

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

**Московский государственный университет
геодезии и картографии (МИИГАиК)**

проф. д.т.н. И.Г. Чугреев

**Полигонометрия.
Привязочные работы.**

*Рекомендовано УМО по образованию в области геодезии
и фотограмметрии в качестве учебного пособия, для
студентов высших учебных заведений, обучающихся
направлению подготовки
120100 «Геодезия»*

Подписано в печать 30.10.2009. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Объем 8,0 усл. печ. л.

Тираж 520 экз. Заказ №280 Цена договорная

Отпечатано в типографии МИИГАиК
105064, Москва, Гороховский пер., 4

МОСКВА 2009

Прямая многократная засечка	...	55
Обратная однократная засечка	...	69
Оценка точности положения пункта, определённого обратной однократной засечкой	...	72
Обратная многократная засечка (уравнивание по измеренным углам)	...	79
Обратная многократная засечка (уравнивание по измеренным направлениям)	...	84
Определение положения двух пунктов по двум исходным (задача Ганзена)	...	94
Определение поправок за центрировку и редукцию и учёт их при привязках	...	102
4. Светодальномерная полигонометрия.	...	108
Классификация светодальномеров.	...	109
Принцип определения расстояний светодальномерами.	...	109
Временной (импульсный) метод измерения расстояний.	...	109
Фазовый метод измерения расстояний.	...	110
Светодальномер СТ-5	...	110
Методика измерения расстояний светодальномером СТ-5	...	116
Обработка измерений.	...	117
Л и т е р а т у р а	...	119

О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр
Полигонометрия.	... 1
1. Плановые государственные геодезические сети.	... 1
2. Угловые измерения.	... 3
Визирные марки и оптические центриры.	... 3
Поверки визирных марок.	... 5
Поверки оптического центрира.	... 6
Измерения углов.	... 7
Подготовительные работы для измерения углов.	... 8
Измерение угла способом приемов.	9
Измерение углов способом круговых приемов.	... 11
Оценка точности угловых измерений.	... 15
3. Привязочные работы в полигонометрии	... 19
Непосредственная привязка к пунктам ГГС	... 20
Координатная привязка	... 23
Косвенная привязка к пунктам ГГС	... 31
Передача координат с вершины знака на землю (сносение координат)	... 32
Привязка к отдалённым пунктам ГГС	... 43
Дифференциальные формулы дирекционного угла	... 45
Прямая однократная засечка	... 47
Оценка точности положения пункта, определённого прямой однократной засечкой	... 52

Полигонометрия.

1 Плановые государственные геодезические сети. (Общие положения)

Геодезическими сетями принято называть аналитические линейно-угловые построения на земной поверхности, закрепленные на местности, пункты которых имеют координаты, вычисленные в определенной системе координат по результатам угловых и линейных измерений.

Назначение таких сетей - быть основой различного рода съемок, необходимых для решения научных, народохозяйственных и оборонных задач.

К основным сетям относится та часть геодезических сетей, которая имеет высокую точность линейных и угловых элементов и обеспечивает относительную погрешность взаимного положения пунктов сети $\leq 1:10000$.

В зависимости от точности угловых и линейных измерений, а также длины сторон, основные сети подразделяются на классы и разряды. Высшие классы (1 и 2 кл), распространенные на всю территорию России, составляют главную геодезическую основу страны. 3 и 4 классы являются сетями сгущения 1 и 2 класса.

Построения основных геодезических сетей ведется методами **триангуляции, полигонометрии и трилатерации**. В последнее время (с 90 годов 20 века) для построения сетей используются методы спутниковых (GPS) определений.

Полигонометрия - это комбинация линейно-угловых измерений на местности, в виде отдельных ходов или сетей (полигонов), и предназначена для определения плоских прямоугольных координат геодезических пунктов в заданной системе счисления (СК-42, СК-63, СК-95 и т.д.).

В большинстве случаев, пункты полигонометрии совмещают с пунктами нивелирной сети. Такие пункты кроме плановых координат имеют высотные отметки.

Основные характеристики полигонометрии 4 класса.

Таблица 1.

Наименование элемента полигонометрии	Значение	Наименование элемента полигонометрии	Значение	
Число сторон в одиночном ходе не более	15	СКП измерения угла по невязкам в ходах и полигонах не более	3.0''	
Предельная длина полигонометрического хода (км)	10	Длина стороны хода (км)	2.0	
отдельного.....		наибольшая.....		0.25
между исходной и узловой точкой.....		наименьшая.....		0.50
Между узловыми точками.....	7	Относительная невязка хода $\leq 1:25000$		
.....	5			
Предельный периметр полигона	30			

Л и т е р а т у р а

Гиршберг М.А. Геодезия. Часть I. “Недра”, Москва 1967 г.
 Селиханович В.Г., Логинова Г.П. Задачник по геодезии. “Недра”, М. 1970 г.
 Селиханович В.Г., Козлов В.П., Логинова Г.П. Практикум по геодезии. “Недра”, М. 1978 г.
 Селиханович В.Г. Геодезия. Часть II. “Недра”, М. 1981 г.
 Чеботарев А.С. Геодезия. Часть II. “Геоиздат”, М. 1949 г.
 Курков В.М, Чугреев И.Г. Плано-высотная привязка аэрофотоснимков. Методические указания. МИИГАиК, 1990 г.

Полигонометрические хода и сети 4 кл., 1 и 2 разрядов прокладываются в соответствии с требованиями, предъявляемыми к основным геодезическим сетям, которые вынесены в таблицу 1 и 2

Удаление от осевого меридиана как правило берется из предварительно вычисленного хода полигонометрии и рассчитывается как средняя ордината линии.

Предположим, что из предварительно уравненного хода ордината точки 1 = 6 590500 (м) а ордината точки 2 = 6 589500 (м).

Тогда

$$Y_{cp} = (Y_1 + Y_2) / 2 = 6\ 590\ 000 \text{ (м)}$$

Поскольку величина Y является преобразованной, а первая цифра является информационной (указывает на номер зоны), то отбросив первую цифру и вычтя из ординаты 500 000 (м), получим среднее удаление линии от осевого меридиана = 90000 (м) или 90 (км)

Поправка за dY_{cp} всегда положительна (плюсуется).

Поправка за приведение линии на уровень моря отрицательная.

Поправка за температуру и давление выбирается из таблиц, прилагаемых к паспорту светодальномера и складывается с учетом собственного знака.

Основные характеристики полигонометрии I и 2 разрядов

Таблица 2

Наименование элемента полигонометрии	1 разряд	2 разряд
Предельная длина полигонометрического хода (км)		
отдельного.....	5	3
между исходной и узловой точкой..	3	2
между узловыми точками.....	2	1.5
Предельный периметр полигона	15	10
Число сторон в ходе.....	15	15
Длина стороны хода (км)		
наибольшая.....	0,8	0,35
наименьшая.....	0,12	0,08
оптимальная.....	0,30	0,20
Относительная невязка хода не более	1:10000	1:5000
СКП измерения угла по невязкам в ходах и полигонах не более	5"	10"

2. Угловые измерения

Визирные марки и оптические центриры.

Для получения большей точности измерения углов, в полигонометрии используют специальные приспособления – визирные марки и оптические центриры.

Визирная марка представляет собой визирную цель, ось симметрии которой расположена строго по отвесной линии и проходит через вершину измеряемого угла. Центрирование марки осуществляется с помощью специального приспособления – оптического или лазерного центрира.

Визирные марки.

Визирная марка состоит из двух частей :

1. Подставка (трегер) - одинакова по конструкции с подставкой теодолита;
2. Металлический щиток укрепленный на оси, окрашенный в два цвета.

Рисунок и цвета окраски у различных конструкций марок различны. Чаще всего визирная цель, изображенная на марке, представляет собой либо перевернутый вверх основанием треугольник, вершина угла которого совпадает с осью симметрии марки, либо группу треугольников, окрашенных в два цвета, вершины которых сходятся в одной точке и совпадают с осью симметрии марки.

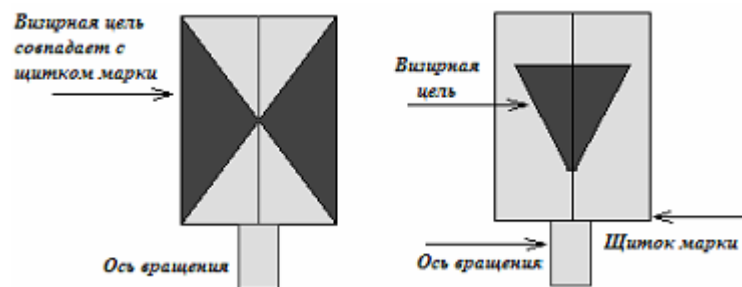


Рис. 1

По специальному заказу, завод УОМЗ (Уральский оптико-механический завод) комплектует теодолиты специальным набором марок – КВЦ (комплект визирных целей). Марки (4 шт.) покрыты специальной световозвращающей (флуоресцентной) эмалью, повышающей яркость и контрастность фона визирной цели в несколько раз, по сравнению с обычными красками, что дает возможность производить измерение углов со сторонами до 5 км. Кроме этого, на оси симметрии имеется небольшое отверстие, которое освещается лампочкой подсветки, что позволяет производить измерения в ночных условиях. В набор КВЦ также входят 2 оптических центрира с уровнями.

Сами марки снабжены круглым уровнем.

Обработка измерений.

Рассмотрим обработку измерений на примере одного цикла.

Дата 4 июня 2008 г.

Погода – пасмурно

Температура +12° С

Давление 741мм рт. ст.

Влажность 90%

Измеряемая линия – 1-2

Исполнитель

Владимирова М.Р.

Измеренная линия D (м)	455.335 .337 .336
Среднее из измерений D_{cp}	455.336
Превышение по линии h (м)	± 2.124
Поправка за приведение линии к горизонту $D_s = -h^2/2D$ (м)	- 0.005
Удаление от осевого меридиана Y_{cp} (км)	90.0
Поправка за Y_{cp} $dY = (Y_{cp}^2/2R^2)*D_{cp}$	+0.045
Средняя высота над уровнем моря H (км)	0.140
Поправка за приведение линии на уровень моря $dH = -(H/R)*D_{cp}$	-0.010
Поправка за температуру и давление	+0.007
Вычисленная линия S	455.373

В полигонометрии определяются как прямоугольные координаты, так и высота пункта над уровнем моря. Высоты пунктов определяются нивелированием IV класса.

Превышение по линии берется из журнала нивелирования.

Поправка отрицательная.

Методика измерения расстояний светодальномером СТ-5

СКП в режиме точно составляет 10 мм на 1 км измеряемой линии, в режиме «грубо» - 20 см. Диапазон однозначно измеряемых расстояний – 1000 метров. Если линия превышает 1000 метров, то тысячи метров добавляются к отсчету, снятому с дальномера.

Обнаружение принимаемого сигнала, в процессе наведения на отражатель, сопровождается звуковым сигналом.

Измерения выполняются в следующем порядке:

1. Над измеряемыми точками устанавливаются и центрируются с помощью лота аппаратов штативы.
2. С помощью оптического визира, дальномер наводят на отражатель.
3. Переключатель режимов (7) установить в положение «наведение», переключатель (6) устанавливают в положение «точно». Ручка уровня сигнала (3) поворачивается по часовой стрелке в крайнее положение.
4. Убедившись, что отраженный сигнал принимается, выполняется его оптимизация. С помощью наводящих винтов добиваются максимального отклонения стрелки микроамперметра, а с помощью ручки (3) уровня сигнала, стрелка микроамперметра выставляется на отсчет 50-60 мка.
5. Переключатель (7) устанавливается в положение «Счет». Отсчеты снимаются с цифрового табло после звукового сигнала. Расхождение между минимальным и максимальным отсчетом не должно превышать 5 мм. За один цикл измерений снимается 3 отсчета, которые записываются в журнал. (Один цикл – один прием измерений).

Измерения записываются в специальный журнал и передаются на дальнейшую обработку.

Проверки визирных марок.

Перед началом полевых работ, марки проверяются на **асимметрию**. Если марка снабжена круглым уровнем, то проверяется и круглый уровень.

1. *Ось круглого уровня должна быть параллельна оси вращения марки.* Это условие проверяется как обычно (у нивелира или теодолита).
2. *Ось симметрии визирной цели марки должна совпадать с осью симметрии визирного щитка марки. Ось симметрии визирного щитка марки должна совпадать с осью вращения марки.* Проверку производят измерением с помощью теодолита трех угловых расстояний, два из которых n_1 и n_3 (рис. 2) пройдут по краям щитка марки, а третье n_2 пересечет ось визирной цели.

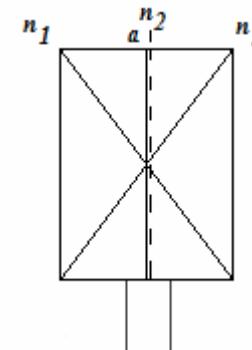


Рис. 2

Теодолит устанавливают в 3 – 5 метрах от марки, приводят ось вращения в отвесное положение, после чего наводят зрительную трубу поочередно на левый край марки, на центр визирной цели, на правый край марки, производя отсчеты n_1 , n_2 , n_3 .

По полученным отсчетам вычисляют разности:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= n_2 - n_1 ; \\ \beta_2 &= n_3 - n_2 \quad (1) . \end{aligned}$$

Асимметрия визирной цели a относительно оси симметрии шитка марки выражается в линейной мере и определяется формулой:

$$a = \frac{\delta\beta \times S}{\rho''} \quad (2);$$

где

$\delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ - разность значений углов (1);

S - расстояние от теодолита до марки.

Для проверки асимметрии выполняют как правило 2 – 3 приема.

Величина асимметрии a не должна превышать 1 мм. При большем ее значении марка бракуется.

Определение асимметрии визирной цели марки.

Таблица 3

N приема	S (м)	n_1	n_2	n_3	β_1	β_2	$\delta\beta$	a (мм)
1	5.35	88°52'00.0"	90°00'00"	91°08'08.2"	1°08'00"	1°08'08.2"	8.2"	0.2
2								

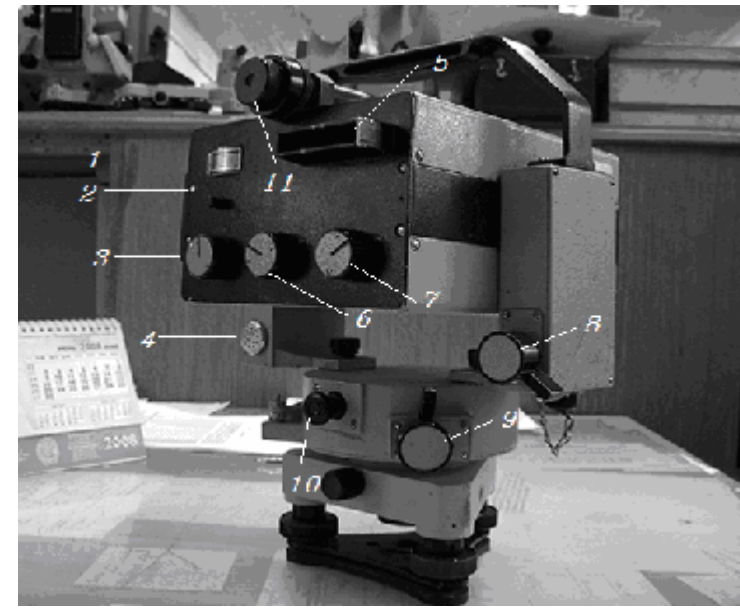
Оптический центрир.

Оптический центрир служит для центрирования визирных марок над центром заложённых знаков.

Оптический центрир представляет собой короткофокусную зрительную трубу, снабженную двумя цилиндрическими уровнями, вставляемую в подставку (трегер) теодолита. По конструкции напоминает оптический отвес теодолита.

В последние годы все большее применение получают лазерные центриры.

Внешний вид и приборная панель прибора СТ-5



- 1 стрелочный микроамперметр
- 2 ручка установки контрольного отсчета
- 3 ручка уровня сигнала
- 4 разъем микротелефона
- 5 цифровое табло
- 6 переключатель режимов (точно-контроль-грубо)
- 7 переключатель режимов (выключено-наведение-счет)
- 8 винт вертикального наведения дальномера
- 9 винт горизонтального наведения дальномера
- 10 оптический центрир
- 11 оптический визир

- 1 - светодиод
- 2 – диафрагма переключателя “дистанция-ОКЗ”
- 3 – разделительная призма
- 4 – объектив
- 5 – блок ОКЗ
- 6 – полевая диафрагма
- 7 – световод
- 8 – объектив
- 9 – интерференционный фильтр
- 10 – Фотоэлектронный умножитель.

В режиме «дистанция», модулированное излучение арсенид-галлиевого светодиода (1) проходит через отверстие диафрагмы (2) переключателя «дистанция-ОКЗ», отражается от грани разделительной делительной призмы (3) и проходит через объектив (4) на отражатель. Отраженный сигнал, проходя через объектив (4) светодиодомера, отражается от другой грани делительной призмы (3) и фокусируется в плоскости полевой диафрагмы (6), совмещенной с торцом световода (7). Проходя через световод, свет фокусируется в плоскости фотокатода (10) фотоэлектронного умножителя ФЭУ при помощи дополнительного объектива (8), после чего сигнал направляется в счетный узел.

В режиме ОКЗ диафрагма переключателя «дистанция-ОКЗ» поворачивается таким образом, что излучение в направлении отражателя перекрывается, а часть излучения фокусируется блоком ОКЗ (5) в плоскости полевой диафрагмы и направляется в ФЭУ. В ФЭУ сигнал детектируется и направляется в счетный узел.

Отличие от оптических центриров состоит в отсутствии зрительной трубы. Ее заменяет твердотельный бытовой лазер – указка.

Проверки оптического центрира.

1. *Ось цилиндрического уровня оптического (лазерного) центрира должна быть перпендикулярна к оси вращения центрира.*
2. *Визирная ось зрительной трубы оптического центрира (ось пучка лазера) должна совпадать с осью его вращения.*
3. *Пересечение штрихов на целике оптического центрира должно совпадать с осью его вращения (для лазерного не нужно).*

Проверки выполняются аналогично проверкам оптического отвеса теодолита или лазерного отвеса электронного тахеометра.

Измерения углов.

При проведении полигонометрических работ используют два способа измерения углов:

1. способ отдельного угла - когда направлений всего два;
2. способ круговых приемов – направлений более двух.

Для точных теодолитов – 3Т2КП и им равноточных (Theo 010 и т.д.), точность измерения углов и количество приемов (число повторных измерений одного и того же угла) регламентируется инструкцией (Таблица 4), и зависит от класса и разряда полигонометрии.

Таблица 4

Точные теодолиты	Полигонометрия		
	4 класс	1 разряд	2 разряд
Ско измеренного угла	3"	5"	10"
Число приемов	6	2	2

Подготовительные работы для измерения углов.

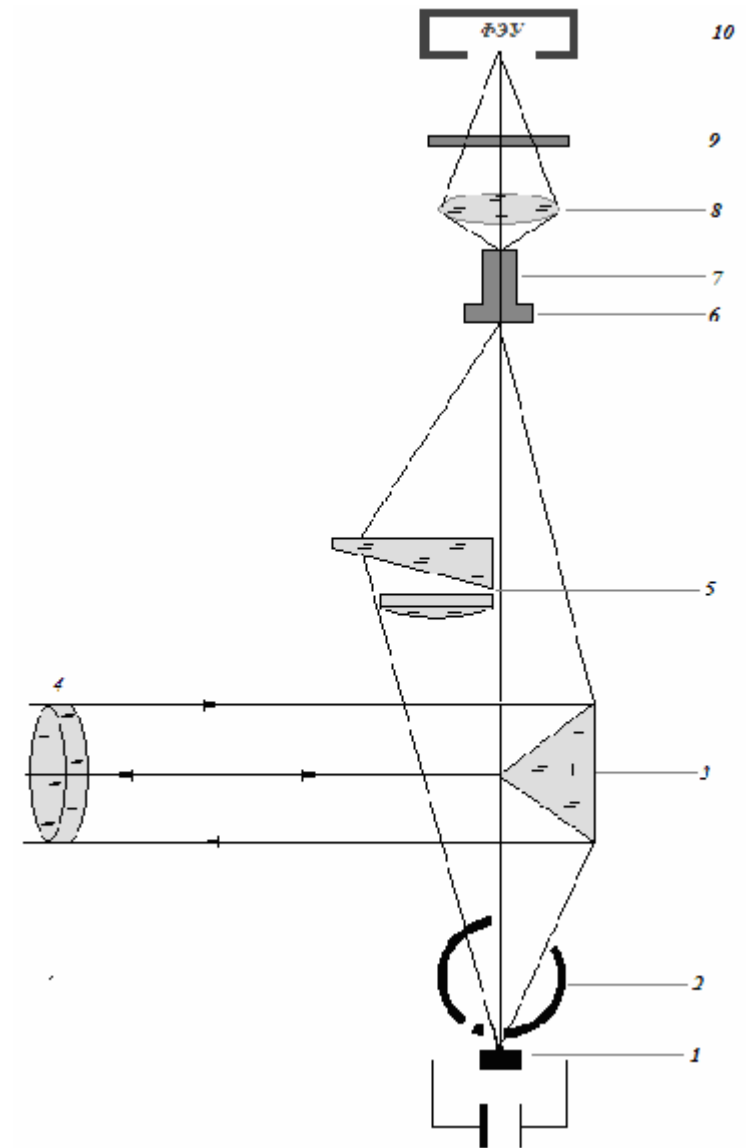
- Перед измерением углов, над закрепленными на местности знаками полигонометрии, расставляют штативы с подставками (трегерами).
- С помощью оптических центриров подставки (трегера) центрируются и горизонтируются над центрами знаков. Центрирование и горизонтирование выполняется одновременно с помощью теодолита или оптического (лазерного) центрира.

Данная операция выполняется в несколько приближений.

Последовательность центрирования и горизонтирования:

1. Установить штатив с трегером, как можно точнее над закрепленным центром, следя за тем, чтобы верхняя площадка трегера примерно занимала горизонтальное положение. Подъемные винты трегера в этот момент должны иметь среднее положение.
2. Вставить в трегер теодолит или оптический центрир.
3. Глядя в окуляр оптического отвеса, подъемными винтами трегера вывести перекрестие оптического визира на центр закрепленного на местности знака. При выполнении данной операции положение пузырька цилиндрического уровня нас не интересует.
4. Поворотом теодолита установим (направление) ось цилиндрического уровня параллельно линии, проходящей через концы двух ножек штатива.
5. а) **если грунт мягкий** – последовательным утапливанием башмаков ножек штатива (образующих линию параллельную оси цилиндрического уровня) приводим пузырек цилиндрического уровня в нуль пункт.
б) **если грунт твердый и ножки не утапливаются** – проводим ту же операцию, только вместо утапливания, изменяем длину ножек штатива (уменьшаем или увеличиваем их длину) и приводим пузырек в нуль пункт.
6. Затем разворачиваем прибор на 90 градусов относительно 1 положения и повторяем пункт 5 только с третьей ножкой штатива.

