбору).

#### Пример выполнения задания:

а) горизонтные прямоугольные координаты МГУ в системе СК-95

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,65441185 & -0,50515928 & 0,56263597 \\ -0,61105161 & 0,79159076 & 0 \\ 0,44537743 & 0,34379962 & 0,82670476 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5951,703\text{м} \\ -2771,425\text{м} \\ -1958,052\text{м} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3596,5307\text{м} \\ -5830,6127\text{м} \\ 79,2212\text{м} \end{pmatrix}$$

По какой формуле выполнены вычисления? Можно ли использовать эти вычисления при определении координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  вашего пункта?

б) преобразование горизонтных прямоугольных координат МГУ в криволинейные

$$\begin{pmatrix} S \sin \Theta \cos A \\ S \sin \Theta \sin A \\ S \cos \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3604,280 \\ -5825,737 \\ 86,554 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} S \\ \Theta \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos(z/S) \\ \arctg(y/x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6851,097 \text{ м} \\ 1,558162385 \text{ rad} \\ 4,158345684 \text{ rad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6851,097 \text{ м} \\ 89^\circ 16' 34,062'' \\ 238^\circ 15' 20,367'' \end{pmatrix}.$$

в) приближенные разности геодезических криволинейных координат МГУ – МИИГАиК

Используя координаты исходного пункта МИИГАиК (табл. 7 или прил. 1), согласно формуле (8) напишем

$$\begin{pmatrix} (M + H)\Delta B \\ (N + H)\cos B\Delta L \\ \Delta H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6379423,422 \Delta B \\ 3596949,370 \Delta L \\ \Delta H \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3604,280 \\ -5825,737 \\ 86,554 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,0005650 \text{ rad} \\ -0,0016196 \text{ rad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0^\circ 01' 56,540'' \\ -0^\circ 05' 34,073'' \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} B_{\text{МГУ}} \\ L_{\text{МГУ}} \\ H_{\text{МГУ}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,973225449 \\ 0,657388393 \\ 147,258 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,0005650 \\ -0,0016196 \\ 86,554 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97266045 \\ 0,65576876 \\ 233,812 \end{pmatrix}.$$

### Задание 3. *Определение разностей геодезических криволинейных координат*

Вычисления выполнять по формулам (11) – (16). Исходные данные — разности  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  геодезических прямоугольных координат, полученные в задании 1 (табл. 6, 7).

*Пример* выполнения задания. Система координат — СК-95:

- а) определение разности долгот (12);
- б) вычисление разностей  $\Delta X'$ ,  $\Delta Y'$  (11)

$$\begin{pmatrix} \Delta X' \\ \Delta Y' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,79159076 & 0,61105161 \\ -0,61105161 & 0,79159076 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5951,701 \\ -2771,425 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3017,8295 \text{ м} \\ -5830,6320 \text{ м} \end{pmatrix};$$

$$L_2 - L_1 = -0,00161963 \text{ rad} = -0^\circ 05' 34,073'';$$

$$L_2 = 0,65576876 \text{ rad} = 37^\circ 34' 22,016'';$$

в) вычисления разностей широты и высоты по формулам (13) – (16)  
Нулевое приближение (16)

	$-\Delta X' \sin B_1 + \Delta Z \cos B_1$ $\Delta X' \cos B_1 + \Delta Z \sin B_1$	$-(N_1 + H_1) \sin B_1 \cos B_1$ $(1 - \cos \Delta L)$ $(N_1 + H_1)(1 - \cos \psi_0)$	$(N_1 + H_1) \sin \Delta B_0$ $\Delta H_0$	$\frac{\Delta B_0}{H_{0M}}$	$(N_2)_0$ , м	$1 - \cos \psi_0$
	(1)	(2)	(1)+(2)			
$\Delta B_0$	-3596,52427 м	-3,900185058 м	-3600,42445 м	-0,00056318	6392872,8	$5,7413E^{-7}$
$\Delta H_0$	79,2088 м	3,674778530 м	82,8793 м	230,1376		

Первое приближение (15)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (N_2 + H_2) \sin(B_2 - B_1) \\ H_2 - H_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0,826704765 & 0,562635968 \\ 0,562635968 & 0,826704765 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3017,8295 \\ -5830,632 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} -0,61058E-07 & 0,562635968 \\ 5,74804E-07 & 0,826704764 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6393102,9 \\ -13,62666513 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 11,26306 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3596,42752 \\ 79,20882 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11,57033 \\ -7,59044 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 11,26306 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3608,094592 \\ 82,8814 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3603,9479 \\ 68,3010 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,9035 \\ -3,6769 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2710 \\ 0,3982 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -11,300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3608,1225 \\ 82,8814 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Вычисление широты и высоты МГУ