Оптическая схема и принцип работы СТ – 5



v – скорость распространения электромагнитной волны
(скорость света в атмосфере);
 f – частота колебаний (модуляции).

Если обозначить через N число полных периодов измерения разности фаз, то

$$\Delta\varphi = 2\pi N + \Delta\varphi$$

где

$\Delta\varphi$ - дробная часть цикла колебаний.

Тогда

$$D = \frac{v}{2f} \left(N + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right)$$

Или учитывая, что

$$\frac{v}{2f} = \lambda \quad - \text{длина волны и} \quad \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \Delta N$$

То

$$D = \frac{\lambda}{2} (N + \Delta N)$$

Так как длина волны λ известна и разность фаз измеряется непосредственно, то задача сводится к определению N – числа полных периодов.

В светодальномерах данное определение производится на нескольких частотах (у СТ-5 на двух частотах).

7. Заглянув в окуляр оптического отвеса, убедимся, что перекрестие оптического центрира занимает нужное положение. Если да, то процесс центрирования и горизонтирования заканчивается, если нет, то выполняем следующее приближение с пункта 4.

Центрирование в полигонометрии 4 кл. должно выполняться с точностью ≤ 1 мм. При необходимости уточнить центрирование, можно выполнить параллельный сдвиг трегера, для чего ослабляют становой винт и сдвигают трегер (параллельно самому себе) совмещая крест оптического визира с центром знака. Затем становой винт закрепляют.

Для предотвращения возможных деформаций штатива и подъемных винтов прибора от воздействия солнца и других внешних факторов, над прибором устанавливают зонт, не менее чем за 10 мин до начала наблюдений.

А) Измерение угла способом приемов.

Этот способ измерения угла известен из предыдущего курса. В тахеометрических работах, при развитии съёмочного обоснования теодолитными ходами, для измерения углов использовался способ полуприемов, в котором отсчет на начальное направление при круге право изменялся на некоторую величину. В способе приемов данный сдвиг не делают.

Перед началом измерений углов, производят расчет изменения начальных установок в каждом приеме в соответствии с формулой 3:

$$\sigma = \frac{180^\circ}{n} + i \quad (3);$$

где

n - число приемов;

i - цена поделения лимба теодолита.

Делается это для того, чтобы задействовать все поле лимба горизонтального круга и, тем самым, ослабить влияние эксцентриситета лимба и рена оптического микрометра.

Начальный отсчет в первом приеме устанавливается близким к 0°00'00". После выполнения измерений угла при двух кругах теодолита, к начальной установке каждого последующего приема добавляется расчетное число из (3).

В полигонометрии 4 класса углы измеряются 6 приемами. Начальные установки в приемах будут соответствовать данным приведенным в таблице 5 :

Таблица 5

№ приема	1	2	3	4	5	6
Начальная установка	0°00'	30°10'	60°20'	90°30'	120°40'	150°50'

Пример записи в журнал измерений и вычислений угла способом приемов приведен в таблице 6.

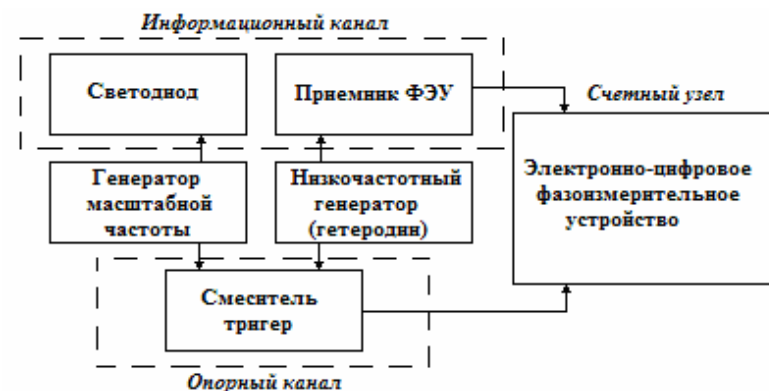
Таблица 6

№ приема	№ станции	Направление	Круг	Отсчет °	Отсчеты по микрометру "		$a_{ср}$	2С	Ср. Знач "	Знач угла
					a1	a2				
I	5	4	Л(1)	0 00	46.2	47.2	46.7	-11.2	52.3	113°52'41.0"
			П(4)	180 00	57.4	58.4	57.9			
		6	Л(2)	113 53	27.1	26.5	26.8	-13.0	33.3	
			П(3)	293 53	39.6	40.0	39.8			

В таблице 6 в скобках (колонка «круг») указана последовательность наведения зрительной трубы

- СКП измеряемой линии - $(10+5 \cdot D \cdot 10^{-6})$ мм
- Источник питания - 6 – 9 вольт
- Увеличение зрительной трубы - 12^x
- Поле зрения зрительной трубы - 3°
- Температурный диапазон - $-30^\circ - +40^\circ$ C
- Предельный угол наклона - $\pm 20^\circ$
- Значение контрольного отсчета - 105 мм ± 3 мм
- число призм - 1 - 18 шт
- масса полного комплекта - 60 кг
- масса приемопередатчика - 4 кг

Принципиальная схема светодальномера СТ-5



Принцип определения расстояния – определение разности фаз между опорным (посланным) сигналом и информационным (принятым) сигналом при помощи фазоизмерительного устройства.

Из физики известна формула:

$$S = \frac{\varphi_{2S} \cdot v}{4\pi \cdot f}$$

где

$\varphi_{2S} = \varphi_1 - \varphi_2$ - разность фаз между опорным и рабочим сигналом;

$$v = \frac{c}{n} :$$

c – скорость распространения электромагнитных волн (скорость света, принятая Международным геодезическим и географическим союзом, равна $299\,792\,458 \pm 1.2$ м/с)

n – показатель преломления атмосферы, функция плотности воздуха (давления, температуры и влажности)

τ – время, измеряемое с момента подачи импульса на лазерный диод до момента приема отраженного сигнала.

Из формулы видно, что точность определения расстояний зависит от ошибок отсчета времени прохождения сигнала и точности определения скорости распространения электромагнитных волн.

2) Фазовый метод измерения расстояний.

Фазовый метод измерения расстояний основан на определении разности фаз посылаемых сигналов от приемопередающего устройства до отражателя и принимаемых модулированных сигналов. Расстояние определяется по формуле:

$$S = \frac{\varphi_{2S} \cdot v}{4\pi \cdot f},$$

где

φ_{2S} – разность фаз между опорным и рабочим сигналом;

v – скорость распространения электромагнитной волны;

f – частота модуляции.

В геодезии, где требуется высокая точность измерения расстояний, применяются преимущественно фазовые дальнометры.

Светодальномер СТ-5

Светодальномер СТ-5 предназначен для измерения длин линий при производстве геодезических и топографических работ.

Технические характеристики

- Диапазон измерения расстояний - 0.2 – 5000 м
- Потребляемая мощность - 5 Вт

Б) Измерение углов способом круговых приемов.

Данный способ применяется в тех случаях, когда требуется выполнить угловые измерения более двух направлений (рис. 3).

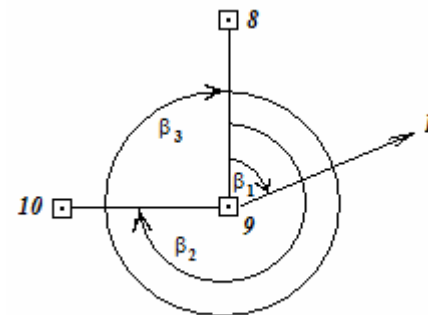


Рис. 3

Теодолит установлен в пункте 9. Требуется измерить левые по ходу углы между пунктами 8, В, 10.

Порядок измерения.

1. Производятся подготовительные работы для измерения углов.
2. При круге лево, наводят визирную ось зрительной трубы на визирную цель задней по ходу марки (8), которую принимают за начальное направление.
3. Устанавливают лимб и оптический микрометр на отсчет близкий к нулю. (Сначала вращением барабанчика оптического микрометра устанавливают отсчет по шкале последнего чуть больше нуля, затем вращением рукоятки фрикционного винта перестановки лимба тщательно совмещают изображения штрихов противоположных краев лимба 0 и 180°. Точное совмещение выполняют дополнительным установочным винтом, который полузакрывает защитным кожухом [для теодолита ЗТ2КП])

4. После этого барабанчиком микрометра штрихи разводят, после чего выполняют точное совмещение штрихов лимба и производят отсчет (первое совмещение), который записывают в журнал (см. таблица 6). *Рекомендуется окончательное совмещение штрихов выполнять по ходу часовой стрелки – на ввинчивание, чтобы исключить механический люфт микрометра.*
5. Барабаном микрометра разводят совмещенные штрихи, затем вновь выполняют точное совмещение (второе совмещение), производят отсчет и вновь записывают в журнал. *Разность двух отсчетов не должна превышать 2".*
6. Открепляют алидаду и направляют зрительную трубу в сторону ближайшей визирной цели по ходу часовой стрелки (В). Выполняют точное визирование, после чего снимают отсчеты по шкаловому микрометру при двух совмещениях. Отсчеты записывают в журнал.
7. Пункт 6 выполняют по отношению к третьей визирной цели (10).
8. Затем, наводят зрительную трубу на первую визирную цель (8) – производят “замыкание горизонта”. При двух совмещениях производят отсчеты и записывают их в журнал.

На этом заканчиваются измерения в первом полуприеме.

Повторное наведение на первую визирную цель (“замыкание горизонта”) производится для того, чтобы установить, сохранил ли лимб в процессе измерений неподвижное положение. Допуск на “замыкание горизонта” ≤ 8".

После перевода зрительной трубы через зенит, при круге право КП, производят измерения второго полуприема в описанном выше порядке. При этом, визирные цели выбираются в обратном порядке – 8, 10, В, 8.

Для последующих приемов выполняется переустановка начального отсчета в соответствии с (3).

самого приемопередатчика – 4.6 кг. Прибор измерял линии от 2 метров до 2 километров с средней квадратической погрешностью 2 сантиметра. Данный прибор сразу завоевал широкую популярность у топографов и геодезистов.

Классификация светодальномеров.

С появления светодальномеров, все они, по точности, условно разделяли на три группы – *большие, средние и малые.*

- *К большим* относят светодальномеры предназначенные для измерения расстояний 25 – 30 и более километров, с относительной погрешностью не менее чем 1:300000. Такими приборами измеряют базисные стороны триангуляции, полигонометрии 1 и 2 классов.
- *К средним* относились светодальномеры для измерения линий 10 – 12 километров, с относительной погрешностью измеряемых линий 1:50000 – 1:100000. Данные приборы предназначались для построения геодезических сетей 3 и 4 классов.
- *К малым (или топографическим)* относились светодальномеры для измерения расстояний от 2 до 5 километров, с относительной погрешностью измеряемых линий не менее чем 1:25000. Данные приборы используются для развития и сгущения сетей полигонометрии 4 класса, 1 и 2 разрядов, а так же на других топографо-геодезических работах.

Принцип определения расстояний светодальномерами.

По методу определения расстояния светодальномеры делятся на две группы:

1) Временной (импульсный) метод измерения расстояний.

Импульсный метод измерения расстояний основан на измерении времени прохождения сигнала от приемопередающего устройства до объекта и обратно, когда в качестве отражателя используется отражательная способность объекта. Зная скорость распространения электромагнитных волн v , можно определить расстояние, как

$$S = v \cdot \tau / 2 ,$$

где

Светодальномерная полигонометрия.

До недавнего времени наиболее трудоемким процессом в геодезии было измерение расстояний. В зависимости от требуемой точности расстояния измерялись

- Рулеткой
- Мерной лентой
- Длинномерными механическими приборами
- Оптическими дальномерными насадками
- Параллактическим методом
- Проволокой

Примерно в середине 20 века появились первые топографические светодальномеры.

В момент их появления, светодальномерам трудно было конкурировать в топографии с традиционными способами измерения расстояний, ввиду их громоздкости (*комплект одного из первых топографических светодальномеров – СТ65 весил 70 кг, а масса самого приемопередатчика составляла 31 кг*) и сложности управления. Кроме этого, первые светодальномеры измеряли не само расстояние, а разность фаз посылаемых сигналов от приемо-передающего устройства до активного отражателя, а принимали модулированные сигналы. Разности фаз записывались в специальные журналы. После чего, требовалась камеральная обработка измерений с целью вычисления расстояний.

В топографии, первые светодальномеры, почти не находили применения. Длины измеряемых линий, как правило, редко превышали 150-200 метров, а измерение линии такой длины традиционными на то время способами по скорости в десятки раз превосходило светодальномерные измерения.

В 1976 году появился светодальномер 2СМ2, топографический дальномер, который уже имел счетный блок для непосредственного, быстрого вычисления расстояний. Вес комплекта данного светодальномера составлял 30 кг, а вес

Пример записи первого приема приведен в таблице 7.

В каждом приеме выполняются следующие вычисления:

1. В графе 6 вычисляют средние значения из первого и второго совмещения по каждому направлению.
2. В графе 7 находят величину двойной коллимационной ошибки $2C$. Постоянство величины $2C$ (колебания ее) допускается в пределах $\pm 12''$ и служит показателем качества измерений. Если $2C$ в приеме остается постоянной – качество измерений хорошее.
3. В графе 8 вычисляют среднее значение направления вычисленных в графе 6.
4. В графе 9 вычисляют приведенные к общему нулю направления. Для этого определяют незамыкания горизонта $\Delta_{кл}$, $\Delta_{кп}$, и $\Delta_{ср}$ как разность конечного и начального направлений.
5. Величина $\Delta_{ср}$ контролируется по следующему

$$\text{правилу } \Delta_{ср} = \frac{\Delta_{кл} + \Delta_{кп}}{2} .$$

Таблица 7

Журнал измерения углов способом круговых приемов.

Пункт 9.

Прием I.

1 ноября 2007 года. Погода: ясно, ветер слабый

Видимость: хорошая

Наблюдатель: Степанов П.Г.

Вычислитель: Сержантова Р.А.

пункте, где были определены элементы центрировки. Поправки за редукцию r'' вводятся в направления, измеренные на других пунктах и идущие на тот пункт, на котором определялись элементы редукции.

№ ст	направление	Круг	Отсчет ° ' "	Отсчеты по микрометру "		a_{cp} "	2С	$\frac{КЛ+КП}{2}$	Значение угла	
				a_1	a_2					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
I 9	8	Л	0 01	0 8.3	09.2	08.8	-18.2	01 17.9 0.0	00 00 00.0	
		П	180 01	26.0	28.0	27.0				
	В	Л	76 09	29.8	31.0	30.4	-18.2	09 39.5 -0.4	76 08 21.2	
		П	256 09	48.1	49.0	48.6				
	10	Л	270 08	39.6	40.9	40.2	-14.3	08 47.9 -0.8	270 07 29.2	
		П	90 08	54.0	55.0	54.5				
	8	Л	0 01	0.5	10.0	10.2	-17.8	01 19.1 -1.2	—————	
		П	180 01	7.0	29.0	28.0				
	Замыкание горизонта									
				$\Delta_{кп} =$	+1.4	$\Delta_{кп} =$	+1.0	$\Delta_{cp} =$	+1.2	

Если $\Delta_{cp} > 0$, то требуется распределение невязки за “не замыкание горизонта” с обратным знаком на все направления, пропорционально их номерам. Поправки в средние направления вычисляют по формуле:

$$\sigma_i = \frac{-\Delta_{cp}}{n'}(i-1) \quad (4);$$

где n' – число направлений;
 i - порядковый номер направления.

$$c'' = \rho'' \frac{l \sin(M + \theta)}{s} \quad (140)$$

Для вывода формулы поправки за редукцию визирной цели рассмотрим *рис. 24(б)*, где C — центр пункта, V — проекция оси визирной цели и C_1 — некоторый пункт, на котором измерено от начального направления направление M_1 на пункт C . За счет редукции визирной цели l_1 в направление M_1 должна быть введена поправка r . Для определения r можно с достаточной степенью точности принять угол PVC_1 равным измеренному на пункте C_1 углу M_1 на пункт C .

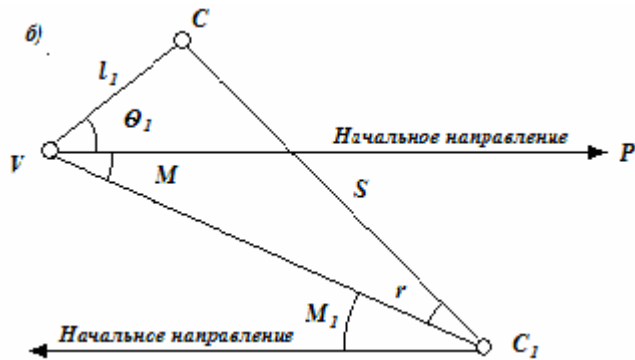


рис. 24 (б)

Тогда из решения треугольника VC_1C имеем

$$\sin r = \frac{l_1}{s} \sin(M + \theta_1) \quad (141)$$

или

$$r'' = \rho'' \frac{l_1 \sin(M + \theta_1)}{s} \quad (142)$$

При принятом правиле отсчетов углов θ и θ_1 , поправки c'' и r'' алгебраически суммируются с направлениями. Поправка c'' за центровку вводится в направления, измеренные на том

Значения приведенных к общему нулю направлений получают, вычитая среднее значение первого направления из каждого последующего, исправленного за поправку σ_i

Колебания направлений в отдельных приемах не должно превышать $\pm 8''$. В случае несоблюдения данного допуска прием вычеркивается и переделывается. Прием переделывается при той же установке начального направления. Вся программа измерения углов переделывается полностью в том случае, если количество переделываемых приемов $\geq 30\%$.

Окончательное значение направлений получают как среднее арифметическое из направлений, измеренных в отдельных приемах.

Оценка точности угловых измерений.

а) В одиночном полигонометрическом ходе оценка точности состоит в получении СКП собственно измерения угла m'_β , которую вычисляют

а) по уклонениям v_β отдельных приемов от среднего

$$m'_\beta = \sqrt{\frac{\sum v_\beta^2}{k(n' - 1)}} \quad (5);$$

где n' - число приемов измерений;

k - число пунктов хода, на которых производились измерения.

б) По разности d_β между приемами

$$m'_\beta = \sqrt{\frac{\sum d_\beta^2}{n'}} \quad (6).$$

При вычислении значений m'_β по приведенным формулам не учитываются погрешности центрирования, редукции и погрешности связанные с внешними условиями. Поэтому

погрешность m'_β , вычисленная по приведенным формулам, будет примерно в два раза меньше полной средней квадратической погрешности угла m_β .

Средняя квадратическая погрешность самой погрешности измеренного угла m_β , вычисленная по формуле 5 и 6 определяется по формуле

$$m_{m\beta} = \frac{m'_\beta}{\sqrt{2k(n'-1)}} \quad (7).$$

Пример В полигонометрическом ходу 4 класса измерено 5 углов 6 приемами каждый. Для измерения углов использовался теодолит 3Т2КП. Вычислить среднюю квадратическую погрешность собственно измерения угла по уклонениям каждого приема от их средних значений.

Таблица 8

N n/n	v''	v ²	N n/n	v''	v ²
1	-0.5	0.25	16	-2.3	5.39
2	+1.5	2.25	17	0.0	0.00
3	-1.0	1.00	18	+2.3	5.39
4	-2.5	6.25	19	-0.2	0.04
5	+1.0	1.00	20	-0.3	0.09
6	+1.5	2.25	21	+0.6	0.36
7	-2.0	4.00	22	+0.3	0.09
8	0.0	0.00	23	+1.2	1.44
9	+2.0	4.00	24	-1.5	2.25
10	-1.0	1.00	25	+3.0	9.00
11	-2.4	5.86	26	-0.5	0.25
12	+3.4	11.56	27	-2.0	4.00
13	+3.3	10.89	28	-2.5	6.25
14	-2.4	5.86	29	+1.0	1.00
15	-0.9	0.81	30	+1.0	1.00
				$\Sigma=0.1$	$\Sigma=93.53$

$$m'_\beta = \sqrt{\frac{93.53}{5(6-1)}} = 1.93'' ; \quad m_{m\beta} = \frac{0.79}{\sqrt{2 \times 5(6-1)}} = 0.27''.$$

Чтобы ориентировать элементы приведения и контроля правильности прочерчивания направлений, из точек J и V прочерчивают направления на начальный пункт и еще на один из наблюдаемых пунктов. Эти углы измеряют транспортиром, они могут отличаться от соответствующих углов, измеренных на пункте, на $1-2^\circ$.

Зная элементы приведения l, θ и l_1, θ_1 , можно вычислить соответственно поправки за центрировку и редукцию.

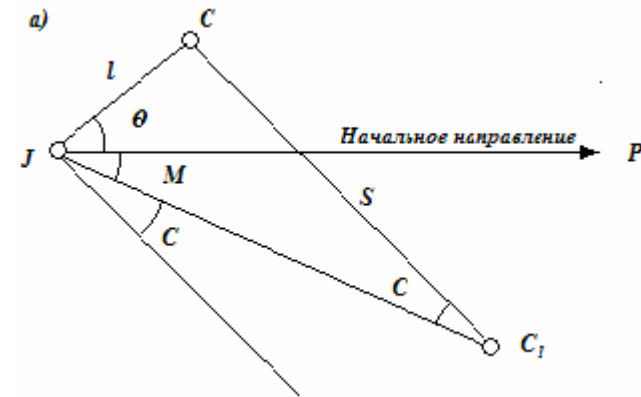


рис. 24 (a)

На рис. 86(a) изображены центр пункта C , проекция оси прибора J и пункт C_1 , на который измерен угол M от начального направления, s — расстояние между пунктами C и C_1 . Вследствие ошибки за центрировку в угол M должна быть введена поправка c , значение которой найдем из решения треугольника JCC_1 :

$$\sin c = \frac{l}{s} \sin(M + \theta) \quad (139),$$

так как угол c мал, выразим его в секундах дуги

Для вычисления поправки за центрировку на каждом пункте надо знать расстояние l и угол θ между направлением этой линии и начальным направлением на пункте. Угол θ и l — элементы центрировки. Для вычисления поправки за редукцию надо знать l_1 и θ_1 (рис. 23, б). Элементы центрировки и редукции называются **элементами приведений**. Углы θ и θ_1 при точках J и V отсчитывают от направления на центр пункта C по ходу часовой стрелки до начального направления.

Элементы приведения определяют обычно графическим способом. Этот способ состоит в том, что центр пункта C , точку стояния прибора J и вершину оси симметрии визирного цилиндра V проектируют при помощи теодолита на лист бумаги, который называют центрировочным листом. Центрировочный лист укрепляют на специальном центрировочном столике или мензуре, устанавливаемых над центром знака. Лист бумаги ориентируют при помощи буссоли по линии «север—юг». Затем наблюдатель с трех установок теодолита, последовательно наводя зрительную трубу на центр пункта C , точку стояния прибора J и вершину оси симметрии визирного цилиндра V , с помощью своего помощника отмечает на центрировочном листе следы пересекающихся плоскостей, в пересечении которых находятся проекции искомых точек C , J и V .

Для каждой из проектируемых точек все три следа должны были бы пересечься в одной точке. Однако вследствие ошибок проектирования получаются треугольники погрешностей. Размеры сторон треугольника 0,5—1 см считаются допустимыми, и в каждом из них на глаз намечают центр, который и считают за проекцию соответствующей точки.

Установки теодолита выбирают таким образом, чтобы проектирующие плоскости пересекались между собой под углом, близким к 120° , а само проектирование выполняется при двух положениях трубы. Устанавливать теодолит надо на расстоянии, не меньшем полуторной высоты знака, с тем, чтобы ослабить остаточное влияние наклона оси трубы при визировании на высоко расположенные точки J и V на отклонение визирных плоскостей от отвесного положения.

б) В системе ходов Предварительную оценку точности угловых измерений можно выполнить по приведенным выше формулам. Окончательную оценку точности выполняют по угловым невязкам ходов или полигонов, а так же по поперечным невязкам вытянутых ходов.

а) Если известны угловые невязки f_β по N ходам или полигонам, то среднюю квадратическую погрешность угла определяют по формуле 8

$$m_{I\beta} = \sqrt{\frac{f_\beta^2}{n}} \quad (8);$$

где

n - число углов в каждом ходе или полигоне.

Среднюю квадратическую погрешность самой погрешности измерения углов находят по формуле 9

$$m_{Im_\beta} = \frac{m_{\beta I}}{\sqrt{2N}} \quad (9).$$

Пример Вычислить среднюю квадратическую погрешность измерения угла по угловым невязкам 8 ходов (таблица 9).

Таблица 9

N хода	n	f_β	$\frac{f_\beta^2}{n}$
1	11	-6.0	3.3
2	17	+5.2	1.6
3	16	+12.3	9.4
4	13	+9.8	7.4
5	16	+4.2	1.1
6	16	+9.0	5.1
7	13	-6.5	3.2
8	12	-1.1	0.1
			$\Sigma=31.2$

$$m_{I\beta} = \sqrt{\frac{31.2}{8}} = 1.97'' \quad ; \quad m_{Im\beta} = \frac{1.97}{\sqrt{16}} = 0.49'' .$$

б) Если известны поперечные невязки по N вытянутым ходам, то среднюю квадратическую погрешность угла определяют по формуле 10 и 11

$$m_{II\beta} = \sqrt{\frac{C\left(\frac{u}{L}\rho''\right)^2}{N}} \quad (10),$$

или

$$m_{III\beta} = \sqrt{\frac{C'\left(\frac{u'}{L}\rho''\right)^2}{N}} \quad (11),$$

где

u - поперечные невязки вытянутых ходов, вычисленные по углам, исправленным за угловую невязку;

u' - поперечные невязки вытянутых ходов, вычисленные по неисправленным за угловую невязку углам;

$$C = \frac{12n}{(n+1)(n+2)} \approx \frac{12}{n+3}$$

$$C' = \frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \approx \frac{3}{n+1.5}$$

Поперечная невязка u вычисляется по формуле:

центр знака. Для этого на сигналах проектируют положение центра пункта C на столик для прибора в точку J (рис. 85, а) Но установить прибор точно над центром не всегда возможно. Это может быть из-за того, что столик может сместиться в сторону от отвесной линии, проходящей через центр вследствие, например, деформации конструкции деревянного сигнала от воздействия влаги и солнечных лучей, или из-за того, что детали сигнала загораживают нужное направление. В этих случаях возникает необходимость в приведении измеренных углов к центру знака, с которого велись наблюдения, что достигается введением поправок за внецентренную установку прибора. Эти поправки называются поправками за центрировку.

Для вычисления указанных поправок необходимо определить взаимное положение в одной горизонтальной плоскости проекции центра пункта C , вертикальной оси прибора J и оси визирного цилиндра V (см. рис. 23, а), а также ориентировку соединяющих их линий относительно измеренных на пункте направлений.

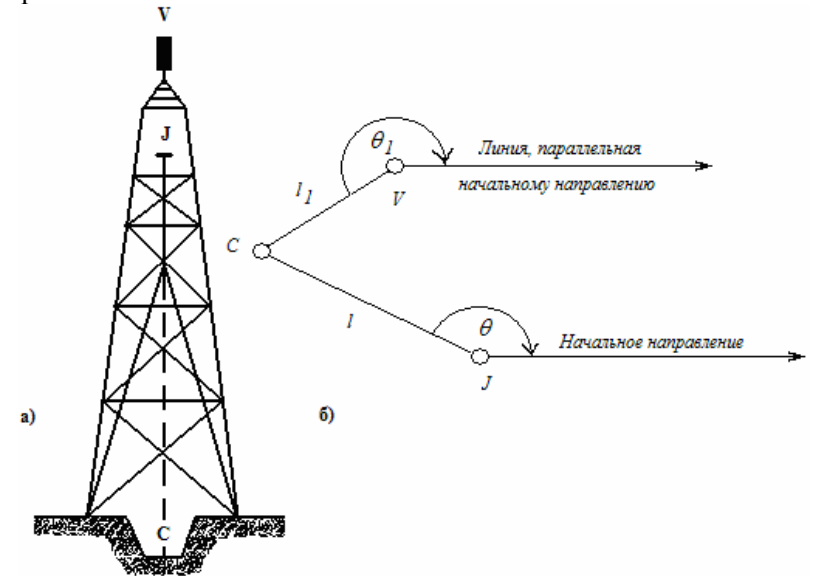


рис. 23

4. Контроль вычислений.

Контролем вычислений служит вычисление угла β_5 через разность дирекционных углов направлений P2P1 и P2T3.

А) определение дирекционного угла α_{P2P1}

$$\alpha_{P2P1} = \arctg \frac{Y_{P1} - Y_{P2}}{X_{P1} - X_{P2}}$$

$$\alpha_{P2P1} = 302^\circ 10' 58.8''$$

Б) определение дирекционного угла α_{P2T3}

$$\alpha_{P2T3} = \arctg \frac{Y_{T3} - Y_{P2}}{X_{T3} - X_{P2}}$$

$$\alpha_{P2T3} = 76^\circ 35' 47.3''$$

В) вычисление β_5

$$\beta_{5 \text{ выч}} = \alpha_{P2T3} + 360^\circ - \alpha_{P2P1} = 134^\circ 24' 48.5''$$

$$\beta_{5 \text{ изм}} = 134^\circ 24' 45''$$

Разность измеренного и вычисленного угла составила $3.5''$, что соответствует точности измерений угла полигонометрии IV класса.

Определение поправок за центрировку и редукцию и учёт их при привязках

В измеренные углы, с помощью которых осуществляется привязка, необходимо вводить поправки — за центрировку и редукцию.

Результаты измерения углов должны быть отнесены к центрам пунктов. При постройке геодезических знаков проекция оси визирного цилиндра должна быть совмещена с центром знака. Однако вследствие ряда причин визирные цилиндры могут сместиться немного в сторону и при наблюдении на них измеренные углы будут отличаться от углов между направлениями, проходящими через центры этих пунктов. Для приведения измеренных углов к центрам знаков вводят поправки за редукцию.

При измерении углов на пунктах триангуляции стараются совместить ось прибора с отвесной линией, проходящей через

$$u = \frac{f_y [\Delta x] - f_x [\Delta y]}{L} \quad (12)$$

где

L - длина замыкающей хода

$$L = \sqrt{\sum \Delta x^2 + \sum \Delta y^2}$$

u' связана с u следующим соотношением:

$$u' = u + \frac{f_\beta}{2\rho''} \times \frac{L}{2}$$

В случае, если влияние погрешностей исходных данных на величины невязок ничтожны по сравнению с влиянием погрешностей полевых измерений, то формулы 8,10, 11 дадут близкие между собой значения m_β , которые действительно характеризуют точность угловых измерений.

В случае, если влияние погрешностей исходных данных будет заметным, результаты вычислений по формулам 8, 10 и 11 дадут преувеличенные и не согласующиеся между собой результаты. Причем наибольшее отличие от истинных результатов даст формула 10, как наиболее чувствительная к погрешностям исходных данных, а наименьшее — формула 8, значение которой принимают за наиболее близкую к истинной величине.

3 Привязочные работы в полигонометрии

Значение и виды привязок. Общие положения.

Привязка – это особый вид работ, позволяющий получить в процессе измерений дирекционный угол, расстояние или координаты определяемой точки по отношению к пунктам государственной геодезической сети (ГГС).

Привязку к пунктам геодезической сети можно произвести различными способами в зависимости от расположения этих пунктов по отношению к определяемым точкам.

Наиболее простая привязка - это непосредственное примыкание хода к пунктам ГГС более высокого класса, с возможностью измерения примычных углов между пунктами ГГС и сторонами полигонометрического хода (в дальнейшем будем называть такой вид привязки - *азимутальная*).

Если имеется возможность непосредственной привязки хода к пунктам ГГС, но отсутствует возможность выполнить измерения примычных углов (утрачены ориентирные пункты, нет прямой видимости между пунктами ГГС), то такую привязку будем называть *координатной*.

Если непосредственная привязка к пункту ГГС невозможна, то в этом случае используют особые способы привязок, позволяющие определить неизвестные параметры (координаты, расстояния, дирекционные углы, высоты). Такие измерения, выполняемые для определения отдельных координат точек местности с использованием пунктов геосети, называют *засечками*.

В привязочных работах очень часто приходится определять неприступные расстояния. Для этого используют стандартные построения и математические зависимости известные из тригонометрии – теоремы синусов и косинусов.

Для вычисления дирекционных углов и расстояний практически всегда используется обратная геодезическая задача, для определения приращений координат – прямая геодезическая задача.

Непосредственная привязка к пунктам ГГС

Самым простым способом привязки является непосредственное примыкание теодолитного или полигонометрического хода к пунктам триангуляции или полигонометрии высшего класса с возможностью измерения примычных углов (*азимутальная привязка*).

3. Вычисление истинных координат точек P₁ и P₂.

Для этого необходимо определить истинный дирекционный угол направления T₁T₂ – α_{T₁T₂} и истинные дирекционные углы направлений T₁P₁, T₁P₂, T₂P₁ и T₂P₂.

Из треугольника T₁P₁T₂:
И из треугольника T₂P₂T₁:

$$\begin{aligned} X_{T_1} &= 5186.006 & X_{T_2} &= 3104.924 \\ Y_{T_1} &= 5320.088 & Y_{T_2} &= 7302.548 \\ \alpha_{T_1P_1} &= 197^\circ 27' 31.7'' & \alpha_{T_1P_2} &= 165^\circ 25' 13.7'' \\ \alpha_{T_2P_1} &= 265^\circ 28' 17.7'' & \alpha_{T_2P_2} &= 223^\circ 3' 14.7'' \end{aligned}$$

Вычисление координат P₁ в заданной системе координат

Формула	Результат вычисл.	Формула	Результат вычисл.
Y _{P2}	7302.548	X _{P2}	3104.924
-Y _{P1}	5320.088	-X _{P1}	5186.006
+X _{P1} *tg(α _{T1P1})	1631.044	Y _{P1} *ctg(α _{T1P1})	16915.547
-X _{P2} *tg(α _{T1P2})	39203.325	-Y _{P2} *ctg(α _{T1P2})	578.366
Summa 1	-35589.821	Summa 1	14256.100
tg(α _{T1P1})	0.31450877	ctg(α _{T1P1})	3.17956157
-tg(α _{T1P2})	12.62617864	-ctg(α _{T1P2})	0.07920053
Summa 2	-12.3116698	Summa 2	3.10036104
X_{P1}	2890.739	Y_{P1}	4598.206

Вычисление координат P₂ в заданной системе координат

Формула	Результат вычисл.	Формула	Результат вычисл.
Y _{P2}	7302.548	X _{P2}	3104.924
-Y _{P1}	5320.088	-X _{P1}	5186.006
+X _{P1} *tg(α _{T2P1})	-1348.874	Y _{P1} *ctg(α _{T2P1})	-20454.110
-X _{P2} *tg(α _{T2P2})	2900.874	-Y _{P2} *ctg(α _{T2P2})	7816.215
Summa 1	-2267.288	Summa 1	-30351.408
tg(α _{T2P1})	-0.26009872	ctg(α _{T2P1})	-3.84469399
-tg(α _{T2P2})	0.93428184	-ctg(α _{T2P2})	1.07034083
Summa 2	-1.19438056	Summa 2	-4.91503482
X_{P2}	1898.296	Y_{P2}	6175.217

Вычисление координат T_1' в условной системе координат

Формула	Результат вычисл.	Формула	Результат вычисл.
Y'_{P2}	10000.000	X'_{P2}	0.000
$-Y'_{P1}$	0.000	$-X'_{P1}$	0.000
$+X'_{P1} \cdot \text{tg}(\alpha'_{P1T1})$	-0.000	$Y'_{P1} \cdot \text{ctg}(\alpha'_{P1T1})$	-0.000
$-X'_{P2} \cdot \text{tg}(\alpha'_{P2T1})$	-0.000	$-Y'_{P2} \cdot \text{ctg}(\alpha'_{P2T1})$	-9402.949
Summa1	10000.000	Summa1	9402.949
$\text{tg}(\alpha'_{P1T1})$	-0.26279596	$\text{ctg}(\alpha'_{P1T1})$	-3.80523359
$-\text{tg}(\alpha'_{P2T1})$	-1.06349612	$-\text{ctg}(\alpha'_{P2T1})$	-0.94029492
Summa2	0.80070016	Summa2	-2.86493867
X'_{T1}	12489.070	Y'_{T1}	-3282.077

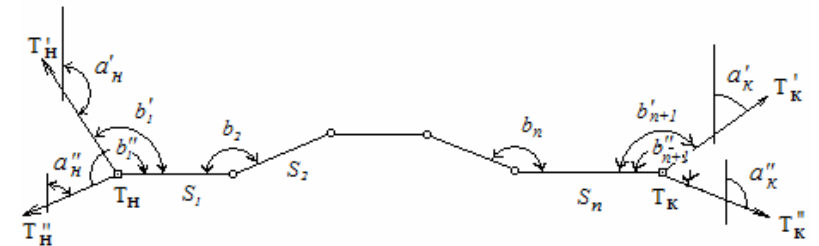


рис. 4

Если известны координаты пунктов T_n и T_k (рис. 4), из которых видны пункты государственной геодезической сети T'_n, T''_n, T'_k, T''_k , то на пункте T_n необходимо измерить примычные углы b'_i и b''_i , а на пункте T_k — углы b'_{n+1} и b''_{n+1} . Вычислив по координатам пунктов $T_n, T'_n, T''_n, T_k, T'_k, T''_k$

дирекционные углы $\alpha'_n, \alpha''_n, \alpha'_k, \alpha''_k$ сторон $T'_n T_n, T''_n T_n, T'_k T_k, T''_k T_k$ (обратная геодезическая задача), можно передать дирекционные углы на стороны хода S_i и S_n . Этот способ привязки дает надежный контроль, так как разность примычных углов b'_i и b''_i, b'_{n+1} и b''_{n+1} должна равняться разности дирекционных углов α'_n и α''_n, α'_k и α''_k .

Далее, дирекционные углы передаются на стороны хода обычным порядком, по известному алгоритму. После чего ход уравнивается (вычисляются рабочие координаты).

Вычисление координат T_2' в условной системе координат

Формула	Результат вычисл.	Формула	Результат вычисл.
Y'_{P2}	10000.000	X'_{P2}	0.000
$-Y'_{P1}$	0.000	$-X'_{P1}$	0.000
$+X'_{P1} \cdot \text{tg}(\alpha'_{P1T2})$	0.000	$Y'_{P1} \cdot \text{ctg}(\alpha'_{P1T2})$	0.000
$-X'_{P2} \cdot \text{tg}(\alpha'_{P2T2})$	0.000	$-Y'_{P2} \cdot \text{ctg}(\alpha'_{P2T2})$	52070.643
Summa1	10000.000	Summa1	-52070.643
$\text{tg}(\alpha'_{P1T2})$	1.34104653	$\text{ctg}(\alpha'_{P1T2})$	0.74568628
$-\text{tg}(\alpha'_{P2T2})$	0.19204679	$-\text{ctg}(\alpha'_{P2T2})$	5.20706427
Summa2	1.14899973	Summa2	-4.46137798
X'_{T2}	8703.222	Y'_{T2}	11671.426

2. Вычисление условного дирекционного угла α'_{T1T2} и ИСКОМЫХ УГЛОВ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$

(Искомые углы находят как разность соответствующих дирекционных углов.)

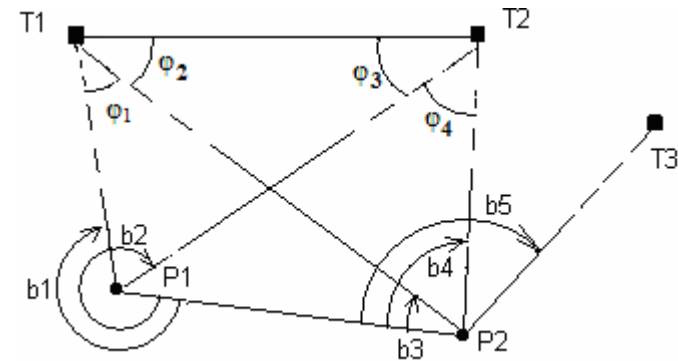
$$\begin{aligned} \alpha'_{T1T2} &= 104^\circ 12' 26.3'' \\ \varphi_1 &= 32^\circ 2' 18.0'' \\ \varphi_2 &= 29^\circ 1' 48.7'' \\ \varphi_3 &= 50^\circ 55' 7.3'' \\ \varphi_4 &= 42^\circ 25' 3.0'' \end{aligned}$$

Пример вычисления рабочих координат полигонометрического хода с непосредственной привязкой к пунктам геосети (азимутальная привязка).

N	Betta	alfa	S	dx	dy	X	Y
Пn1	° ' "	° ' "					
		113 28 37,0					
Пn2	181 05 47,0					10901,025	7050,4
		114 34 25,0	552,007	-229,559	502,01		
1.	247 51 8,1					10671,478	7552,424
		182 25 34,1	565,338	-564,831	-23,932		
2.	156 32 34,9					10106,66	7528,507
		158 58 10,0	339,025	-316,442	121,665		
3.	139 20 10,9					9790,225	7650,179
		118 18 21,8	400,408	-189,866	352,530		
4.	157 18 32,0					9600,368	8002,719
		95 36 54,8	356,831	-34,915	355,119		
5.	170 06 59,2					9565,46	8357,847
		85 43 55,0	372,263	27,705	371,231		
6.	179 59 40,8					9593,173	8729,087
		85 43 36,8	348,716	25,983	347,747		
Пn3	253 30 32,2					9619,164	9076,842
		159 14 10,0					
Пn4							
$\Sigma\beta$	1485 45 25,1	$\Sigma S =$	2934,588	$\Sigma\Delta x =$	-1281,925	$\Sigma\Delta y =$	2026,370
$\Sigma\beta_m$	1485 45 33,0			$\Delta x_{теор} =$	-1281,861	$\Delta y_{теор} =$	2026,442
$f_{\beta} =$	-7,9"			$f_x =$	-0,064	$f_y =$	-0,072
f_l	14,1"			$f_s =$	0,097		
				$\frac{f_s}{\Sigma S} =$	$\frac{1}{30279}$		

В ряде случаев ход не удастся привязать к исходным направлениям. Например, когда на исходном пункте отсутствует видимость с земли на соседние пункты, наружные знаки пришли

Пример решения задачи Ганзена.



Исходные данные

Пункт	x	y
T1	5186.006	5320.088
T2	3104.924	7302.548
T3	2292.775	7830.615

N/N	betta
b1	255°16' 33"
b2	323°17' 19"
b3	43°14' 15"
b4	100°52' 16"
b5	134°24' 45"

1. Определение координат п. T'1 и T'2 в условной системе координат

Пункт T1
 Пункт T2
 из треугольника T1P1P2 и треугольника T2P2P1:

$$\begin{aligned}
 X'_{p1} &= 0.000 & X'_{p2} &= 0.000 \\
 Y'_{p1} &= 0.000 & Y'_{p2} &= 10000.000 \\
 \alpha'_{P1T1} &= 345^\circ 16' 33.0'' \\
 \alpha'_{P1T2} &= 53^\circ 17' 19.0'' \\
 \alpha'_{P2T1} &= 313^\circ 14' 15.0'' \\
 \alpha'_{P2T2} &= 10^\circ 52' 16.0''
 \end{aligned}$$

При таком определении координат точек P и Q возможные промахи в измерениях или в выписке исходных данных обнаружены не будут. Поэтому с целью проверки правильности определения координат точек P и Q по крайней мере на одной из них должно быть измерено добавочное направление на третий исходный пункт T_3 и дважды определен дирекционный угол (QT_3)

$$(QT_3) = (QT_1) + (\beta_3 - \beta_1) \quad (139),$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(QT_1) &= \frac{y_1 - y_Q}{x_1 - x_Q} \\ \operatorname{tg}(QT_3) &= \frac{y_3 - y_Q}{x_3 - x_Q} \quad (140). \end{aligned}$$

Точность определения координат искомой пары точек зависит главным образом от величины углов четырехугольника, образованного двумя данными и двумя искомыми точками. Наибольшая точность получается тогда, когда образованный четырехугольник по своей форме близок к квадрату.

При выполнении привязки данным способом, необходимо делать абрис, на котором нужно указать, как измерялись углы.

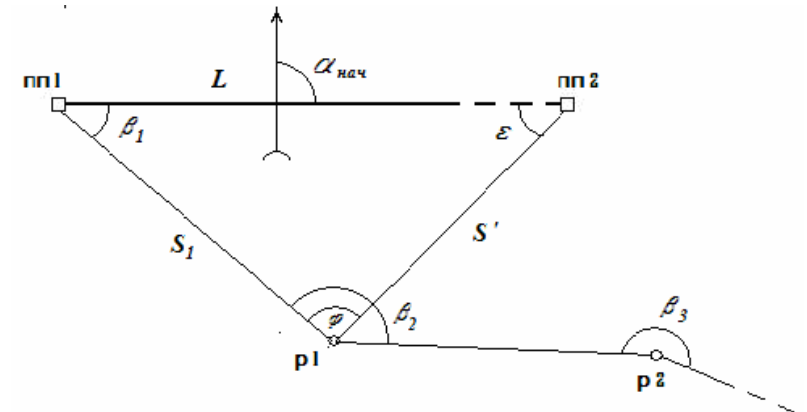
в ветхость, а центры на ориентирных пунктах потеряны. В таких случаях используют особые способы привязки.

Координатная привязка

Возможны два варианта координатной привязки:

1. На местности имеется исходный пункт привязки и ориентирные пункты, на которые отсутствует прямая видимость;
2. На местности имеются пункты привязки, но отсутствуют ориентирные пункты.

Вариант 1.