$$B_2 - B_1 = \arcsin \left\{ \frac{(N_2 + H_2) \sin \Delta B}{(N_2 + H_2)} \right\} = \arcsin(-3608,1225/6393103) = -0,000564373 \text{ рад} = -0^\circ 01' 56,410''$$

$$B_2 = B_1 + (B_2 - B_1) = 0,973225449 - 0,000564373 = 0,972661076 = 5543' 45,747''$$

$$H_2 = 147,258 \text{ м} + 82,881 \text{ м} = 230,139 \text{ м}$$

Результаты вычисления разностей координат

формула	(4)	(8)	(15)	(16)
$\Delta B$	-0,000564376 рад -0°01'56,411"	-0,0005650 рад -0°01'56,540"	-0,00056318 рад -0°01'56,164"	-0,000564374 рад -0°01'56,410"
$(M+H)\Delta B$	3600,407 м	3604,423 м	3592,778 м	3600,395 м
$\Delta H$	82,881	86,554 м	82,8793 м	82,8814 м
$\Delta L$				
формула	(4)	(8)	(12)	(12)
	-0,00161963 рад -0°05'34,073"	-0,00161963 рад -0°05'34,073"	-0,00161963 рад -0°05'34,073"	-0,00161963 рад -0°05'34,073"

Сделайте заключение о точности разных способов вычисления разностей геодезических координат. Какой из приближенных способов можно использовать, если разности геодезических прямоугольных координат определены с ошибками 1–2 см?

#### **Задание 4. Редуцирование результатов измерений к поверхности эллипсоида**

Задание состоит из двух частей:

1. Редуцирование результатов спутниковых измерений;
2. Редуцирование результатов наземных измерений.

Содержание задания:

Вычислить по найденным в контрольной работе № 1.1 приращениям  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  прямоугольных координат длину  $S_o$  и азимут  $A_o$  геодезической линии, соединяющей проекции точек на эллипсоид;

Найти длину  $S_o$  геодезической линии по наземным измерениям.

Сравнить результат определения  $S_o$  по спутниковым и наземным измерениям.

Для редуцирования спутниковых измерений использовать формулы: (27), (28) и (30) – (32). Редуцирование измеренной на поверхности Земли линии можно выполнить согласно [1,7] или разд. 2.3 настоящих методических указаний.

#### **Пример выполнения задания. Линия МИИГАиК – МГУ. Система СК-95**

##### **Часть 1. Редуцирование спутниковых измерений**

По формулам (27) – (28)		По формулам (30) – (32):			
$\Delta X$ , м	5951,703	$B_1$	0,973225449 рад	$\Delta X_o$ , м	5914,5770
$\Delta Y$ , м	-2771,425	$L_1$	0,657388393 рад	$\Delta Y_o$ , м	-2799,8182
$\Delta Z$ , м	-1958,052	$H_1$	147,258 м	$\Delta Z_o$ , м	-2026,4958
$\Delta H$ , м	82,881	$B_2$	0,972661074 рад		
$S$ , м	6851,097	$L_2$	0,655768759 рад		
$d_o$ , м	6850,3917	$H_2$	230,139 м	$d_o$ , м	6850,3933
$S_o$ , м	6850,3921	$x$	-3596,5307	$S_o$ , м	6850,3937
$A$	4,159684373	$y$	-5830,6127	$A$	4,15968441
$A$	238°19'56,491"	$z$	79,2212 м	$A$	238°19'56,498"
$\delta_2$	0,0070"			$\Delta_3$	3 E-5"
$A_o$	238°19'56,498"			$A_o$	

Дайте ответы на вопросы

1. Почему значения длины и азимута геодезической линии не сопадают?

2. Как называется поправка  $\delta_2$ ? Что учитывают введением этой поправки?

3. Как называется поправка  $\delta_3$ ? Что учитывают введением этой поправки?

*Часть 2. Редуцирование наземных измерений*

Для редуцирования используйте формулу (29). Исходные данные выбрать из Приложения 4.

**Пример выполнения задания. Линия МИИГАиК – МГУ.  
Система координат – СК-95**

	$l$ , м	$H$ , м	$\xi^{AG}$	$\eta^{AG}$	$\vartheta^{AG}$	$S_o$ , м
МИИГАиК		147	-6,342''	2,678''		
	6850,604					6850,402
МГУ		230	-3,45	2,68		
Среднее		188,5	-4,896	2,679	0,289''	

### Задание 5. Оценивание точности

Ошибка  $(m_s)_c$  определения расстояния  $S$  спутниковым методом оценивают по формуле

$$(m_s)_c, \text{ мм} = (5 \div 10) + (1 \div 2)S_{\text{км}}, \quad (33)$$

Выберите любое из возможных значений коэффициентов этой формулы и найдите ошибку определения  $S$  для вашего варианта.