Предположим, что от пункта полигонометрии $nn1$ необходимо проложить ход ($nn1, p1, p2 \dots$ и т.д.). Однако, в силу каких либо причин (построили дом, вырос лес и т.д.) видимость с пункта $nn1$ на пункт $nn2$ отсутствует. Выполнить непосредственную привязку (измерить примычный угол β_1) не представляется возможным.

В данном случае выполняется простейшая линейно-угловая засечка, в результате решения которой, аналитически вычисляется примычный угол β_1 на точку хода.

Для решения данной задачи, на пункты $nn1$ и $nn2$ устанавливаются штативы с визирными целями. На местности, выбирается точка хода $p1$, с которой имеется прямая видимость на пункт привязки $nn1$ и пункт ориентирования $nn2$. Точка $p1$

закрепляется на местности. Над точкой устанавливается прибор – теодолит или тахеометр – и измеряются:

- угол φ
- расстояния S_I и S'

Решение засечки сводится к решению треугольника $p1nn1nn2$, из которого находится угол β_I . Для решения треугольника используется теорема синусов.

$$\frac{\sin \beta_1}{S'} = \frac{\sin \varepsilon}{S_1} = \frac{\sin \varphi}{L}$$

Для решения треугольника с использованием теоремы синусов необходимо определить

расстояние L , между исходным пунктом $nn1$ и пунктом ориентирования $nn2$. Возможны два случая:

1. Пункт $nn2$ имеет координаты. Тогда расстояние L вычисляется из обратной геодезической задачи

$$L = \sqrt{(x_{nn2} - x_{nn1})^2 + (y_{nn2} - y_{nn1})^2};$$

2. Пункт $nn2$ не имеет координат, дирекционный угол с $nn1$ на $nn2$ определен из астрономических наблюдений. Тогда, для определения расстояния L используем теорему косинусов: $L = S_1^2 + S'^2 - 2S_1 S' \cos \varphi$.

Вычислив L , используем теорему синусов для вычисления углов β_I и контрольного угла ε .

$$\frac{\sin \beta_1}{S'} = \frac{\sin \varphi}{L}$$

Из данного выражения находим угол β_I :

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{S' \sin \varphi}{L}\right).$$

Для контроля находят угол ε :

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{S_1 \sin \varphi}{L}\right).$$

Аналогично находят углы φ_2 и ψ_2 .

В отыскании углов $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ при точках T_1 и T_2 и состояла цель введения условных координат.

5. Вычисление истинных дирекционных углов с точек T_1 и T_2 на определяемые точки P и Q

По истинным координатам точек T_1 и T_2 определим дирекционный угол (T_1T_2) из решения обратной геодезической задачи, после чего вычислим все дирекционные углы, образуемые направлениями с точек T_1 и T_2 на точки P и Q :

$$\begin{aligned} \alpha_{T_1P} &= (T_1T_2) + \varphi_1 \\ \alpha_{T_1Q} &= (T_1T_2) + \varphi_2 \\ \alpha_{T_2P} &= (T_1T_2) - 180 - \psi_1 \\ \alpha_{T_2Q} &= (T_1T_2) - 180 - \psi_2 \end{aligned}$$

6. Вычисление истинных координат определяемых точек P и Q

По действительным координатам точек T_1 и T_2 найдем искомые координаты точки P из треугольника T_1T_2P :

$$\begin{aligned} X_P &= \frac{Y_{T_1} - Y_{T_2} + X_{T_2} \operatorname{tg}(\alpha_{T_2P}) - X_{T_1} \operatorname{tg}(\alpha_{T_1P})}{\operatorname{tg}(\alpha_{T_2P}) - \operatorname{tg}(\alpha_{T_1P})} \\ Y_P &= \frac{X_{T_1} - X_{T_2} + Y_{T_2} \operatorname{ctg}(\alpha_{T_2P}) - Y_{T_1} \operatorname{ctg}(\alpha_{T_1P})}{\operatorname{ctg}(\alpha_{T_2P}) - \operatorname{ctg}(\alpha_{T_1P})} \end{aligned}$$

Координаты точки Q можно найти из треугольника T_1T_2Q

$$\begin{aligned} X_P &= \frac{Y_{T_1} - Y_{T_2} + X_{T_2} \operatorname{tg}(\alpha_{T_2Q}) - X_{T_1} \operatorname{tg}(\alpha_{T_1Q})}{\operatorname{tg}(\alpha_{T_2Q}) - \operatorname{tg}(\alpha_{T_1Q})} \\ Y_P &= \frac{X_{T_1} - X_{T_2} + Y_{T_2} \operatorname{ctg}(\alpha_{T_2Q}) - Y_{T_1} \operatorname{ctg}(\alpha_{T_1Q})}{\operatorname{ctg}(\alpha_{T_2Q}) - \operatorname{ctg}(\alpha_{T_1Q})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{PT1} &= \alpha_{PQ} - \beta_2 \\ \alpha'_{QT1} &= \alpha_{PQ} - 180 + \beta_3 \\ \alpha'_{PT2} &= \alpha'_{PT1} + \beta_1 \\ \alpha'_{QT2} &= \alpha_{PQ} - 180 + \beta_4\end{aligned}$$

3. Используя формулы 43 и 44 вычислим условные координаты точек T1 и T2

По формулам прямой засечки из треугольников PQT1 и PQT2 найдем соответственно условные координаты точек T1 (x'1, y'1) и T2 (x'2, y'2):

$$\left. \begin{aligned}x'_1 &= \frac{y'_Q - y'_P + x'_P \operatorname{tg}(\alpha'_{PT1}) - x'_Q \operatorname{tg}(\alpha'_{QT1})}{\operatorname{tg}(\alpha'_{PT1}) - \operatorname{tg}(\alpha'_{QT1})} \\ y'_1 &= \frac{x'_Q - x'_P + y'_P \operatorname{ctg}(\alpha'_{PT1}) - y'_Q \operatorname{ctg}(\alpha'_{QT1})}{\operatorname{ctg}(\alpha'_{PT1}) - \operatorname{ctg}(\alpha'_{QT1})}\end{aligned} \right\} \quad (137)$$

$$\left. \begin{aligned}x'_2 &= \frac{y'_Q - y'_P + x'_P \operatorname{tg}(\alpha'_{PT2}) - x'_Q \operatorname{tg}(\alpha'_{QT2})}{\operatorname{tg}(\alpha'_{PT2}) - \operatorname{tg}(\alpha'_{QT2})} \\ y'_2 &= \frac{x'_Q - x'_P + y'_P \operatorname{ctg}(\alpha'_{PT2}) - y'_Q \operatorname{ctg}(\alpha'_{QT2})}{\operatorname{ctg}(\alpha'_{PT2}) - \operatorname{ctg}(\alpha'_{QT2})}\end{aligned} \right\} \quad (138)$$

4. Вычисление углов φ1, φ2, ψ1, ψ2 по условным координатам

По условным координатам точек T1 и T2 можно определить условный дирекционный угол (T1T2)' из решения обратной геодезической задачи, после чего отыскать все углы, образуемые направлениями с точек T1 и T2 на точки P и Q как разности дирекционных углов соответствующих направлений:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha'_{PT1} - 180 - (T_1T_2)' \\ \psi_1 &= (T_2T_1)' - \alpha'_{PT2} - 180^\circ.\end{aligned}$$

Контролем правильности вычислений служит известное из геометрии соотношение – сумма углов треугольника равна 180° или

$$\beta_1 + \varphi + \varepsilon = 180^\circ \pm \delta$$

где

δ - предельная СКП измерения угла прибора, которым измерен угол φ.

Вариант 2. (координатная привязка)

Имеются исходные пункты, но отсутствуют пункты ориентирования.

Теория координатной привязки достаточно проста.

Предположим, что через центр круга (рис. 5), радиусом R, проходит система координат XY.

Радиус R1 в системе координат XY проведен под углом α и имеет приращения координат Δx1 и Δy1.

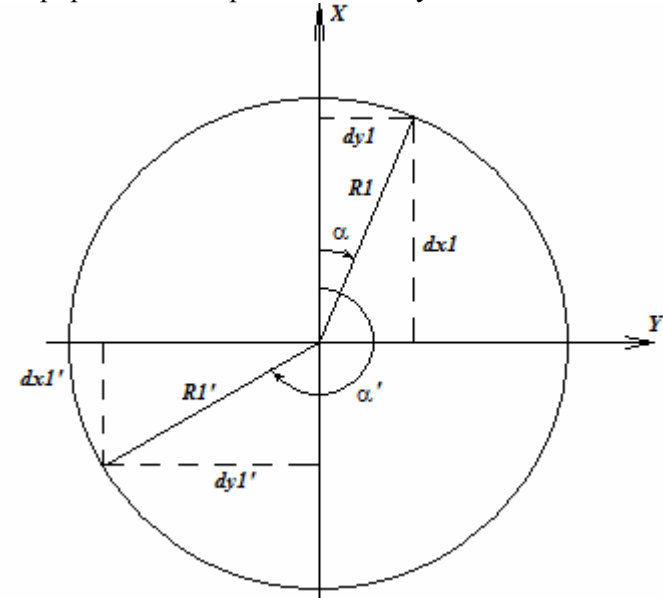


Рис 5

А радиус $R I'$ в той же системе координат $X Y$ проведен под углом α' и имеет приращения координат $\Delta x I'$ и $\Delta y I'$.

Несмотря на то, что сами приращения координат изменяются с изменением α , радиус данной окружности остается постоянным:

$$R I = R I'$$

Используя теорему Пифагора можно записать

$$R I = \sqrt{dx I^2 + dy I^2}$$

$$R I' = \sqrt{dx I'^2 + dy I'^2}$$

Для вычисления приращений координат радиусов $R I$ и $R I'$ используем прямую геодезическую задачу:

$$\Delta x I = R \cos(\alpha);$$

$$\Delta y I = R \sin(\alpha);$$

$$\Delta x I' = R' \cos(\alpha');$$

$$\Delta y I' = R' \sin(\alpha');$$

Для того, чтобы через радиус R' вычислить приращения координат радиуса R ,

R' необходимо повернуть на угол $d\alpha = \alpha - \alpha'$ и тогда приращения координат будут одни и те же.

$$\Delta x I = R' \cos(\alpha' + d\alpha);$$

$$\Delta y I = R' \sin(\alpha' + d\alpha);$$

Алгоритм решения задачи.

Предположим, что между двумя твердыми пунктами T_1 и T_2 проложили ход с координатной привязкой. (рис. 6) Необходимо вычислить координаты поворотных точек в системе координат ГГС.

Рассмотрим алгоритм решения задачи.

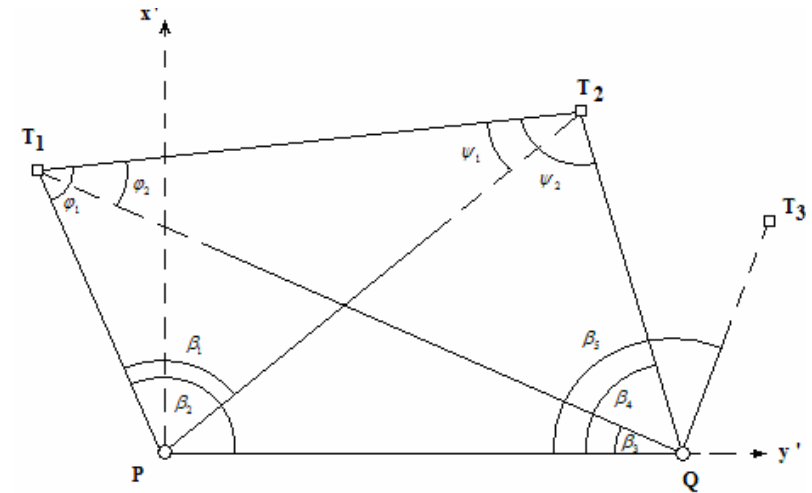


рис. 22

1. Зададим условную систему координат.

Примем точку P за начало условных координат $x'Py'$, а направление PQ — за положительное направление оси ординат. Расстояние PQ условно примем равным, например, 10 000,000 м. Тогда условные координаты точек P и Q будут:

$$x'_P = 0; \quad y'_P = 0;$$

$$x'_Q = 0; \quad y'_Q = 10\,000,000 \text{ м.}$$

2. Определим условные дирекционные углы направлений

Для решения прямой засечки в условных координатах, определим в условной системе координат дирекционные углы направлений:

$$\alpha_{PQ} = 90^\circ$$

т.к. PQ задает ось ординат условной системы координат.

Тогда условные дирекционные углы направлений можно вычислить через измеренные углы $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$. Из рисунка 22 следует:

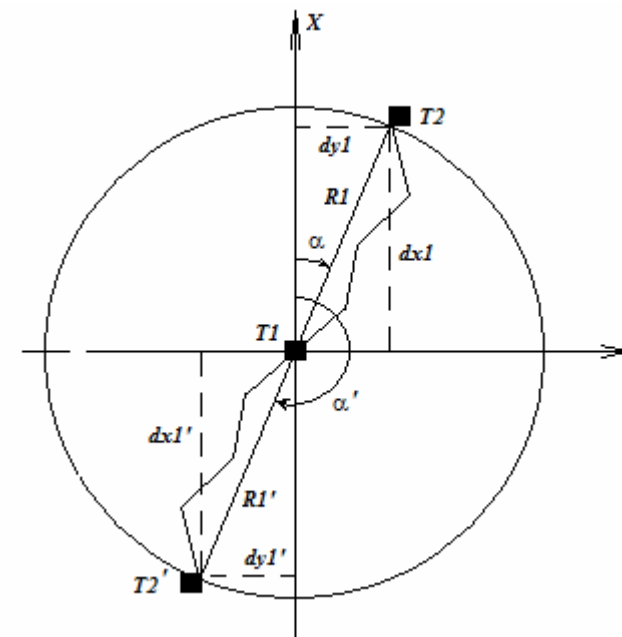
IX. Оценка точности:

Оценка точности выполняется аналогично, как и в прямой многократной засечке.

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-3}} = 4.61''$$

$$m_x = \frac{m_\alpha}{10\sqrt{P_x}} = 0.073\text{м}$$

$$m_y = \frac{m_\alpha}{10\sqrt{P_y}} = 0.044\text{м}$$



Определение положения двух пунктов по двум исходным (задача Ганзена)

Практически это есть задача по определению двойной прямой засечкой двух пунктов по двум исходным.

Координаты двух точек P и Q могут быть определены, если в точках T1 и T2 измерить углы φ1, φ2, ψ1, ψ2 образуемые направлениями на два определяемых пункта P и Q (рис. 22). Однако точки T1 и T2 недоступны для измерений, а углы φ1, φ2, ψ1, ψ2 неизвестны. Для аналитического определения данных углов, на местности измеряют углы β1, β2, β3, β4.

Существует много способов решения этой задачи. Наиболее простым из них является способ условных координат, суть которого заключается в определении условных координат точек T1 и T2 в единой условной системе координат для всех точек (T1, T2, P, Q - в условной системе координат фигура останется подобной исходной). Через условные дирекционные углы направлений вычислить неизвестные углы φ1, φ2, ψ1, ψ2. Затем, перейдя в заданную систему координат, определить координаты искоемых точек прямой однократной засечкой по формулам 43 и 44.

Рис. 6

Исходя из изложенного, предположим, что пункт T1 начало вектора R1, а пункт T2 его конец.

Задача решается в два приближения.

Первое приближение.

1. Определение длины и дирекционного угла истинной замыкающей хода.

а) Найдем приращения истинных координат и длину замыкающей линии хода R1 между пунктами ГГС T1 и T2.

$$\Delta x_{ист} = X_{T2} - X_{T1}$$

$$\Delta y_{ист} = Y_{T2} - Y_{T1} \quad ;$$

$$R1_{ист} = \sqrt{\Delta x^2_{ист} + \Delta y^2_{ист}}$$

б). Определим румб истинной замыкающей **R1**.

$$tg(r) = \frac{\Delta y_{ист}}{\Delta x_{ист}}$$

По известным правилам, от румба линии перейдем к дирекционному углу α .

2. **Определение приращений координат, длины и дирекционного угла замыкающей хода с произвольно заданным дирекционным углом первой измеренной линии.**

а) Зададим первой линии хода произвольный дирекционный угол α' и определим по известным зависимостям последующие дирекционные углы линий хода.

$$\alpha'_{i+1} = \alpha'_i + \beta_{изм} \pm 180^\circ$$

Как правило, дирекционному углу первой линии задают значение $\alpha' = 0$.

б). По измеренным линиям и вычисленным дирекционным углам найдем приращения координат поворотных точек хода

$$\Delta x'_i = S_i \cos(\alpha'_i);$$

$$\Delta y'_i = S_i \sin(\alpha'_i);$$

в). Просуммируем приращения координат и определим длину замыкающей проложенного хода **R1'**. Оценим качество измерений.

$$R1'_{выч} = \sqrt{(\sum \Delta x')^2_{выч} + (\sum \Delta y')^2_{выч}}$$

перевода в метры, их необходимо умножить на **0.1**

$$\begin{aligned} dx &= -0.091 & P_x &= D/[BB] = 39.67 \\ dy &= 0.003 & P_y &= D/[AA] = 110.98 \end{aligned}$$

Перед тем, как вычислить окончательно уравненные координаты определяемого пункта, необходимо вычислить поправки в измеренные дирекционные углы и выполнить контроль вычисления поправок, что будет являться окончательным контролем правильности составления нормальных уравнений.

VI. Вычисление поправок v и уравненных углов β

N	Adx	Bdy	L	v	Испр. beta b=b0+v(i)	Alfa выч.	beta выч. b=al(i)-al(0)	v ²
1	-1.96	0.24	0.00	-1.72	64°50'53.5"	223°02'02.1"	64°50'53.5"	2.97
2	3.34	0.31	0.00	3.64	125°58'58.2"	287°52'55.6"	125°58'58.2"	13.27
3	6.95	0.32	-9.50	-2.24	172°20'20.5"	349°01'00.4"	172°20'20.5"	5.00
4						35°22'22.4"	[vv]=	21.24

VII. Окончательные (уравненные) координаты пункта P

$$X = x_0 + dx = 434.983$$

$$Y = y_0 + dy = 12773.923$$

VIII. Контроль вычисления поправок.

[LL]	[AL] δx	[BL] δy	[vv]
90.25	-66.00	-3.01	21.24

Данные уравнения решают способом детерминантов. Для этого необходимо найти определители системы уравнений поправок, с учетом правил линейной алгебры и учетом расстановки знаков при вычислении миноров:

$$(-1)^{(n-1)} * (\text{вычисление определителя})$$

Где n – номер “вычеркнутого” столбца.

Итак:

А. Основной определитель:

$$D = [AA][BB] - [AB][AB]$$

В. Определитель для столбца X

$$D_x = [AB][BL] - [BB][AL]$$

С. Определитель для столбца Y

$$D_y = [AB][AL] - [AA][BL]$$

Вычислив определители, найдем поправки в приближенные координаты:

$$\delta_x = \frac{D_x}{D} \quad \text{и} \quad \delta_y = \frac{D_y}{D}$$

Сведем данные вычисления в таблицу:

$\begin{matrix} -[AA][BB] \\ [AB][AB] \end{matrix}$	$\begin{matrix} 16261.664 \\ 7799.975 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -[AB][BL] \\ [BB][AL] \end{matrix}$	$\begin{matrix} -7750.044 \\ -15456.671 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -[AB][AL] \\ -[AA][BL] \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6400.570 \\ 6690.809 \end{matrix}$
D	8461.689	D_x	7706.627	D_y	-290.239
		d_x = 0.91		d_y = -0.03	

С учетом того, что при вычислении коэффициентов (а) и (b) выполнено деление на 10000, а при вычислении коэффициентов а и b S взято в километрах, размерность вычисленных поправок – дециметры. Для

По определению, длина радиус-вектора не зависит от угла его поворота. Тогда можно записать

$$R = R'$$

Однако ввиду неизбежных ошибок измерений данное соотношение выполняться не будет, а будет верно равенство

$$R - R' = dr,$$

где

dr – линейная невязка хода f_s ,

которая является совокупностью ошибок линейных и угловых измерений.

Если выполняется соотношение

$$dr/R \leq 1/T;$$

где

$1/T$ – заданная относительная погрешность

то вычисления можно продолжить, в противном случае, присутствуют грубые ошибки измерений, которые необходимо исключить, выполнив повторные измерения.

г). *Определение угла доворота $d\alpha$ вычисленной замыкающей линии хода - R'*

По вычисленной сумме приращений координат измеренных линий найдем румб r' – вычисленной замыкающей.

$$tg(r') = \frac{[\Delta y']}{[\Delta x']},$$

от которого перейдем к дирекционному углу α' .

Чтобы получить истинные приращения координат необходимо развернуть R' с заданным углом α' в направлении R с заданным истинным углом α . Для этого определим угол доворота $d\alpha$ линии R' .

$$d\alpha = \alpha - \alpha'$$

Введя поправку $d\alpha$ в начальный, произвольно взятый дирекционный угол α'

$$\alpha'_{испр} = \alpha' + d\alpha$$

и исправив последующие дирекционные углы за $d\alpha$, окончательно определим исправленные приращения координат.

(Если α' - дирекционный угол первой линии $=0$, то $d\alpha = \alpha'_{испр} -$ искомый дирекционный угол первой стороны вычисляемого хода)

На этом первое приближение заканчивается.

Второе приближение

Далее используется стандартный алгоритм вычисления рабочих координат. Отличие состоит в том, что в данном алгоритме отсутствует угловая невязка, которая скомпенсировалась доворотом хода – **закрывающая хода совпадает с истинной закрывающей.**

Пример вычисления рабочих координат полигонометрического хода (координатная привязка). Рассмотрен предыдущий пример. Исходные дирекционные углы изъяты из вычислений

Первое приближение

N	beta	alfa	S	dx	dy
Пн2	° ' "	° ' "			
		0 0 0,0	552,007	552,007	0
1	247 51 8,1				
		67 51 8,1	565,338	213,13	523,624
2	156 32 34,9				
		44 23 43,0	339,025	242,244	237,183
3	139 20 10,9				
		3 43 53,9	400,408	399,559	26,06
4	157 18 32,0				
		341 2 25,9	356,831	337,472	-115,934
5	170 6 59,2				
		331 9 25,1	372,263	326,082	-179,584
6	179 59 40,8				
		331 9 5,9	348,716	305,44	-168,253
Пн3					
		ΣS=	2934,588		
				Σdx _{изм} =	2375,935
				Σdx _{теор} =	-1281,861
				Σdy _{изм} =	323,096
Δα =	114 34 19,6			Σdy _{теор} =	2026,442
S _в =	2397,802				
S _{практ} =	2397,84				
f _s =	-0,037	$\frac{f_s}{\Sigma S} =$	$\frac{1}{64365}$		

$$(a_i) = -\frac{\sin(\alpha_{прибл.i})}{10000} \rho \quad (b_i) = +\frac{\cos(\alpha_{прибл.i})}{10000} \rho$$

Коэффициенты a_i и b_i вычисляются по формулам:

$$a_i = -\frac{(a_i)}{S_{прибл.i}} \quad b_i = -\frac{(b_i)}{S_{прибл.i}}$$

Коэффициенты уравнений поправок вычисляются по формулам:

$$A_i = a_{i+1} - a_1 \quad B_i = b_{i+1} - b_1$$

N	alfa	(a)	(b)	Скм	a	b	A	B	L	Σ
1	223° 2'	14.08	-15.08	3.150	-4.47	4.79	-2.15	-6.92	0.00	-9.08
2	287° 53'	19.63	6.33	2.964	-6.62	-2.14	3.66	-8.94	0.00	-5.28
3	349° 1'	3.93	20.25	4.870	-0.81	-4.16	7.63	-9.24	-9.50	11.11
4	35° 22'	-11.94	16.82	3.779	3.16	-4.45				
						Сумма:	9.14	-25.11	-9.50	25.47

IV. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений

N	AA	AB	AL	As	BB	BL	Bs
1	4.64	14.91	-0.00	19.55	47.94	-0.00	62.85
2	13.41	-32.76	0.00	-19.35	80.01	-0.00	47.25
3	58.20	-70.47	-72.47	-84.74	85.32	87.75	102.61
Сумма	76.25	-88.32	-72.47	-84.54	213.28	87.75	212.71

V. Решение нормальных уравнений.

В числовом виде нормальные уравнения поправок имеют вид:

$$76.25dx + (-88.32) dy - 72.47=0$$

$$-88.32dx + (213.28) dy + 87.75=0$$

Пункт 1 Пункт P	10624.547 12773.927 -2149.380	-1867.207 434.891 -2302.098	0.933661 223° 2' 6.4"	3149.522
Пункт 2 Пункт P	9953.119 12773.927 -2820.808	1345.105 434.891 910.214	-3.099061 287° 53' 1.6"	2964.025
Пункт 3 Пункт P	11846.134 12773.927 -927.793	5215.514 434.891 4780.623	-0.194074 349° 1' 1.0"	4869.820
Пункт 4 Пункт P	14961.806 12773.927 2187.879	3516.713 434.891 3081.822	0.709931 35° 22' 19.6"	3779.476

II. Вычисление свободных членов уравнений поправок

α (прибл) выбирается из предыдущей таблицы.

$$beta(выч) = \alpha(прибл)_i - \alpha(прибл)_i$$

$$L_i = beta(выч) - beta(изм)$$

Пункт	α (прибл)	beta(выч)	beta(изм)	L	L ²
1	223° 2' 6.4"	-	-	-	-
2	287° 53' 1.6"	64° 50' 55.2"	64° 50' 55.2"	0.0	0.00
3	349° 1' 1.0"	125° 58' 54.6"	125° 58' 54.6"	0.0	0.00
4	35° 22' 19.6"	172° 20' 13.2"	172° 20' 22.7"	-9.5	90.25

III. Вычисление коэффициентов уравнений поправок

Alfa округляются до минут.

Коэффициенты (a_i) и (b_i) вычисляются по формулам:

После того, как в первом приближении вычислили угол доворота и дирекционный угол замыкающей, выполняют второе приближение, в котором вычисляют окончательные координаты точек хода. Для этого первая измеренная линия хода принимает значение вычисленного дирекционного угла.

Второе приближение

N	beta	alfa	S	dx	dy	X	Y
Пн2	° ' "	° ' "				10901,025	7050,4
		114 34 19,6	552,007	-229,546	502,016		
1	247 51 8,1					10671,476	7552,422
		182 25 27,7	565,338	-564,832	-23,914		
2	156 32 34,9					10106,64	7528,514
		158 58 2,6	339,025	-316,438	121,676		
3	139 20 10,9					9790,2	7650,194
		118 18 13,5	400,408	-189,852	352,538		
4	157 18 32,0					9600,345	8002,736
		95 36 45,5	356,831	-34,899	355,12		
5	170 06 59,2					9565,444	8357,86
		85 43 44,7	372,263	27,723	371,229		
6	179 59 40,8					9593,164	8729,093
		85 43 25,5	348,716	26,002	347,745		
Пн3						9619,164	9076,842
		[S]=	2934,588				
			$\Sigma dx =$	-1281,841		$\Sigma dy_{изм} =$	2026,411
			$\Delta x_{теор} =$	-1281,861		$\Sigma dy_{теор} =$	2026,442
Fs =	0,037		$f_x =$	0,02		$f_y =$	-0,031
	$\frac{f_s}{\Sigma S} =$	$\frac{1}{78783}$					

Косвенная привязка к пунктам ГГС

- а) привязка к близлежащим пунктам;
- б) привязка к отдаленным пунктам.

Используя различные способы привязки, можно получить также координаты ряда боковых пунктов.

Рассмотрим указанные способы привязки.

Передача координат с вершины знака на землю (сносение координат)

Этот вид привязки полигонометрического хода применяется тогда, когда пункт государственной геодезической сети недоступен для непосредственных измерений, но имеется возможность подойти к нему на расстояние порядка 100—500 м. На практике могут иметь место следующие случаи:

1) пункт недоступен ни для линейных, ни для угловых измерений;

2) пункт доступен для угловых измерений, но недоступен для линейных измерений.

Рассмотрит оба случая.

1. Пункт, к которому производится привязка, недоступен ни для линейных, ни для угловых измерений (обычно это шпиль какого-либо здания или колокольни церкви).

Итак, необходимо определить координаты пункта *P* (рис. 7), из которого видны пункты обоснования: близко расположенный пункт *T1* и пункт *T2*, последний может быть расположен на значительном расстоянии от пункта *P*. Более надежный контроль решения задачи будет обеспечен в том случае, если, кроме пункта *T2*, будет виден еще пункт *T3*.

Расстояние $PT_1 = S$ можно определить как неприступное. Для этого на местности строят два треугольника APT_1 и BPT_1 . Стороны этих треугольников AP (b_1) и PB (b_2) измеряют непосредственно; кроме этого, в каждом треугольнике измеряют по два угла $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и β_2 .

(Оптимальная длина базиса – получение равносторонних треугольников APT_1 и BPT_1)

Из треугольников APT_1 и BPT_1 определяют длину $PT_1 = s$ по формуле

$$s_i = \frac{b_i \sin \alpha_i}{\sin \varepsilon_i} \quad (13)$$

Вычисление дирекционного угла			
$y_2 - y_1$	-671.428	$x_2 - x_1$	3212.312
$y_3 - y_2$	1893.015	$x_3 - x_2$	3870.409
$y_1 - y_3$	-1221.587	$x_1 - x_3$	-7082.721
β_1	64° 50' 55.2"	β_2	125° 58' 54.6"
$ctg(\beta_1)$	0.469527220	$ctg(\beta_2)$	-0.726058203
$(y_2 - y_1) * ctg(\beta_1)$	-315.254	$(x_2 - x_1) * ctg(\beta_1)$	1508.268
$(y_1 - y_3) * ctg(\beta_2)$	886.943	$(x_1 - x_3) * ctg(\beta_2)$	5142.468
$+(x_3 - x_2)$	3870.409	$-(y_3 - y_2)$	1893.015
summa	4442.099	summa	4757.721
$tg(\alpha_1)$	0.933661077	Alfa1	43° 02' 06.4"
$-tg(\alpha_3)$	-0.194073613	Alfa2	107° 53' 01.6"
K	1.127734690	Alfa3	169° 01' 01.0"
Вычисление координат			
$(x_1 - x_3) * tg(\alpha_1)$	-6612.861	$(x_1 - x_3) * tg(\alpha_3)$	1374.569
$-(y_1 - y_3)$	1221.587	$-(y_1 - y_3)$	1221.587
A	-5391.274	B	2596.156
$X - X_3$	-4780.623	$X - X_1$	2302.098
X_3	5215.514	X_1	-1867.207
X	434.891	X	434.891
$(x - x_3) * tg(\alpha_3)$	927.793	$(x - x_1) * tg(\alpha_1)$	2149.380
Y3	11846.134	Y1	10624.547
Y	12773.927	Y	12773.927
Контроль			
$y_2 - y$	-2820.808		
$x_2 - x$	910.214		
$tg(\alpha_2)$	-3.099061336	Alfa1	223° 02' 06.4"
Alfa2	287° 53' 1.6"	Alfa2	287° 53' 01.6"
		Alfa3	349° 01' 01.0"

2. Многократная засечка.

I. **Вычисление дирекционных углов и расстояний по приближенным координатам, вычисленным из обратной однократной засечки.** Используется обратная геодезическая задача.

1. Определение координат пункта из обратной однократной засечки

Для вычисления приближенных координат выбирают три произвольных направления и вычисляют измеренные углы $\beta_i = n_i - n_{\text{начальное}}$

Где

β_i – вычисленный измеренный угол

$n_{\text{начальное}}$ – измеренное направление на первую выбранную точку

n_i – последующее выбранное направление

Для решения нашей задачи взяты три первых направления.

Используются формулы обратной однократной засечки:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{(y_2 - y_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + (y_1 - y_3) \operatorname{ctg} \beta_2 + (x_3 - x_2)}{(x_2 - x_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + (x_1 - x_3) \operatorname{ctg} \beta_2 - (y_3 - y_2)}$$

$$\left. \begin{aligned} x - x_3 &= \frac{(x_1 - x_3) \operatorname{tg} \alpha_1 - (y_1 - y_3)}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_3} \\ x - x_1 &= \frac{(x_1 - x_3) \operatorname{tg} \alpha_3 - (y_1 - y_3)}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_3} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} y - y_3 &= (x - x_3) \operatorname{tg} \alpha_3 \\ y - y_1 &= (x - x_1) \operatorname{tg} \alpha_1 \end{aligned} \right\}$$

Исходные данные :

Y_i		X_i		Вычисленные углы	
y1	10624.547	x1	-1867.207	β_1	64° 50' 55.2"
y2	9953.119	x2	1345.105	β_2	125° 58' 54.6"
y3	11846.134	x3	5215.514		

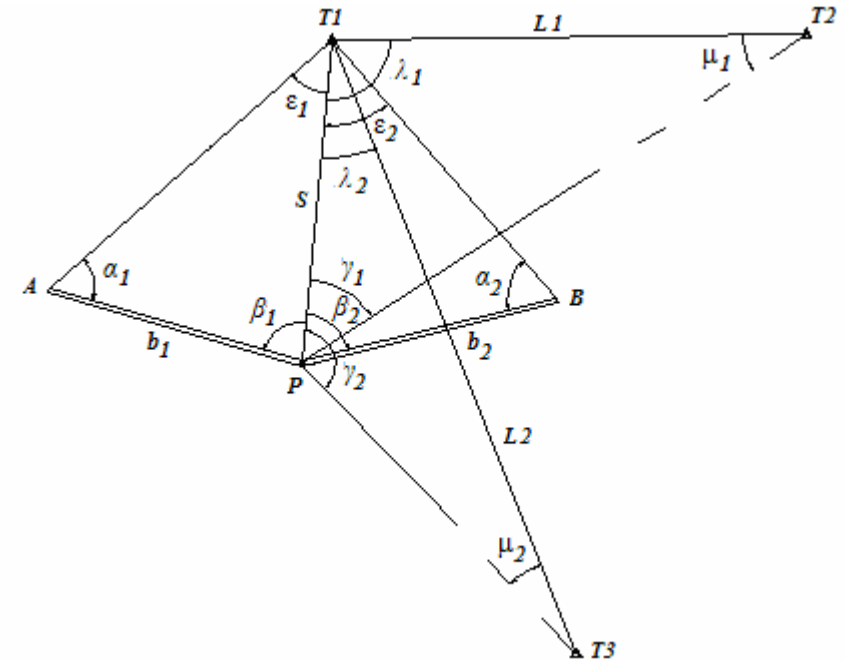


рис. 7

где

$$\varepsilon_i = 180^\circ - (\alpha_i + \beta_i) \quad (14),$$

$$i = 1, 2.$$

Из полученных значений берут среднее.

Для определения примычного угла λ_1 на местности при точке P измеряют угол γ_1 . Этот угол дает возможность определить сначала из треугольника PT1T2 угол μ_1 а затем и угол λ_1 .

В треугольнике PT1T2 дирекционный угол линии (T1T2) и ее длину T1T2 = L1 находят из решения обратной геодезической задачи по формулам

$$\operatorname{tg}(T_1T_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad (15)$$

$$T_1 T_2 = L1 = \frac{y_2 - y_1}{\sin(T_1 T_2)} = \frac{x_2 - x_1}{\cos(T_1 T_2)} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (16);$$

Зная величину $L1$, из треугольника PT_1T_2 по теореме синусов находят

$$\sin \mu_1 = \frac{s}{L1} \sin \gamma_1, \quad (17)$$

а затем — угол μ_1 .

Примычный угол λ_1 получают из того же треугольника как дополнение до 180° :

$$\lambda_1 = 180^\circ - (\gamma_1 + \mu_1) \quad (18).$$

Дирекционный угол φ направления T_1P определяют как

$$(T_1P) = \varphi = (T_1T_2) \pm \lambda_1 \quad (19).$$

Выбор знака перед λ_1 в формуле (19) производится с учетом расположения пунктов на схематическом чертеже, составление которого при решении задачи необходимо.

По полученным длине линии PT_1 и дирекционному углу ее (T_1P), решая прямую геодезическую задачу, находят приращения координат,

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_p &= s_{cp} \cos(T_1P) \\ \Delta y_p &= s_{cp} \sin(T_1P) \end{aligned} \right\} \quad (20),$$

а затем сами координаты

$$\left. \begin{aligned} x_p &= x_1 + \Delta x_p \\ y_p &= y_1 + \Delta y_p \end{aligned} \right\} \quad (21).$$

Заключительный контроль решения задачи состоит в вычислении дирекционного угла (PT_2) из обратной геодезической задачи

Из уравнений (129) и (130) следует, что

$$\frac{[l]}{n} = 0$$

поэтому уравнение (132) можно записать в виде

$$\frac{[a]}{n} \delta x + \frac{[b]}{n} \delta y - \delta z = 0 \quad (133).$$

Вычтем члены этого равенства из соответствующих членов каждого уравнения поправок (131), тогда

$$A_i \delta x + B_i \delta y + l_i = v_i \quad (134),$$

где

$$a_i - \frac{[a]}{n} = A_i \quad b_i - \frac{[b]}{n} = B_i \quad (135).$$

Дальнейший ход уравнивания аналогичен ходу уравнивания результатов измерений при обратной многократной засечке по измеренным углам.

При оценке точности полевых измерений вычисляется средняя квадратическая погрешность направления m_n .

$$m_n = \sqrt{\frac{[v^2]}{n - k}} \quad (136),$$

где k — число неизвестных, равное трем.

Пример вычислений. Обратная многократная засечка (см рис. 19).

Исходные данные.

N пункта	x	y	Направление
T1	-1867.207	10624.547	00° 00' 00"
T2	1345.105	9953.119	64° 50' 55.2"
T3	5215.514	11846.134	125° 58' 54.6"
T4	3516.713	14961.806	172° 20' 22.7"

где v_i — поправка к измеренному значению направления, полученная из уравнивания; $\delta\alpha_{0,i}$ — поправка к приближенному значению дирекционного угла.

Приближенное значение z_0 принимается равным среднему арифметическому из ориентирующих углов $(\alpha_{0,i} - r'_i)$, т. е.

$$z_0 = \frac{|\alpha_0 - r'|}{n} \quad (129).$$

Обозначим

$$\alpha_{0,i} - r'_i - z_0 = l_i \quad (130).$$

Перепишем уравнение (128) с учетом дифференциальной формулы дирекционного угла и обозначений формул (109) и (130)

$$v_i = a_i \delta x + b_i \delta y - \delta z + l_i \quad (131),$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Уравнения (131) есть **параметрические уравнения поправок** для случая, когда при определяемой точке измерялись направления; таких уравнений будет столько, сколько было измерено направлений, т. е. n . Поставив условие $[v^2] = \min$, придем согласно методу наименьших квадратов к трем нормальным уравнениям.

Однако можно преобразовать уравнения (131), применив для этого прием, который позволит исключить неизвестное δz (фактически и ненужное) и получить уравнение поправок с двумя неизвестными δx и δy .

Сложим уравнения (131) и, разделив результаты на n , получим

$$\delta z = \frac{[a]}{n} \delta x + \frac{[b]}{n} \delta y + \frac{[l]}{n} = 0 \quad (132).$$

$$tg(PT_2) = \frac{y_2 - y_p}{x_2 - x_p} \quad (22)$$

и вторичном получении угла

$$\mu = (T_1 T_2) - (PT_2) \quad (23).$$

Если из пункта P будет виден пункт T_3 , его необходимо использовать для вторичного получения значения координат пункта P , для чего следует на пункте P измерить угол γ_2 , а далее повторить решение задачи, начиная с получения $tg(T_1 T_3)$ и L_2 по формулам (15) и (16) и т. д. до конца.

Оценка точности

Для получения средней квадратической ошибки положения пункта P воспользуемся рис. 8

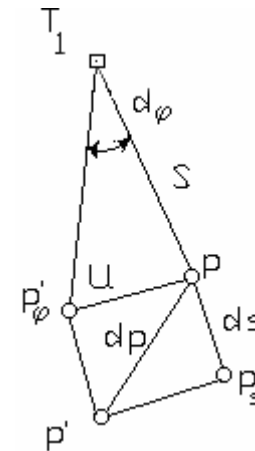


рис. 8

Допустим, что под влиянием ошибок в длине линии ds и в дирекционном угле $d\phi$ пункт P сместился со своего истинного положения на величину dp и попал в точку P' . Это смещение можно разложить на компоненты ds и u , где

$$u = s \frac{d\varphi}{\rho} ,$$

тогда

$$dp^2 = ds^2 + u^2 ,$$

или

$$dp^2 = ds^2 + s^2 \frac{d\varphi^2}{\rho^2} \quad (24) .$$

Переходя к среднеквадратическим погрешностям переписем данную формулу следующим образом:

$$M_p^2 = M_s^2 + s^2 \frac{M_\varphi^2}{\rho^2} \quad (25) ,$$

где

M_φ и M_s — среднеквадратические погрешности $\varphi_{\text{ср}}$ и $s_{\text{ср}}$.

Как видно из формулы, для определения погрешности положения пункта P необходимо вычисление среднеквадратических погрешностей вычисленных элементов: линии $PT_1 = S$, дирекционного угла $(T_1P) = \varphi$ и положения пункта P .

Для проведения оценки точности необходимо иметь показатели точности измерения базисов (\mathbf{m}_b — при измерении базиса светодальномером и углов - $\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\beta, \mathbf{m}_\gamma$).

Для получения \mathbf{m}_{s_i} возьмем функцию $s_i = \frac{b_i \sin \alpha_i}{\sin \varepsilon_i}$,

прологарифмируем ее, а затем продифференцируем полученное выражение и найдем

$$\begin{aligned} \frac{ds_i}{s_i} &= \frac{db_i}{b_i} + \operatorname{ctg} \alpha_i d\alpha_i + \operatorname{ctg} \varepsilon_i d\alpha_i + \operatorname{ctg} \varepsilon_i d\beta_i \\ &= \frac{db_i}{b_i} + (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \varepsilon_i) d\alpha_i + \operatorname{ctg} \varepsilon_i d\beta_i \end{aligned} \quad (26) ,$$

P из решения обратной однократной засечки найдены координаты X_0 и Y_0 и этим значениям соответствуют приближенные дирекционные углы $\alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \dots, \alpha_{0,n}$. Согласно рис. 21, на котором через PO показано нулевое направление, будем иметь

$$\alpha_i = z + r_i \quad (127)$$

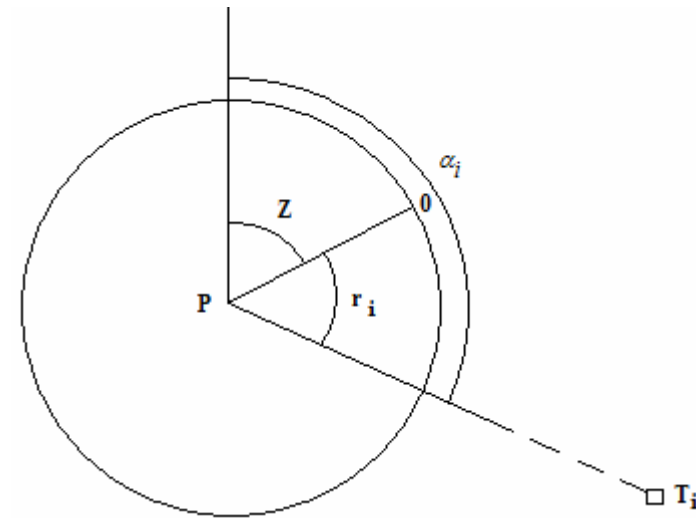


рис. 21

Применяя тот же ход рассуждений, что и при выводе уравнений поправок при уравнивании по углам, уравнение (127) можно представить в виде

$$\alpha_{0,i} + \delta\alpha_i = z_0 + \delta z + r'_i + v_i ,$$

или

$$v_i = \alpha_{0,i} + \delta\alpha_i - z_0 - \delta z - r'_i \quad (128) ,$$

Для оценки точности измеренных углов применим формулу (74), а для оценки точности уравниваемых значений координат — формулы (75).

Веса уравниваемых координат получим из выражений

$$P_y = [BB \cdot 1] = \frac{D}{[AA]} \quad P_x = \frac{[AA]}{[BB]} P_y = \frac{D}{[BB]} \quad (125).$$

Отметим, что формула (74) дает не очень надежные результаты, так как число n в обратной многократной засечке обычно бывает небольшим.

Обратная многократная засечка (уравнивание по измеренным направлениям)

Если из измерений на определяемом пункте получены направления, то правильнее произвести уравнивание по направлениям.

Как известно, измеренным направлением называется угол, отсчитанный от нулевого направления (направления нулевого радиуса лимба) до видимого направления на наблюдаемый пункт.

В случае безошибочности всех наблюдений начальное и нулевое направления совпали бы, но вследствие ошибок измерений после приведения направлений к нулю нулевое направление отличается от начального на ошибку измерения последнего.

Так как нулевое направление не связано с геодезическими пунктами, то в качестве неизвестных, кроме координат, придется выбирать еще дирекционный угол нулевого направления на пункте, который называют **ориентирующим углом** и обозначают буквой z . Тогда

$$z = z_0 + \delta z \quad (126),$$

где z_0 — приближенное значение z ; δz — поправка из уравнивания.