Оцените ошибки определения разностей координат:

$$m_{\Delta x} = l(m_s)_c;$$

$$m_{\Delta y} = m(m_s)_c, m_{\Delta z} = n(m_s)_c,$$

$l, m, n$  — направляющие косинусы отрезка  $S$ .

Сравните результаты  $(S_o)_n, (S_o)_c$  определения расстояния  $S_o$  по наземным и по спутниковым измерениям

$$\Delta S_o = (S_o)_n - (S_o)_c.$$

Найдите ошибку  $(mS)_n$  наземных измерений

$$(mS)_n^2 = \Delta S_o^2 - (m_s)_c^2. \quad (34)$$

**Пример выполнения задания. Линия МИИГАиК – МГУ**

$S$ , км	$(m_s)_c$ , мм	$(m_s)_c$ , мм
6,85	min	max
	$5+1 \times S$ км	$10+2 \times S$ км
	11,85	23,7

$$\Delta S_o = 6850,402 \text{ м} - 6850,394 \text{ м} = 0,008 \text{ м}$$

Разность  $\Delta S_o$  оказалась меньше минимальной средней квадратической ошибки спутниковых определений, оцененной по формуле (33). Поэтому определить ошибку наземных определений по формуле (34) нельзя. Положим наземные и спутниковые определения равноточными, тогда

$$(m_s)_n = (m_s)_c = 8 * 2^{1/2} \text{ мм} = 5,67 \text{ мм}$$

Точность измерений  $\Delta S_o / S_o < 1 \times 10^{-6}$ .



## Список литературы

1. *Огородова Л.В.* Высшая геодезия. Ч. III. Теоретическая геодезия: Учебник для вузов. — М.: Геодэскартиздат, 2006. — 384 с.
2. *Огородова Л.В.* Основы теории потенциала. Гравитационное поле Земли, Луны и планет: Учебное пособие. — М.: Изд-во МИИГАиК, 2013. — 108 с.
3. *Огородова Л.В.* Нормальное поле. Определение нормального потенциала (текст лекций по геодезической гравиметрии): Учебное пособие. — М.: МИИГАиК, 2010. — 105 с.
4. *Бойко Е.Г.* Высшая геодезия. Ч. II. Сфероидическая геодезия: Учебник для вузов. — М.: Картгеоцентр – Геодэзиздат, 2003. — 144 с.
5. *Морозов В.П.* Курс Сфероидической геодезии: Учебник. — М.: Недра, 1979. — 289 с.
6. *Гофман-Валленгоф Б., Моритц Г.* Физическая геодезия. — М.: МИИГАиК, 2007.
7. *Яковлев Н.В. и др.* Практикум по высшей геодезии. Изд. 2-е, стер. ООО ИД «Альянс», 2007. — 368 с.
8. ГКИНП (ГНТА)-01-006-03. Основные положения о государственной геодезической сети Российской Федерации.
9. ГКИНП (ГНТА)-03-010-02. Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов.
10. Инструкция о построении ГГС. — М.: Недра, 1966.
11. *Яковлев Н.В.* Высшая геодезия. — М.: Недра – Геодэзиздат, 1989. — 445 с.
12. *Огородова Л.В., Шилкин П.А.* Определение геодезических координат из пространственной линейной засечки: Методические указания. — М.: МИИГАиК, 2015. — 20 с.
13. *Хаимов З.С.* Основы высшей геодезии. — М.: Недра, 1984. — 360 с.

## Приложение 1

### Криволинейные координаты МИИГАиК

	Широта $\varphi$	Долгота $\lambda$	нормальная высота $H^N$ , м
натуральные	55° 45' 36"	37° 39' 54"	145
геодезические	$B$	$L$	$H$ , м
СК-95	55 45 42,159	37 39 56,089	147,258
ПЗ-90	55 45 42,342	37 39 49,238	157,000
астрономо-геодезические уклонения отвеса и аномалия высоты	$\xi^{AG} = \varphi - B$	$\eta^{AG} = (\lambda - L) \cos B$	$\zeta^{AG} = H - H^N$
СК-95	-6,159"	-1,175"	2,258 м
ПЗ-90	-6,342"	2,679"	12 м

## Приложение 2

### Геодезические прямоугольные координаты МИИГАиК и ИСЗ ГЛОНАСС. Система ПЗ-90.

ИСЗ	$X$ , м	$Y$ , м	$Z$ , м
1	11513918,700	7766236,250	21386099,480
2	10767186,550	1396502,488	23073089,840
3	5328273,633	9460022,485	23073089,840
4	18489861,270	12471569,800	12362645,320
5	12246883,870	5710815,740	21625226,450
6	10923348,720	9165777,880	21140458,100
7	9156861,370	6411703,684	22919248,180
8	20557638,260	5894807,913	13888295,390
9	13900427,620	16565884,550	13512941,240
10	11136368,760	7653814,196	21625226,450
11	6733179,215	12146976,850	21386099,480