Пусть при определяемой точке имеются приведенные направления на пункты триангуляции r'_1, r'_2, \dots, r'_n и пусть для пункта

при этом учтем, что угол ε определяется по формуле $\varepsilon_i = 180^\circ - (\alpha_i + \beta_i)$, следовательно,

$$d\varepsilon_i = -d\alpha_i - d\beta_i.$$

Переходя к среднеквадратическим погрешностям и принимая $m_{\alpha_i} = m_{\beta_i}$ (углы измерены равноточно), найдем

$$m_{s_i}^2 = \left(\frac{m_{b_i}}{b_i} \right)^2 s_i^2 + [(ctg \alpha_i + ctg \varepsilon_i)^2 + ctg^2 \varepsilon_i] s_i^2 \frac{m_{\alpha_i}^2}{\rho^2} \quad (27)$$

Средняя квадратическая погрешность среднего значения линии s_{cp} будет

$$M_s = \frac{1}{2} \sqrt{m_{s_1}^2 + m_{s_2}^2} \quad (28).$$

Величинами m_{s_i} можно воспользоваться для подсчета предельного расхождения в значениях S , вычисленных из двух треугольников, так как

$$ds = s_1 - s_2, \\ m_{ds}^2 = m_{s_1}^2 + m_{s_2}^2.$$

Тогда

$$\text{пред}(s_1 - s_2) = 2\sqrt{m_{s_1}^2 + m_{s_2}^2} \quad (29).$$

Определим среднюю квадратическую погрешность **дирекционного угла** φ_i . Дифференцируя формулы $(T_1 P) = \varphi = (T_1 T_2) \pm \lambda_i$, получим

$$d\varphi_i = d\lambda_i \quad (30),$$

где $i = 1, 2$.

Угол λ_i вычисляется по формуле $\lambda_1 = 180^\circ - (\gamma_1 + \mu_1)$, следовательно, дифференцирование ее дает

$$d\lambda_i = -d\mu_i - d\gamma_i \quad (31) .$$

В свою очередь величина μ_i определяется выражением

$$\sin \mu_i = \frac{s}{L} \sin \gamma_i .$$

Несколько упростим его, имея в виду, что отношение $\frac{s}{L}$, как правило, в практике работ, составляет приблизительно $\frac{1}{10}$.

С учетом этого (17) можно записать

$$\sin \mu_i = \frac{1}{10} \sin \gamma_i .$$

Дифференцируя ее, получим

$$\cos \mu_i d\mu_i = \frac{1}{10} \cos \gamma_i d\gamma_i ,$$

откуда найдем

$$d\mu_i = \frac{1}{10} \frac{\cos \gamma_i}{\cos \mu_i} d\gamma_i .$$

Можно считать, что отношение

$$\frac{\cos \gamma_i}{\cos \mu_i} \approx 1 .$$

Тогда $d\mu_i \approx \frac{1}{10} d\gamma_i$

Учитывая это соотношение в формуле ($d\lambda_i = -d\mu_i - d\gamma_i$), можно $d\mu_i$, при оценке точности, в расчет не принимать, тогда

$$v_i = (a_{i+1} - a_i) \delta x + (b_{i+1} - b_i) \delta y + l_i \quad (120)$$

Введем обозначения

$$(a_{i+1} - a_i) = A_i \quad (b_{i+1} - b_i) = B_i \quad (121)$$

и получим окончательное выражение

$$A_i \delta x + B_i \delta y + l_i = v_i \quad (122) ,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$. Уравнения (122) есть **параметрические уравнения поправок**.

Предполагая измерения углов при определяемой точке равноточными, поставим условие $[v^2] = \min$. Решая уравнения (122) под этим условием, придем согласно теории параметрического способа уравнивания к двум нормальным уравнениям

$$[AA] \delta x + [AB] \delta y + [Al] = 0 \quad [AB] \delta x + [BB] \delta y + [Bl] = 0 \quad (123)$$

Решив эти уравнения способом определителей, найдем

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{[AB][Bl] - [BB][Al]}{[AA][BB] - [AB]^2} = \frac{D_x}{D} \\ \delta y &= \frac{[AB][Al] - [AA][Bl]}{[AA][BB] - [AB]^2} = \frac{D_y}{D} \end{aligned} \right\} \quad (124) .$$

Уравненные значения координат получим по формулам (36), а уравненные значения углов по — формулам (107), при этом поправки v определим из уравнений (122).

Для заключительного контроля уравнивания вторично найдем уравненные измеренные углы β_i , из выражения. (113), дирекционные углы для которого получим из решения обратных геодезических задач. Расхождения в дважды полученных величинах β_i , должны находиться в пределах точности вычислений.

Разность между приближенным значением угла $\beta_{0,i}$ и измеренным значением β'_i есть свободный член, который обозначим l_i :

$$\beta_{i,0} - \beta'_i = l_i \quad (111).$$

С учетом выражения (111) запишем уравнение (110) в виде

$$\delta\beta_i + l_i = v_i \quad (112).$$

В уравнении (112) поправку $\delta\beta_i$, выразить через поправки δx и δy . Для этого сначала выразим углы β_i и $\beta_{0,i}$ (см. рис. 20) соответственно через дирекционные углы α_{i+1} , α_i и $\alpha_{0,i+1}$, $\alpha_{0,i}$:

$$\beta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i \quad (113),$$

или

$$\beta_i = \alpha_{0,i+1} + \delta\alpha_{i+1} - \alpha_{0,i} - \delta\alpha_i \quad (114)$$

и

$$\beta_{0,i} = \alpha_{0,i+1} - \alpha_{0,i} \quad (115).$$

Вычитая из равенства (113) равенство (114) и учитывая по формуле (109), что $\delta\beta_i = \beta_i - \beta_{0,i}$, получим

$$\delta\beta_i = \delta\alpha_{i+1} - \delta\alpha_i \quad (116).$$

Тогда уравнение (112) с учетом (116) будет иметь вид

$$v_i = \delta\alpha_{i+1} - \delta\alpha_i + l_i \quad (117).$$

Применим для нахождения $\delta\alpha_{i+1}$ и $\delta\alpha_i$, дифференциальную формулу дирекционного угла, которую для удобства записи перепишем в виде

$$d\alpha = adx + bdy \quad (118),$$

где

$$a = -\frac{(a)}{s} \quad b = -\frac{(b)}{s} \quad (119).$$

Тогда уравнение (117) можно записать так:

$$d\lambda_i \approx d\gamma_i,$$

или с учетом $d\varphi_i = d\lambda_i$

$$d\varphi_i \approx d\gamma_i.$$

Отсюда, переходя к среднеквадратическим погрешностям, будем иметь

$$m_{\varphi_i} \approx m_{\gamma_i} \quad (32).$$

Строгая формула среднеквадратической погрешности дирекционного угла примет следующий вид

$$m_{\varphi_i}^2 = \left(1 + \operatorname{tg}\mu_i \operatorname{ctg}\gamma_i\right)^2 m_{\gamma_i}^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 \mu_i \left(\frac{m_{s_i}}{s_i}\right)^2 \quad (33).$$

Средняя квадратическая погрешность среднего значения дирекционного угла φ_{cp} в случае определения его по двум пунктам T2 и T2' (с учетом ф-ла 32) примет вид

$$M_{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{2m_{\gamma}^2} = 0,71m_{\gamma} \quad (34)$$

где $m_{\gamma} = m_{\gamma_1} = m_{\gamma_2}$.

Предельное расхождение между значениями φ , полученными по двум пунктам, определится выражением

$$\operatorname{pred}(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\sqrt{2m_{\gamma}^2} = 2,8m_{\gamma} \quad (35).$$

Анализ формул показывает, что для обеспечения большей точности передачи координат с пункта T1 на пункт P необходимо:

а) строить по возможности равносторонние вспомогательные треугольники АРТ1 и ВРТ1, это обеспечит большую точность вычисления s ;

б) выбрать положение пункта P так, чтобы угол γ был близок к прямому.

Пример вычислений на снесение координат(см рис. 7) .

(В процессе привязки в обязательном порядке делается абрис привязки, т. е. в обязательно указывается расположение пунктов T_2 и T_3 относительно пункта T_1 и точки привязки P [для правильного использования формулы $(T_1P) = \varphi = (T_1T_2) \pm \lambda_1$]. Если пункт T_2 или T_3 расположен справа от точки привязки и пункта T_1 , то в формуле выбирается знак «+», в противном случае знак «-»)

Исходные данные:				
N	X	Y	$m\beta = m\alpha = m\gamma$	$M_s/[S]$
T1	13194.362	18716.33	5"	1/20000
T2	13830.867	19828.77		
T3	12609.053	20387.40		
Измеренные углы:				
N	alfa	beta	гамма	Базис (м)
1	43° 15' 23.0"	84° 50' 45.0"	42° 17' 17.0"	75.000
2	61° 28' 31.0"	64° 42' 42.0"	91° 13' 6.0"	60.000

Решение.

1. Вычисление неприступного расстояния S (T_1P) из треугольников I - AT_1P и II - BT_1P . Используется формула теоремы синусов.

Данные/треугольник	I	II
alfa	43°15'23.0"	61°28'31.0"
beta	84°50'45.0"	64°42'42.0"
al+bet	128° 6' 8.0"	126°11'13.0"
базис	75.000	60.000
sin(alfa)	0.6852642046	0.8786111444
sin(alfa+beta)	0.7869110896	0.8070948680
S(i) (м)	65.312	65.317
Среднее S (м)	65.314	

чение измеренного угла β'_i, β_i ; — окончательное (уравненное) значение того же угла.

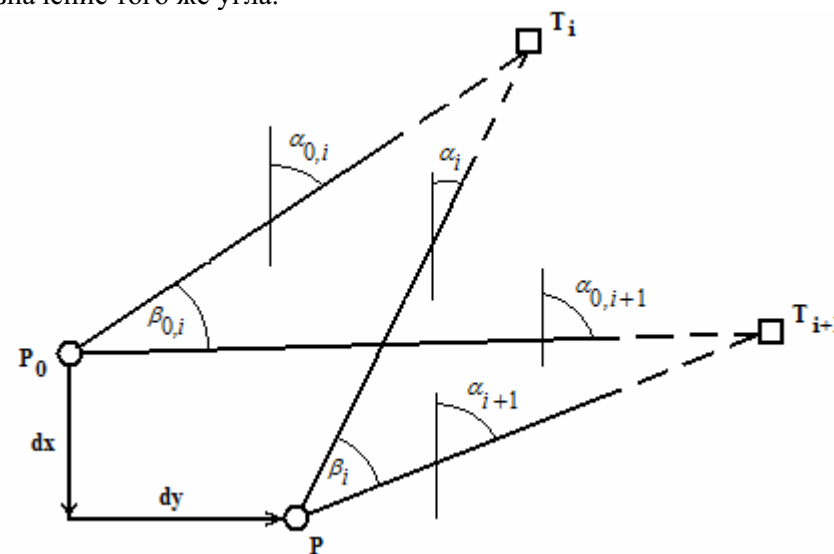


рис. 20

Уравненное значение измеренного угла β_i , можно представить как измеренное значение плюс поправка, полученная из уравнивания

$$\beta_i = \beta'_i + v_i \tag{107}$$

Равенств вида (107) будет столько, сколько было измерено углов при точке P .

Перепишем равенство (107) в виде

$$\beta_i - \beta'_i = v_i \tag{108}$$

Окончательное значение угла β_i можно выразить и по-другому, через приближенное значение $\beta_{0,i}$; и поправку к нему $\delta\beta_i$:

$$\beta_i = \beta_{0,i} + \delta\beta_i \tag{109}$$

Подставим значение угла β_i в формулу (108)

$$\delta\beta_i + \beta_{0,i} - \beta'_i = v_i \tag{110}$$

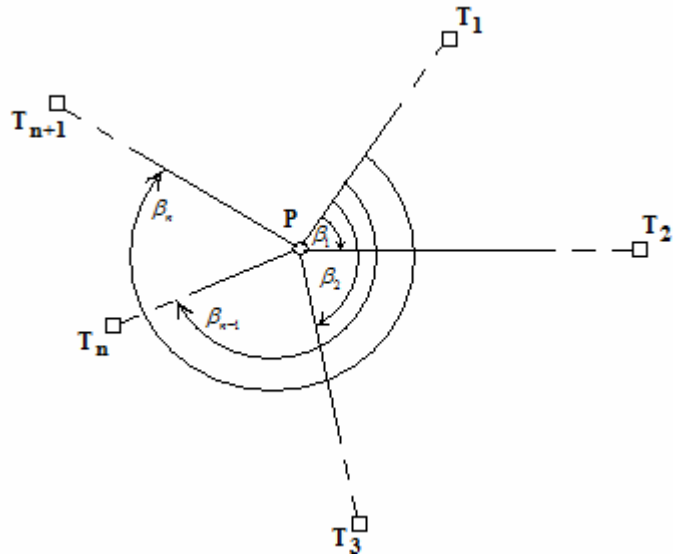


рис. 19

Согласно этому способу необходимые неизвестные или параметры [координаты пункта P (x и y)] представляются по формулам (36) в виде приближенных значений X_0 и Y_0 и поправок к ним δx и δy . Для определения приближенных координат X_0 и Y_0 используют обратную однократную засечку.

После этого приступают к уравнивательным вычислениям. Первым этапом уравнивания является составление параметрических уравнений поправок, в которых необходимо представить измеренные величины как функции выбранных неизвестных.

Для этого воспользуемся рис. 82. Пусть P_0 с координатами X_0 и Y_0 — приближенное положение искомой точки, а P с координатами x и y — окончательное (уравненное) положение этой же точки; пусть $\alpha_{0,i}$ и $\alpha_{0,i+1}$ — приближенные дирекционные углы направлений PT_i и PT_{i+1} , а α_i и α_{i+1} — окончательные дирекционные углы тех же направлений, $\beta_{0,i}$ — приближенное зна-

2 Вычисления расстояний и дирекционных углов направлений T_1T_2 и T_1T_3 .

При вычислении используется обратная геодезическая задача.

Данные/направления	T_1T_2	T_1T_3
Y_i	19828.770	20387.400
Y_1	18716.330	18716.330
$Y(i) - Y_1$	1112.440	1671.070
X_i	13830.867	12609.053
X_1	13194.362	13194.362
$X(i) - X_1$	636.505	-585.309
$tg(T_1T_i)$	1.7477318	-2.8550219
$\alpha(T_1T_i)$	$60^\circ 13' 23.1''$	$109^\circ 18' 11.9''$
$\cos(T_1T_i)$	0.49662411	-0.33056903
$\sin(T_1T_i)$	0.86796572	0.94378182
L_i	1281.664	1770.611

3 Вычисление дирекционного угла линии S (T_1P).

Для этого, из треугольников T_1T_2P и T_1T_3P находим промежуточный угол μ_1 и μ_2 .

Данные углы необходимы для нахождения углов λ_1 и λ_2 , с помощью которых находим искомый дирекционный угол линии S (T_1P).

А) Нахождение угла $\mu(i)$ — используется теорема синусов

Данные/треугольник	T_1T_2P	T_1T_3P
$\gamma(i)$	$42^\circ 17' 17.0''$	$91^\circ 13' 6.0''$
$\sin \gamma(i)$	0.67285831	0.99977393
L_i	1281.664	1770.611
$S_{\text{среднее}}$	65.314	65.314
$\sin \mu(i)$	0.03428926	0.03687969
$\mu(i)$	$1^\circ 57' 54.1''$	$2^\circ 6' 48.7''$

Б) Нахождение угла λ_1 и λ_2 (используется свойство суммы углов треугольника = 180°) и дирекционного угла φ линии S (T_1P).

Данные/треугольник	T_1T_2P	T_1T_3P
$\gamma(i) + \mu(i)$	44° 15' 11.1"	93° 19' 54.7"
$\lambda(i)$	135° 44' 48.9"	86° 40' 05.3"
$\varphi(T_1P)$	195° 58' 12.1"	195° 58' 17.2"
$\varphi(T_1P)_{\text{среднее}}$	195° 58' 14.7"	

4. Вычисление координат P

cos(φ)	-0.961402	sin(φ)	-0.275146
S*cos(φ)	-62.793	S*sin(φ)	-17.971
Xp=X _{T1} + Scos(φ)	13131.569	Yp=Y _{T1} +Ssin(φ)	18698.359

5. Оценка точности измерений.

А) Вычисление m_s и M_s

Данные/треугольник	T_1T_2P	T_1T_3P
(mb/b)*s	0.00326560	0.00326583
[(mb/b)*s] ²	0.00001066	0.00001067
ctg(alfa)	1.06279382	0.54351452
ctg(epsilon)	0.78416279	0.73153950
ctg(alfa)+ctg(eps)	1.84695661	1.27505402
ctg(eps) ²	0.61491128	0.53515004
m_s^2	0.00012102	0.00006991
m_s	0.01100106	0.01100106
$m_{s_1}^2+m_{s_2}^2$	0.00019093	
пред(s1-S2)	0.02763539	
M_s (м)	0.00690885	

По полученным с чертежа расстояниям s_1 , s_2 и s_3 по формуле (89) вычисляют величины градиентов r_i , которые затем в удобном масштабе откладывают от точки P по направлениям PT_1 , PT_2 и PT_3 . В обращенном треугольнике $T'_1T'_2T'_3$ измеряют стороны σ_1 , σ_2 , σ_3 и высоту h_1 или h_2 , или h_3 , а далее вычисляют его площадь F по одной из формул

$$F = \frac{1}{2} \sigma_1 h_1 = \frac{1}{2} \sigma_2 h_2 = \frac{1}{2} \sigma_3 h_3 ,$$

после чего находят M .

Величины r , а следовательно, и σ и h имеют размерность с/м. С учетом выражений для площади F формула (103) может быть преобразована к виду

$$M = m_\beta \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}} \quad (106) ,$$

где h_2 и h_3 — высоты обращенного треугольника, опущенные на стороны σ_2 и σ_3 (см. рис. 18).

При использовании формулы (106) вычисления несколько сокращаются.

Обратная многократная засечка (уравнение по измеренным углам)

Будем считать, что при определяемой точке P измерено n углов (рис. 81) при визировании на $n + 1$ пункт государственной геодезической сети, причем каждый угол измерен отдельно. Наличие избыточных измерений, как уже было отмечено, приводит к уравнительным вычислениям по методу наименьших квадратов параметрическим способом.

Анализируя формулы (103) и (104), приходим к выводу, что задача о четвертой точке решается с наибольшей точностью в том случае, если:

а) определяемая точка лежит внутри треугольника, образованного исходными пунктами;

б) определяемая точка лежит вне треугольника, образованного исходными пунктами, но против вершины между продолжениями двух сторон.

Сомнительные результаты получаются тогда, когда определяемая точка находится вблизи окружности, проходящей через три исходных пункта. Задача становится неопределенной, если определяемая точка лежит на окружности.

При практическом применении формул (103) и (104) поступают следующим образом. На лист бумаги наносят все исходные пункты и определяемую точку в масштабе, обеспечивающем практическое определение расстояний от искомой точки до исходных пунктов с необходимой точностью, и прочерчивают направления PT_1 , PT_2 и PT_3 (рис. 18).

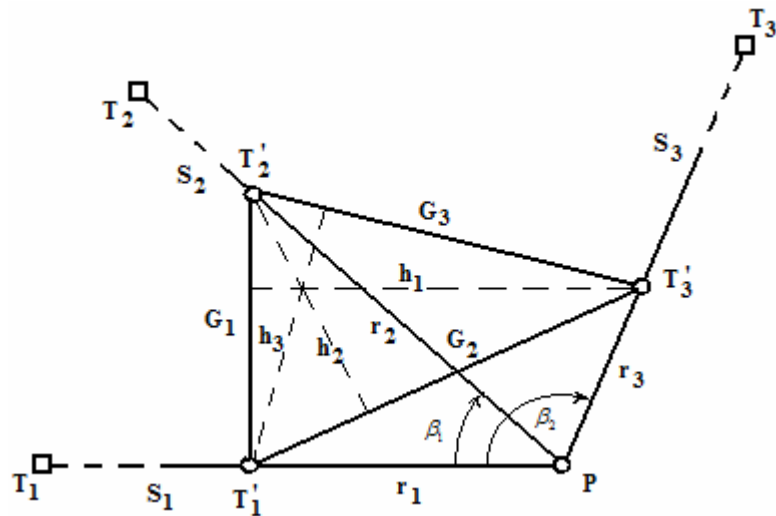


рис. 18

Б) Вычисление $M\phi$ и $M\rho$

пред($\phi_1 - \phi_2$)	14.00"
$M\phi$	3.54"
$M\rho^2$	0.00004899
$M\rho$	0.0069 (м)

2. Пункт, к которому производится привязка, доступен для угловых, но не доступен для линейных измерений.

Таким пунктом может быть, например, геодезический знак, построенный на крыше какого-либо дома, что часто имеет место в городах.

В этом случае величина угла λ измеряется и задача сводится к вычислению неприступного расстояния $T_1P=S$, которое определяется из решения двух треугольников APT_1 и BPT_1 . Углы ε_1 и ε_2 в этих треугольниках измеряются непосредственно.

Привязка к отдалённым пунктам государственной геодезической сети

Координаты пункта могут быть определены прямой и комбинированной засечками с двух исходных пунктов или обратной засечкой по трем исходным пунктам. В этих случаях координаты пункта будут получены по необходимому числу исходных пунктов и измерений. *Засечки, в которых используется необходимое число измерений, называют однократными.* В этом случае координаты, определенные из однократных засечек, будут бесконтрольными.

Для того чтобы иметь контроль правильности определения координат, найденных из засечек, необходимо использовать избыточные измерения. *Засечки, в которых для получения координат пункта используют избыточное число пунктов и измерений, называют многократными.*

Прямой многократной засечкой называется определение положения пункта путем измерения углов или направлений

на определяемый пункт не менее чем с трех твердых пунктов, координаты которых известны.

Обратной многократной засечкой называется определение положения пункта путем измерения на этом пункте углов или направлений не менее чем на четыре твердых пункта, координаты которых известны.

Наличие избыточных измерений в многократных засечках приводит к уравнительным вычислениям.

Метод наименьших квадратов рассматривает два основных способа уравнивания: параметрический и коррелятивный. Уравнивание можно выполнять любым из этих способов. Оба дают одни и те же значения для уравниваемых величин, но объем вычислительного труда при решении конкретных задач будет разный.

При уравнивании результатов измерений в многократных засечках предпочтение отдают параметрическому способу. В этом способе число нормальных уравнений, которое предстоит решать при любом числе избыточных измерений, будет равно числу неизвестных. В многократных засечках неизвестных всегда два — координаты x и y искомого пункта.

Известно, что в параметрическом способе уравнивания каждое неизвестное (параметр) представляют в виде суммы двух слагаемых: приближенного значения и поправки к нему.

Для искомым координат x и y пункта P это будет выражаться так:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \delta x \\ y &= y_0 + \delta y \end{aligned} \right\} \quad (36) .$$

Приближенные значения координат x_0 и y_0 получают из решения однократных засечек, а поправки δx и δy — из уравнивания результатов измерений по методу наименьших квадратов параметрическим способом с использованием дифференциальных формул дирекционного угла.

$$r_1 = \frac{\rho}{s_1} ,$$

тогда

$$a = \frac{\rho}{D} = const \quad (105) .$$

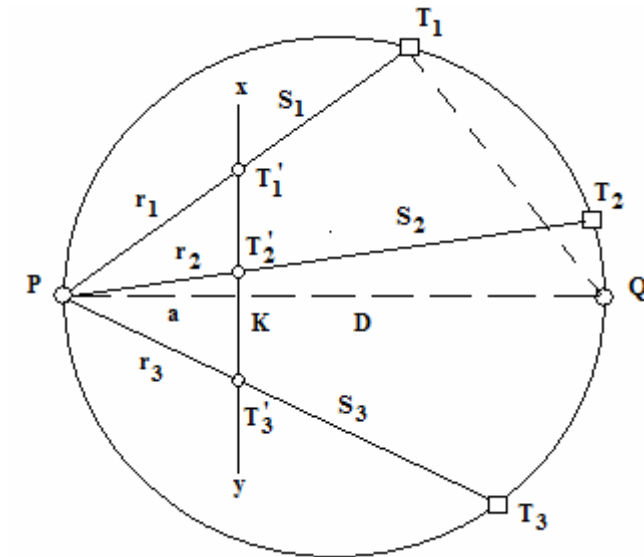


рис. 17

Следовательно, отрезок a есть величина, постоянная для всех хорд, выходящих из точки P , а в этом случае точки T'_1, T'_2 и T'_3 лежат на прямой xy и $F = 0$. Тогда формулы (103) и (104) дают: $M = \infty, M_1 = \infty$, т. е. когда искомая точка лежит на окружности, проходящей через три данные точки, определить ее положение при помощи измеренных углов β_1 и β_2 нельзя. Поэтому эту окружность и называют опасным кругом.

При выводе формулы (103) предполагалось, что углы β_1 и β_2 при определяемой точке измерялись каждый отдельно.

Если при определяемой точке углы измеряли способом круговых приемов, то, применяя к этому случаю аналогичный вывод, можно получить

$$M_1^2 = \frac{1}{4F^2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) m_n^2 \quad (104),$$

где

m_n — среднеквадратическая погрешность направления,

$$m_n = \frac{m_\beta}{\sqrt{2}}.$$

Сравнивая формулы (103) и (104) и полагая, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, найдем

$$M_1 = M \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,87M.$$

Следовательно, измеряя углы при определяемой точке способом круговых приемов, при прочих равных условиях получим положение этой точки несколько точнее, чем при измерении отдельных углов.

Рассмотрим случай, когда определяемая точка лежит на окружности проходящей через три данные точки T_1 , T_2 и T_3 (рис. 17).

Проведем через точку P диаметр $PQ = D$ и опустим из точки T_1' перпендикуляр $ху$. Тогда из двух подобных треугольников $PT_1'K$ и PT_1Q можно записать

$$\frac{a}{r_1} = \frac{s_1}{D}.$$

Но согласно (89)

Дифференциальные формулы дирекционного угла

Пусть имеем линию AB (рис. 9, а), координаты ее концов $x_A y_A$ и $x_B y_B$ заданы. Дирекционный угол этой линии можно вычислить по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Предположим, что точка B переместилась в положение B' , координаты этой точки получили приращение dx и dy . В соответствии с этим дирекционный угол α линии AB изменится на величину $\Delta\alpha$, но так как dx_B и dy_B — величины малые, то можно считать, что угол α изменился на величину $d\alpha$ ($\Delta\alpha \approx d\alpha$).

Установим связь между изменением координат конечной точки отрезка прямой и изменением дирекционного угла этого отрезка.

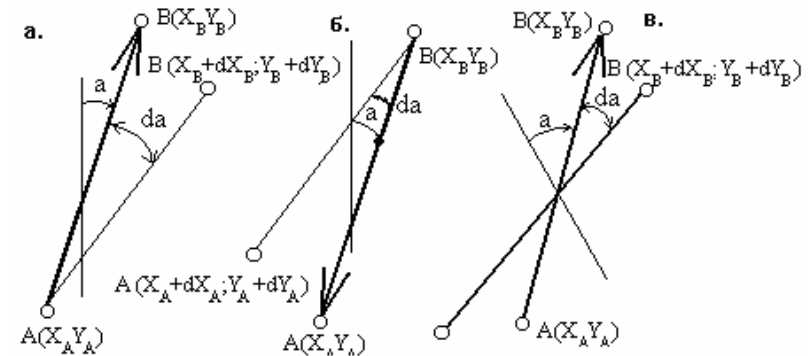


рис. 9

Дифференцируя формулу для вычисления α , получим

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\rho} = \frac{(x_B - x_A)dy_B - (y_B - y_A)dx_B}{(x_B - x_A)^2}.$$

Так как

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= s \cos \alpha \\ y_B - y_A &= s \sin \alpha, \end{aligned}$$

то можно записать

$$d\alpha = \rho \left(\frac{\cos \alpha}{s} dy_B - \frac{\sin \alpha}{s} dx_B \right).$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} (a) &= -\rho \sin \alpha \\ (b) &= \rho \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (38),$$

тогда получим изменение дирекционного угла

$$d\alpha = \frac{(a)}{s} dx_B + \frac{(b)}{s} dy_B \quad (39).$$

Если конечная точка B линии AB сохраняет свое положение, а перемещается начальная точка A , изменяются ее координаты на dx_A и dy_A (8, б), то очевидно, что между изменением координат точки A и изменением дирекционного угла линии AB существует связь, выражаемая формулой (39), только коэффициенты при dx_A и dy_A будут иметь знаки, противоположные знакам при коэффициентах dx_B и dy_B . В этом случае формула 39 примет вид

$$d\alpha = -\frac{(a)}{s} dx_A - \frac{(b)}{s} dy_A \quad (40).$$

Формулы (39) и (40) называются **дифференциальными формулами дирекционного угла**.

В общем случае (рис. 8, в), когда изменяется положение обоих концов линии AB , дифференциальная формула принимает вид

$$d\alpha = -\frac{(a)}{s} dx_A - \frac{(b)}{s} dy_A + \frac{(a)}{s} dx_B + \frac{(b)}{s} dy_B \quad (41).$$

Выражение для N с учетом (86) можно записать так:

$$N = r_2 r_3 \sin \beta_3 + r_1 r_2 \sin \beta_1 - r_1 r_3 \sin \beta_2 \quad (100)$$

Величины, входящие в формулы (98) и (100), можно представить графически. Для этого на направлениях PT_1 , PT_2 , PT_3 (см. рис. 16) отложим градиенты r_1 , r_2 , r_3 . Полученные точки соединим между собой и образуем треугольник $T_1'T_2'T_3'$, который назовем *обращенным*. Обозначим стороны этого треугольника через σ_1 , σ_2 , σ_3 . Из рис. 16 следует, что правые части формул (98) представляют собой квадраты сторон обращенного треугольника, т. е.

$$A_1^2 + B_1^2 = \sigma_3^2 \quad A_2^2 + B_2^2 = \sigma_2^2 \quad (101),$$

а выражение, стоящее в правой части формулы (100), — удвоенную площадь обращенного треугольника. Обозначим эту площадь через F и запишем

$$N = 2F \quad (102).$$

С учетом выражений (101) и (102), формуле (97) можно придать вид

$$M^2 = \frac{1}{4F^2} (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) m_\beta^2 \quad (103).$$

Следовательно, *точность определения положения точки, полученной обратной однократной засечкой, зависит от площади обращенного треугольника, а также от величины его двух сторон σ_2 и σ_3 .*

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= A_1 dx - B_1 dy \\ d\beta_2 &= A_2 dx - B_2 dy \end{aligned} \quad (92).$$

Решая уравнения (92) способом определителей относительно неизвестных dx и dy , получим

$$dx = \frac{1}{N} (B_2 d\beta_1 - B_1 d\beta_2) \quad dy = \frac{1}{N} (-A_2 d\beta_1 + A_1 d\beta_2) \quad (93),$$

где

$$N = A_1 B_2 - A_2 B_1 \quad (94).$$

Дифференциалы dx и dy заменим случайными ошибками, от которых затем перейдем к средним квадратическим погрешностям и, учитывая, что $m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = m_\beta$ получим

$$m_x^2 = \frac{1}{N^2} (B_1^2 + B_2^2) m_\beta^2; \quad m_y^2 = \frac{1}{N^2} (A_1^2 + A_2^2) m_\beta^2 \quad (95).$$

Так как

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 \quad (96),$$

то

$$M^2 = \frac{1}{N^2} \left\{ (A_1^2 + B_1^2) + (A_2^2 + B_2^2) \right\} m_\beta^2 \quad (97).$$

Подсчитав величины $(A_1^2 + B_1^2)$, $(A_2^2 + B_2^2)$ и N согласно обозначениям (91), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 + B_1^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \\ A_2^2 + B_2^2 &= r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_1) \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

$$N = r_2 r_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + r_1 r_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + r_1 r_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \quad (99).$$

Прямая однократная засечка

Обратимся к рисунку 10.

Точки A и B – имеют координаты (X_a, Y_a) и (X_b, Y_b) . С этих точек измерены углы b_1 и b_2 на определяемую точку P . Требуется определить координаты точки P (X_p, Y_p)

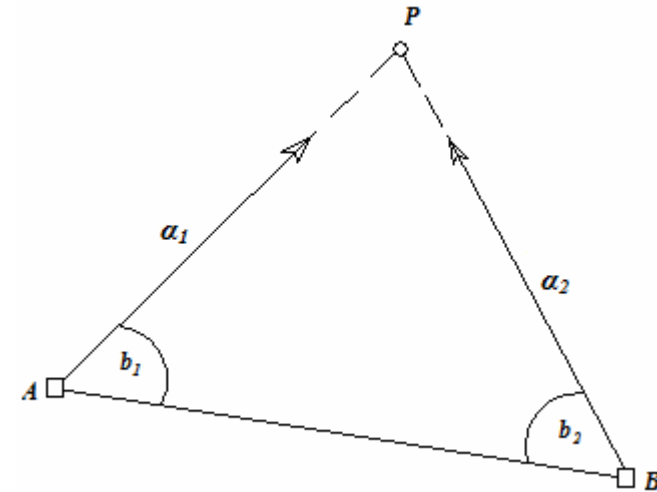


Рис. 10

Решение задачи сводится к определению координат точки P – точки пересечения двух прямых AP и BP заданных дирекционными углами α_1 и α_2 .

Для нахождения этих дирекционных углов, необходимо определить дирекционный угол направления AB .

Дирекционный угол направления AB найдем из решения обратной геодезической задачи.

$$\alpha_{AB} = \text{arctg} \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}.$$

Тогда дирекционный угол направления AP (α_1) для рис.10 найдем вычитанием из дирекционного угла направления AB измеренного угла b_1

$$\alpha_1 = \alpha_{AB} - b_1.$$

Аналогично получим дирекционный угол направления BP

$$\alpha_2 = \alpha_{AB} - 180 + b_2.$$

Составим уравнения для данных направлений. Из решения обратной геодезической задачи следует:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha_1) = \frac{Y_P - Y_A}{X_P - X_A} \\ \operatorname{tg}(\alpha_2) = \frac{Y_P - Y_B}{X_P - X_B} \end{cases} \quad (42).$$

Преобразуем уравнения (42)

$$\begin{cases} (X_P - X_A) \operatorname{tg}(\alpha_1) = Y_P - Y_A \\ (X_P - X_B) \operatorname{tg}(\alpha_2) = Y_P - Y_B \end{cases},$$

раскроем скобки

$$\begin{cases} X_P \operatorname{tg}(\alpha_1) - X_A \operatorname{tg}(\alpha_1) = Y_P - Y_A \\ X_P \operatorname{tg}(\alpha_2) - X_B \operatorname{tg}(\alpha_2) = Y_P - Y_B \end{cases}$$

и решим их совместно. Для этого вычтем из первого уравнения второе.

$$X_P (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) - X_A \operatorname{tg} \alpha_1 + X_B \operatorname{tg} \alpha_2 = Y_B - Y_A.$$

Выполнив преобразования, получим окончательный результат относительно X_P

$$X_P = \frac{Y_B - Y_A + X_A \operatorname{tg}(\alpha_1) - X_B \operatorname{tg}(\alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1) - \operatorname{tg}(\alpha_2)} \quad (43).$$

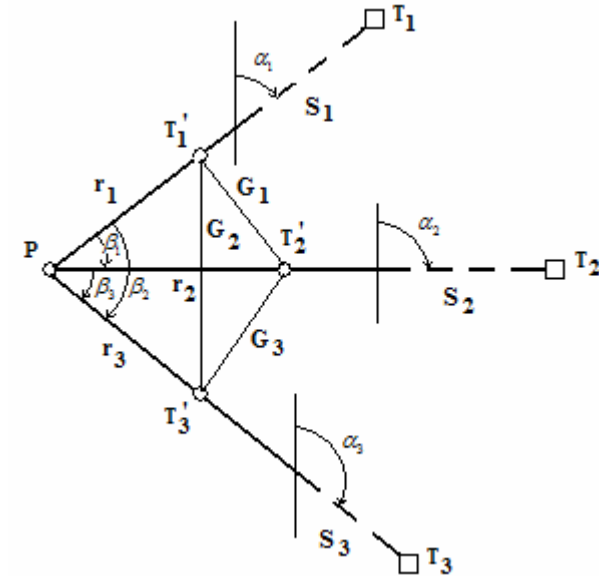


рис. 16

С учетом обозначения (89) перепишем уравнения (88)

$$\begin{cases} d\beta_1 = (r_2 \sin \alpha_2 - r_1 \sin \alpha_1) dx - (r_2 \cos \alpha_2 - r_1 \cos \alpha_1) dy \\ d\beta_2 = (r_3 \sin \alpha_3 - r_1 \sin \alpha_1) dx - (r_3 \cos \alpha_3 - r_1 \cos \alpha_1) dy \end{cases} \quad (90).$$

Для сокращения записи введем обозначения:

$$\left. \begin{cases} r_2 \sin \alpha_2 - r_1 \sin \alpha_1 = A_1 \\ -(r_2 \cos \alpha_2 - r_1 \cos \alpha_1) = B_1 \\ r_3 \sin \alpha_3 - r_1 \sin \alpha_1 = A_2 \\ -(r_3 \cos \alpha_3 - r_1 \cos \alpha_1) = B_2 \end{cases} \right\} \quad (91),$$

в соответствии с которыми уравнениям (90) можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} y - y_3 &= (x - x_3) \operatorname{tg} \alpha_3 \\ y - y_1 &= (x - x_1) \operatorname{tg} \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (84) .$$

Для заключительного контроля решения задачи необходимо вторично определить дирекционный угол по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y_2 - y}{x_2 - x} \quad (85) .$$

Оценка точности положения пункта, определённого обратной однократной засечкой

Пусть для определения координат пункта P измерены углы β_1 и β_2 (рис. 15), которые можно представить как

$$\beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1; \quad \beta_2 = \alpha_3 - \alpha_1 \quad (86) ,$$

или после дифференцирования

$$d\beta_1 = d\alpha_2 - d\alpha_1; \quad d\beta_2 = d\alpha_3 - d\alpha_1 \quad (87) .$$

В равенствах (87) выразим величины $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3$ согласно дифференциальной формуле дирекционного угла через dx и dy и получим

$$\left. \begin{aligned} d\beta_1 &= \left(\frac{\rho \sin \alpha_2}{s_2} - \frac{\rho \sin \alpha_1}{s_1} \right) dx - \left(\frac{\rho \cos \alpha_2}{s_2} - \frac{\rho \cos \alpha_1}{s_1} \right) dy \\ d\beta_2 &= \left(\frac{\rho \sin \alpha_3}{s_3} - \frac{\rho \sin \alpha_1}{s_1} \right) dx - \left(\frac{\rho \cos \alpha_3}{s_3} - \frac{\rho \cos \alpha_1}{s_1} \right) dy \end{aligned} \right\} \quad (88) .$$

Обозначим

$$\frac{\rho}{s_i} = r_i \quad (89)$$

и по аналогии с прямой однократной засечкой назовем градиентом направления.

Для определения Y_P можно подставить в одну из формул (42) вычисленное значение X_P и решить уравнение относительно Y_P . Если требуется аналитическая формула для вычисления Y_P , то можно взять обратную величину от формулы (42), затем решить эти уравнения совместно и получить Y_P .

$$Y_P = \frac{X_B - X_A + Y_A \operatorname{ctg}(\alpha_1) - Y_B \operatorname{ctg}(\alpha_2)}{\operatorname{ctg}(\alpha_1) - \operatorname{ctg}(\alpha_2)} \quad (44) .$$

Формулы (43) и (44) являются решением прямой однократной засечки.

2. Существуют и другие решения данной задачи.

Формула Юнга

Рассмотрим случай, когда координаты пункта P определяются по координатам x_A и y_A , x_B и y_B пунктов A и B , видимость между которыми имеется; углы A и B на пунктах измерены.

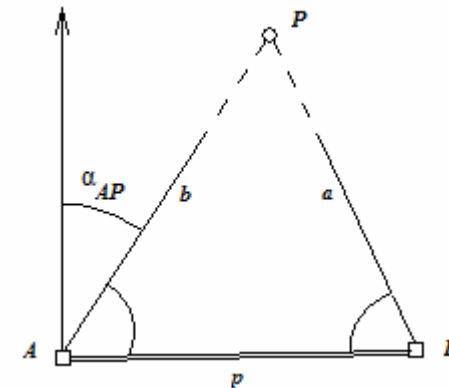


рис. 11

Из рис. 11 следует, что

$$\Delta x_{AP} = b \cos \alpha_{AP} = x_P - x_A$$

$$\Delta y_{AP} = b \sin \alpha_{AP} = y_P - y_A \cdot$$

Дирекционный угол α_{AP} определим как разность углов

$$\alpha_{AP} = \alpha_{AB} - A \cdot,$$

при этом дирекционный угол α_{AB} получим по координатам. Пунктов A и B из решения обратной геодезической задачи. Далее можно записать

$$\begin{aligned} x_P - x_A &= b \cos(\alpha_{AB} - A) \\ y_P - y_A &= b \sin(\alpha_{AB} - A) \cdot, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_P - x_A &= b(\cos \alpha_{AB} \cos A + \sin \alpha_{AB} \sin A) \\ y_P - y_A &= b(\sin \alpha_{AB} \cos A - \cos \alpha_{AB} \sin A) \end{aligned} \right\} (45).$$

Известно, что

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{AB} = x_B - x_A &= \rho \cos \alpha_{AB}; \quad \cos \alpha_{AB} = \frac{x_B - x_A}{\rho} \\ \Delta y_{AB} = y_B - y_A &= \rho \sin \alpha_{AB}; \quad \sin \alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{\rho} \end{aligned} \right\} (46).$$

Подставляя выражения (46) в формулы (45), получим

$$\left. \begin{aligned} x_P - x_A &= \frac{b}{p} \sin A \left(\frac{x_B - x_A}{\sin A} \cos A + y_B - y_A \right) \\ y_P - y_A &= \frac{b}{p} \sin A \left(\frac{y_B - y_A}{\sin A} \cos A - x_B + x_A \right) \end{aligned} \right\} (47).$$

Из треугольника ABP следует, что

$$\frac{b}{p} \sin A = \frac{\sin B}{\sin(A+B)} = \frac{\sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B} \cdot$$

Умножив обе части этого равенства на $\sin A$, получим

$$\frac{b}{p} \sin A = \frac{\sin A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B} \cdot,$$

$$\begin{aligned} y_3 \operatorname{ctg} \beta_2 - y_2 \operatorname{ctg} \beta_1 - y_1 \operatorname{ctg} \beta_2 + y_1 \operatorname{ctg} \beta_1 - y_3 \operatorname{tg} \alpha_1 + y_2 \operatorname{tg} \alpha_1 &= \\ = x_3 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_2 + x_2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_2 + x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_1 + x_3 - x_2 \end{aligned}$$

Из первого уравнения (77) определим y и подставим его в полученное уравнение:

$$\begin{aligned} y_3 \operatorname{ctg} \beta_2 - y_2 \operatorname{ctg} \beta_1 - y_1 \operatorname{ctg} \beta_2 + x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_2 + y_1 \operatorname{ctg} \beta_1 - x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_1 + y_2 \operatorname{tg} \alpha_1 - y_3 \operatorname{tg} \alpha_1 &= \\ = x_3 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_2 - x_2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \beta_1 + x_3 - x_2 \cdot \end{aligned}$$

Приведя подобные члены, получим уравнение с одним неизвестным $\operatorname{tg} \alpha_1$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 \{ (x_2 - x_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + (x_1 - x_3) \operatorname{ctg} \beta_2 - (y_3 - y_2) \} &= \\ = (y_2 - y_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + (y_1 - y_3) \operatorname{ctg} \beta_2 + (x_3 - x_2) \end{aligned}$$

из которого и определим его

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{(y_2 - y_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + (y_1 - y_3) \operatorname{ctg} \beta_2 + (x_3 - x_2)}{(x_2 - x_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + (x_1 - x_3) \operatorname{ctg} \beta_2 - (y_3 - y_2)} \quad (81).$$

Полученное уравнение называется **формулой Деламбра**.

Координаты x и y можно определить, продолжив решение системы уравнений (77). Но проще определить их другим путем.

Сначала определить дирекционные углы α_2 и α_3 .

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_3 &= \alpha_1 + \beta_2 \end{aligned} \right\} (82),$$

а затем дважды определить координаты x и y из прямой засечки, вычисляемой по формулам Гаусса,

$$\left. \begin{aligned} x - x_3 &= \frac{(x_1 - x_3) \operatorname{tg} \alpha_1 - (y_1 - y_3)}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_3} \\ x - x_1 &= \frac{(x_1 - x_3) \operatorname{tg} \alpha_3 - (y_1 - y_3)}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_3} \end{aligned} \right\} (83),$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 - y &= (x_1 - x)tg\alpha_1 \\ y_2 - y &= (x_2 - x)tg(\alpha_1 + \beta_1) \\ y_3 - y &= (x_3 - x)tg(\alpha_1 + \beta_2) \end{aligned} \right\} \quad (77),$$

в которых три неизвестных: x , y и α_1 . Решив эту систему, получим дирекционный угол α_1 и координаты x и y . Сначала преобразуем выражение

$$tg(\alpha_1 + \beta_1) = \frac{tg\alpha_1 + tg\beta_1}{1 - tg\alpha_1 tg\beta_1}.$$

Затем помножим числитель и знаменатель правой части на $ctg\beta_1$

$$tg(\alpha_1 + \beta_1) = \frac{tg\alpha_1 ctg\beta_1 + 1}{ctg\beta_1 - tg\alpha_1} \quad (78).$$

Подставим правую часть выражения (78) во второе уравнение (77) и, преобразуя полученное равенство, получим

$$\begin{aligned} y_2 ctg\beta_1 - y_2 tg\alpha_1 - y ctg\beta_1 + y tg\alpha_1 &= \\ = x_2 tg\alpha_1 ctg\beta_1 + x_2 - x tg\alpha_1 ctg\beta_1 - x & \end{aligned} \quad (79).$$

Выполняя аналогичные преобразования в третьем уравнении (77), этому уравнению придадим вид (78), а затем преобразуем к виду (79):

$$\begin{aligned} y_3 ctg\beta_2 - y_3 tg\alpha_1 - y ctg\beta_2 + y tg\alpha_1 &= \\ = x_3 tg\alpha_1 ctg\beta_2 + x_3 - x tg\alpha_1 ctg\beta_2 - x & \end{aligned} \quad (80).$$

Из уравнения (80) вычтем уравнение (79):

или после деления числителя и знаменателя правой части на $\sin A \sin B$ —

$$\frac{b}{p} \sin A = \frac{1}{ctg B + ctg A} \quad (48).$$

Полученное выражение подставим в равенство (47), которое после этого несколько преобразуем, и получим окончательно

$$\left. \begin{aligned} x_p &= x_A + \frac{(x_B - x_A)ctg A + (y_B - y_A)}{ctg A + ctg B} \\ y_p &= y_A + \frac{(y_B - y_A)ctg A + (x_A - x_B)}{ctg A + ctg B} \end{aligned} \right\} \quad (49).$$

Аналогичными рассуждениями можно получить формулы вида (49) относительно пункта B . Формулами (49) часто пользуются в следующей видоизмененной записи:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= \frac{x_A ctg B + x_B ctg A - y_A + y_B}{ctg A + ctg B} \\ y_p &= \frac{y_A ctg B + y_B ctg A + x_A - x_B}{ctg A + ctg B} \end{aligned} \right\} \quad (50).$$

Формулы вида (49, 50) носят название **формул котангенсов углов треугольника, или формул Юнга**.

При применении формул (50) необходимо при обозначении исходных данных и измеренных углов **соблюдать определенный порядок**: буквой P должен обозначаться определяемый пункт, буквой A — левый исходный пункт, буквой B — правый исходный пункт, если стоять на стороне AB лицом к пункту P ; углы треугольника будут соответственно при точках A и B , что вызывает некоторые неудобства при вычислении.

Оценка точности положения пункта, определённого прямой однократной засечкой

Пусть точка P (рис. 12) — истинное положение определяемого пункта, а точка P_1 — полученное из решения. Примем за характеристику точности определения положения

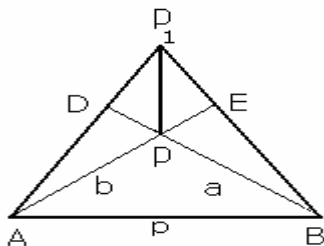


рис. 12

пункта P среднеквадратическую погрешность M_p линейного смещения PP_1 .

Обозначим точки пересечения направлений AP_1 и BP_1 с истинными направлениями BP и AP соответственно буквами D и E . По малости величины PP_1 по сравнению с AP и BP фигуру $PDPE$ можно принять за параллелограмм и написать

$$PP_1^2 = PD^2 + PE^2 \pm 2PD \cdot PE \cos P \quad (51).$$

Истинные ошибки измеренных углов A и B обозначим через Δ_A и Δ_B и, приняв

$$\sin BAP = \frac{\Delta_A}{\rho}, \quad \sin PBE = \frac{\Delta_B}{\rho},$$

найдем

$$PB = b \frac{\Delta_A}{\rho \sin P} \quad (52),$$

$$PE = a \frac{\Delta_B}{\rho \sin P} \quad (53)$$

и

Пункт P	17184.391	18144.581	-4.543512	662.938
Пункт T5	16536.949	18287.079	102°24'45.2"	
	647.442	-142.498		

Обратная однократная засечка

Задача определения положения точки на плоскости по трем данным точкам обратной засечкой известна под названием задачи Потенота. Об этой задаче имеется обширная литература и предложено более ста способов ее решения. Рассмотрим несколько наиболее простых и удобных способов получения координат четвертой точки по трем исходным.

1. Способ с применением формулы Делабра. Координаты пунктов триангуляции T_1 , T_2 и T_3 известны (рис. 16); на определяемом пункте P измерены углы β_1 и β_2 а от направления T_1 , принятого за начальное; требуется определить координаты пункта P .

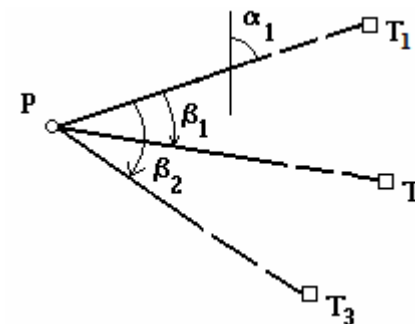


рис. 16

Обозначим дирекционный угол первого направления α_1 и непосредственно по рис. 16, применяя формулу обратной геодезической задачи, составим уравнения

определяемого пункта необходимо вычислить веса:

$$P_x = D/[bb] = 3557.7$$

$$P_y = D/[aa] = 7137.8$$

Тогда

$$m_x = \frac{m_a}{10\sqrt{P_x}} = 0.005m$$

$$m_y = \frac{m_a}{10\sqrt{P_y}} = 0.004m$$

В вычислениях присутствует цифра 10. В нашем примере она появилась из вычисления коэффициентов (а) и (b).

10. Вычисление дирекционных углов и расстояний по уравненным координатам

Данные вычисления являются окончательным контролем всех вычислений.

№ пунктов	Yi (м)	Xi (м)	tg(α) / α ₁₀	S ₁₀ (м)
Пункт P Пункт T1	17184.391 17056.497 127.894	18144.581 18515.328 -370.747	-0.344962 160°58'3.0"	392.186
Пункт P Пункт T2	17184.391 17599.190 -414.799	18144.581 18359.752 -215.171	1.927765 242°34'57.5"	467.287
Пункт P Пункт T3	17184.391 17274.216 -89.825	18144.581 17814.943 329.638	-0.272497 344°45'25.8"	341.657
Пункт P Пункт T4	17184.391 16842.223 342.168	18144.581 17731.160 413.421	0.827650 39°36'46.3"	536.652

$$PP_1^2 = b^2 \frac{\Delta_A^2}{\rho^2 \sin^2 P} + a^2 \frac{\Delta_B^2}{\rho^2 \sin^2 P} \pm 2 \frac{\Delta_A \Delta_B ab}{\rho^2 \sin^2 P} \cos P \quad (54).$$

Чтобы определить среднеквадратическую погрешность M_p линейного смещения PP_1 , предположим, что определение пункта P было повторено n раз и имеется n равенств вида (54). Сложив эти равенства и разделив затем обе части суммарного равенства на число n , получим

$$M_p^2 = \frac{m_A^2 b^2}{\rho^2 \sin^2 P} + \frac{m_B^2 a^2}{\rho^2 \sin^2 P} \pm \frac{2 [\Delta_A \Delta_B] \cos P}{n \rho^2 \sin P} ab,$$

где m_A, m_B — средние квадратические погрешности измеренных значений углов A и B .

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_A \Delta_B]}{n} = 0$ (свойство компенсации случайных погрешностей), тогда

$$M_p^2 = \frac{m_A^2 b^2}{\rho^2 \sin^2 P} + \frac{m_B^2 a^2}{\rho^2 \sin^2 P} \quad (55).$$

Углы A и B обычно измеряются с одинаковой точностью, т. е.

$$m_A = m_B = m_\beta;$$

тогда

$$M_p = \frac{m_\beta}{\rho \sin P} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (56),$$

или, обозначив $a = s_1$ и $b = s_2$,

$$M_p = \frac{m_\beta}{\rho \sin P} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \quad (57).$$

Формулы (56) можно представить и в другом виде, если учесть, что

$$a = p \frac{\sin A}{\sin P} \quad \text{и} \quad b = p \frac{\sin B}{\sin P} .$$

Тогда

$$M_p = p \frac{m_\beta \sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B}}{\rho \sin^2 P} \quad (58) .$$

Формула (57) или (58) показывает, что *среднеквадратическая погрешность положения определяемой точки будет увеличиваться главным образом с удалением ее от исходных пунктов (с увеличением s_1 и s_2) и уменьшением базиса засечки p* . Из анализа этих формул следует, что наименьшая погрешность будет при прочих равных условиях в том случае, если угол засечки P будет близок к 90° .

Оценку точности положения пункта, определенного прямой однократной засечкой, можно также выполнить графически с помощью так называемого обращенного (или инверсионного) треугольника. Ограничимся здесь изложением практического ее применения.

На листе бумаги с нанесенной координатной сеткой по координатам вершин A , B и P строится прямая засечка в масштабе, обеспечивающем необходимую точность определения расстояний между искомой точкой и исходными пунктами (рис. 13). Затем, графически определив расстояния s_1 и s_2 от искомой точки до исходных пунктов, вычисляют величины $r_i = \frac{\rho''}{s_i}$,

которые называются *градиентами направлений*.

Найденные градиенты откладывают на направлениях PA и PB от точки P и получают точки a и b , которые соединяют. Построенный треугольник aPb называется **обращенным** (или инвертным, инверсионным).

Доказано, что формулу (56) можно преобразовать к виду

6. Вычисление поправок v и уравнивание дирекционных углов.

Поправки вычисляют в соответствии с формулой $a_i \delta x + b_i \delta y + l_i = v_i$

N	adx	bdy	l	v	$\alpha_{изм}$	$\alpha_{испр}$	V^2
1	0.57	-2.27	-0.00	-1.70	160°58'04.7"	160°58'03.0"	2.9
2	-1.31	-0.93	0.00	-2.24	242°34'59.7"	242°34'57.5"	5.0
3	-0.53	2.66	-1.90	0.23	344°45'25.6"	344°45'25.8"	0.1
4	0.82	1.35	-6.60	-4.43	39°36'50.7"	39°36'46.3"	19.6
5	1.01	-0.31	1.10	1.81	102°24'43.4"	102°24'45.2"	3.3
						$[v^2] = 30.8$	

7. Контроль вычисления поправок.

Контролем вычисления поправок служит уравнение $[a] dx + [b] dy + [l] = [v]$

$[a] dx$	$[b] dy$	$[l]$	$[v]$
-3.3	-14.3	48.4	30.8

Убедившись в правильности составления и решения нормальных уравнений поправок можно приступить к окончательному вычислению уравненных координат определяемого пункта и выполнить оценку точности измерений.

8. Окончательно уравненные координаты пункта P

$$\begin{aligned} X \text{ урavn.} &= X' + 0.1 dx = 18144.581 \\ Y \text{ урavn.} &= Y' + 0.1 dy = 17184.391 \end{aligned}$$

9. Оценка точности

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}} = 3.2''$$

Для определения среднеквадратических погрешностей вычисленных координат

Итак:

А. Основной определитель:

$$D = [aa][bb] - [ab][ab]$$

В. Определитель для столбца X

$$D_x = [ab][bl] - [bb][al]$$

С. Определитель для столбца Y

$$D_y = [ab][al] - [aa][bl]$$

Вычислив определители, найдем поправки в приближенные координаты:

$$\delta_x = \frac{D_x}{D} \quad \text{и} \quad \delta_y = \frac{D_y}{D}$$

Сведем данные вычисления в таблицу:

[aa][bb]	25833328.5	[ab][bl]	-147197.4	[ab][al]	46094.4
-[ab][ab]	220526.3	-[bb][al]	706656.8	-[aa][bl]	-1124759.4
D	25612802.2	D _x	-853854.1	D _y	1170853.8
		dx = -0.033		dy = 0.046	

С учетом того, что при вычислении коэффициентов (a) и (b) выполнено деление на 10000, а при вычислении коэффициентов a и b S взято в километрах, размерность вычисленных поправок – дециметры. Для перевода в метры, их необходимо домножить на 0.1

$$\begin{aligned} dx &= -0.033 & P_x &= D/[bb] & 3557.7 \\ dy &= 0.046 & P_x &= D/[aa] & 7137.8 \end{aligned}$$

Перед тем, как вычислить окончательно уравненные координаты определяемого пункта, необходимо вычислить поправки в измеренные дирекционные углы и выполнить контроль вычисления поправок, что будет являться окончательным контролем правильности составления нормальных уравнений.

$$M_p = m_\beta \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{4F^2}} \quad (59),$$

где r1, r2 — градиенты направлений; F - площадь обращенного треугольника.

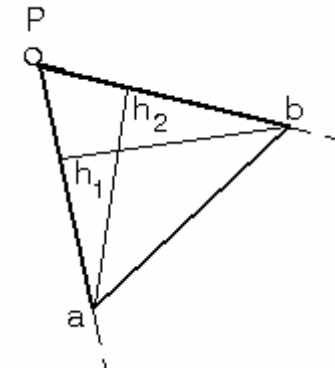


рис. 13

Величина F может быть определена из выражений

$$F = \frac{1}{2} h_1 r_1 = \frac{1}{2} h_2 r_2,$$

где h1 и h2 — высота обращенного треугольника.

С учетом этого формула (59) получит вид

$$M_p = m_\beta \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}} \quad (60).$$

Измерив на чертеже высоты h1 и h2 обращенного треугольника, которые суть перпендикуляры, опущенные из точек a и b на стороны Pa и Pb, определяют по формуле (60) среднюю квадратическую погрешность положения точки P.

Прямая многократная засечка

Необходимо определить координаты пункта P способом прямой многократной засечки, для чего с каждого исходного пункта T1, T2, ..., Tn произведено визирование на точку P и

измерены углы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ между линиями с известными дирекционными углами $\alpha_a, \alpha_b, \dots, \alpha_n$ и направлениями на точку P (рис. 14).

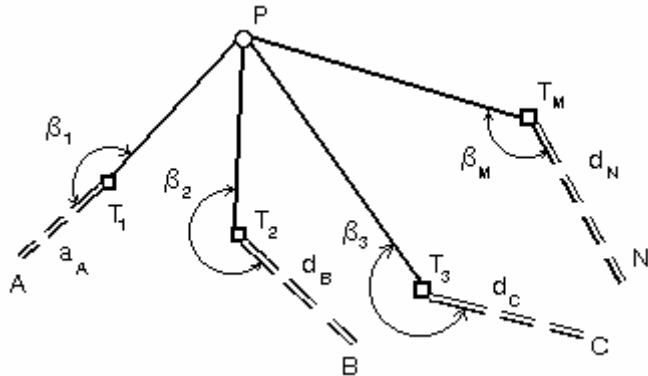


рис. 14

Как было установлено в разделе «Привязка к отдалённым пунктам государственной геодезической сети», уравнивать результаты измерений в прямой многократной засечке целесообразнее параметрическим способом.

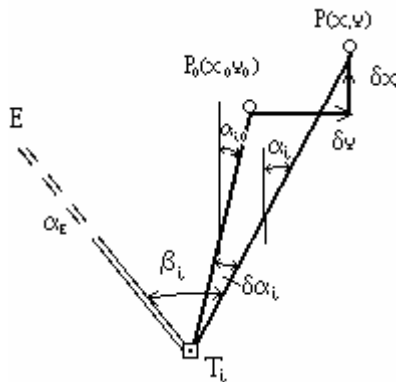


рис. 15

Для нахождения приближенных координат X_0 и Y_0 точки P , используя необходимое число измерений, по формулам,

4. Вычисление коэффициентов нормальных уравнений

N напр	aa	ab	al	as	bb	bl	bs
T1	294.1	852.7	0.0	1146.9	2472.0	0.0	3324.7
T2	1535.3	-796.4	0.0	738.9	413.1	-0.0	-383.3
T3	251.9	924.5	-30.2	1146.3	3392.7	-110.7	4206.6
T4	600.5	-725.6	161.7	36.7	876.7	-195.4	-44.3
T5	923.4	203.2	-33.4	1093.2	44.7	-7.4	240.6
$\Sigma \Sigma$	3588.3	469.6	98.2	4161.9	7199.3	-313.5	7344.3

При вычислении коэффициентов нормальных уравнений поправки выполняется подсчет сумм коэффициентов $as=aa+ab+al$ и $bs=ab+bb+bl$. Контролем правильности вычислений коэффициентов нормальных уравнений является равенство $[as]=[aa]+[ab]+[al]$ и $[bs]=[ab]+[bb]+[bl]$.

5. Решение нормальных уравнений

I. $[aa]dx + [ab]dy + [al] = 0$
 II. $[ab]dx + [bb]dy + [bl] = 0$

Или в числовом выражении для нашего примера

$$3588.3dx + 469.6dy + 98.2 = 0$$

$$469.6dx + 7199.3dy + (-313.5) = 0$$

Данные уравнения решают способом детерминантов. Для этого необходимо найти определители системы уравнений, с учетом правил линейной алгебры и учетом расстановки знаков при вычислении миноров:

$$(-1)^{(n-1)} * (\text{вычисление определителя})$$

Где n – номер “вычеркнутого” столбца.

В. Вычисление свободных членов уравнений поправок

Пункт	α_{i0}	α_i (изм)	$l = \alpha_{i0} - \alpha_i$	l^2
Пункт Т1	160°58' 4.7"	160°58' 4.7"	-0.0	0.00
Пункт Т2	242°34'59.7"	242°34'59.7"	0.0	0.00
Пункт Т3	344°45'23.7"	344°45'25.6"	-1.9	3.61
Пункт Т4	39°36'44.1"	39°36'50.7"	-6.6	43.56
Пункт Т5	102°24'44.5"	102°24'43.4"	1.1	1.21

3. Вычисление коэффициентов параметрических уравнений поправок

Для этого дирекционные углы направлений на пункт Р округляют до целых минут. Для того, чтобы не работать с большими числами при ручном вычислении, коэффициенты (а) и (b) делят на 10000, а при вычислении коэффициентов а и b расстояние S берется в километрах.

N	альфа	(a)	(b)	Sкм	a	b	l	a+b+l
T1	160°58'	-6.73	-19.50	0.392	-17.2	-49.7	-0.0	-66.9
T2	242°35'	18.31	-9.50	0.467	39.2	-20.3	0.0	18.9
T3	344°45'	5.42	19.90	0.342	15.9	58.2	-1.9	72.2
T4	39°37'	-13.15	15.89	0.537	-24.5	29.6	-6.6	-1.5
T5	102°25'	-20.14	-4.43	0.663	-30.4	-6.7	1.1	-36.0
Сумма:					-17.0	11.1	-7.4	-13.3

указанным в разделе «Прямая однократная засечка», решают прямую однократную засечку.

Далее согласно параметрическому способу уравнивания следует составить уравнения поправок, в которых представить измеренные величины как функции выбранных неизвестных.

Для этого рассмотрим рис. 15. Пусть приближенному значению точки P_0 полученному из решения прямой однократной засечки, соответствуют координаты X_0 и Y_0 . Точка P_0 близка к искомому положению точки P , координаты которой x и y .

Для линии $T_i P_0$ можно вычислить значение ее длины $S_{i,0}$ и дирекционного угла $\alpha_{i,0}$.

Уравненное значение дирекционного угла линии $T_i P$ обозначим через α_i , тогда

$$\alpha_i = \alpha_{i,0} + \delta\alpha_i \quad (61)$$

По дирекционному углу α_E линии $T_i E$ и измеренному углу β'_i найдем «измеренное значение» α'_i дирекционного угла линии $T_i P$

$$\alpha'_i = \alpha_E + \beta'_i \quad (62)$$

Уравненное значение дирекционного угла будет равно измененному значению α'_i плюс поправка v'_i :

$$\alpha_i = \alpha'_i + v_i \quad (63)$$

Запишем уравнение (63) несколько иначе:

$$\alpha_i - \alpha'_i = v_i \quad (64)$$

Уравнений вида (64) будет столько, сколько измерено углов, т. е. $i = 1, 2, \dots, n$. Однако в уравнении (64) пока измеренные величины не являются функцией неизвестных. Чтобы к этому перейти, сделаем следующее.

Подставим в уравнение (64) значение α_i , из уравнения (61):

$$\delta\alpha_i + \alpha_{i,0} - \alpha'_i = v_i \quad (65)$$

и обозначим

$$\alpha_{i,0} - \alpha'_i = l_i \quad (66) .$$

Величина l_i будет свободным членом уравнения поправок. Далее запишем выражение (65) с учетом (66)

$$\delta\alpha_i + l_i = v_i \quad (67) .$$

Теперь в уравнении (67) от величины $d\alpha_i$, перейдем к величинам dx и dy , пользуясь дифференциальной формулой дирекционного угла, согласно которой

$$d\alpha = \rho \left(\frac{\cos \alpha}{s} dy + \frac{\sin \alpha}{s} dx \right) .$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} (a) &= -\rho \sin \alpha \\ (b) &= \rho \cos \alpha \end{aligned} \right\} ,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{(a_i)}{s_{i,0}} &= a_i \\ \frac{(b_i)}{s_{i,0}} &= b_i \end{aligned} \right\} ,$$

$$\delta\alpha_i = \frac{(a_i)}{s_{i,0}} \delta x + \frac{(b_i)}{s_{i,0}} \delta y \quad (68) .$$

Заменим в уравнении (67) $\delta\alpha_i$, на выражение (68) и с учетом обозначений получим

$$a_i \delta x + b_i \delta y + l_i = v_i \quad (69) ,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Уравнения (69) будут **параметрическими уравнениями поправок**, записанными в окончательном виде. Таких уравнений будет столько, сколько наблюдаемых направлений на точку P .

Предполагая измерения углов на исходных пунктах равноточными, можно поставить при решении этих уравнений условие: $[v^2] = \min$. Согласно методу наименьших квадратов оно приведет нас к двум нормальным уравнениям вида

2. Многократная засечка

Для вычисления свободных членов уравнений поправок необходимо вычислить приближенные дирекционные углы направлений. Для этого используются приближенные координаты из прямой однократной засечки, вычисленные в предыдущей табличке. Для вычисления приближенных дирекционных углов и расстояний используется обратная геодезическая задача.

а. Вычисление приближенных дирекционных углов и расстояний

№ пунктов	Y _i (м)	X _i (м)	tg(r) / α _{i0}	S _{i0} (м)
Пункт P Пункт T1	17184.386 17056.497 127.889	18144.584 18515.328 -370.744	-0.344953 160°58' 4.7"	392.182
Пункт P Пункт T2	17184.386 17599.190 -414.804	18144.584 18359.752 -215.168	1.927816 242°34'59.7"	467.289
Пункт P Пункт T3	17184.386 17274.216 -89.830	18144.584 17814.943 329.641	-0.272508 344°45'23.7"	341.662
Пункт P Пункт T4	17184.386 16842.223 342.163	18144.584 17731.160 413.424	0.827632 39°36'44.1"	536.652
Пункт P Пункт T5	17184.386 16536.949 647.437	18144.584 18287.079 -142.495	-4.543586 102°24'44.5"	662.933

1. Прямая однократная засечка

Элемент ф-лы	Результат	Элемент ф-лы	Результат
y(T2)	17599.190	x(T2)	18359.752
-y(T1)	17056.497	-x(T1)	18515.328
x(T1)*tg(alfa1)	-6386.918	y(T1)*ctg(alfa1)	-49445.858
-x(T2)*tg(alfa2)	35394.223	y(T2)*ctg(alfa2)	9129.082
summa	-41238.4479	summa	-58730.5160
tg(alfa1