### Приложение 3

#### Псевдодалности

ИСЗ	МИИГАиК, м	ГАИШ, м	Нескучный Сад, м	Останкино, м	Люблино, м
1	19144321,58	19143865,79	19143996,83	19144077,90	19144511,17
2	19520344,54	19518648,90	19519864,50	19518638,15	19521852,95
3	19405484,02	19406695,97	19407071,63	19405445,54	19406400,86
4	20020928,12	20019994,52	20018325,57	20022421,09	20018365,73
5	19205601,93	19204533,81	19204940,02	19204905,30	19206060,44
6	19138846,25	19138826,85	19138767,47	19138919,94	19138852,02
7	19229783,53	19229529,88	19230121,21	19229118,70	19230693,89
8	20048754,35	20046008,60	20045266,99	20048789,33	20047154,31
9	19922313,57	19923198,40	19921299,08	19924544,09	19919814,30
10	19147807,91	19147408,20	19147597,76	19147518,99	19148095,87
11	19351329,45	19352837,30	19352604,83	19352002,12	19351418,20

### Приложение 4

#### Измеренные на поверхности Земли расстояния от МИИГАиК до определяемых пунктов и составляющие уклонения отвеса

Исходный пункт	Определяемые пункты	Расстояние $S$ , м	$\xi^{AG}$	$\eta^{AG}$
МИИГАиК		–	–6,342''	2,678''
	МГУ	6850,604	–3,45	2,68
	ГАИШ	5885,923	–2,05	4,84
	Нескучный сад	5632,771	–3,30	0,98
	Останкино	4391,314	–6,31	1,12
	Люблино	4706,131	–2,65	2,03

Определение элементов обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} \Delta l_1 & \Delta m_1 & \Delta n_1 \\ \Delta l_2 & \Delta m_2 & \Delta n_2 \\ \Delta l_3 & \Delta m_3 & \Delta n_3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix},$$

$M_{ij}$  — минор (определитель) порядка  $ij$ , получающийся из определителя исходной матрицы вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца:  
 $\Delta l_1 \Delta n_2 - \Delta l_2 \Delta n_1$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \Delta m_2 \Delta n_3 - \Delta m_3 \Delta n_2, & M_{12} &= \Delta m_1 \Delta n_3 - \Delta m_3 \Delta n_1, & M_{13} &= \Delta m_1 \Delta n_2 - \Delta m_2 \Delta n_1, \\ M_{21} &= \Delta l_2 \Delta n_3 - \Delta l_3 \Delta n_2, & M_{22} &= \Delta l_1 \Delta n_3 - \Delta l_3 \Delta n_1, & M_{23} &= \Delta l_1 \Delta n_2 - \Delta l_2 \Delta n_1, \end{aligned}$$

$d$  — определитель матрицы,

$$d = \Delta l_1 \Delta m_2 \Delta n_3 + \Delta m_1 \Delta n_2 \Delta l_3 + \Delta n_1 \Delta l_2 \Delta m_3 - \Delta l_3 \Delta m_2 \Delta n_1 - \Delta m_3 \Delta n_2 \Delta l_1 - \Delta n_3 \Delta l_2 \Delta m_1.$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
1. Разделы программы курса «Высшая геодезия и основы координатно-временных систем» .....	3
2. Методические указания к отдельным темам .....	7
2.1. Системы координат, используемые в высшей геодезии. Преобразования координат .....	7
2.2. Измерение поверхности Земли .....	13
2.3. Редуцирование измерений к эллипсоиду и решение задач на его поверхности .....	16
Контрольная работа № 1	
— Системы координат, применяемые в высшей геодезии.....	19
Задание 1.1. Общие сведения о системах координат.....	19
Задание 2.1. Связь различных систем геодезических координат.....	19
Контрольная работа № 2	
— Определение разности геодезических координат.....	23
Задание 2.1. Определение разности геодезических прямоугольных координат из относительных спутниковых определений.....	23
Задание 2.2. Вычисление топоцентрических координат.....	27
Задание 2.3. Определение разностей геодезических криволинейных координат .....	28
Задание 2.4. Редуцирование результатов измерений к поверхности эллипсоида .....	30
Задание 2.5. Оценивание точности .....	31
Список литературы .....	33
Приложения .....	34

**Для заметок**

**Для заметок**

*Внутривузовское издание*

Подписано в печать 15.06.2017. Гарнитура Таймс  
Формат 60×90/16 Бумага офсетная

Объем 2,5 усл. печ. л  
Тираж 20 экз. Заказ № 82

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК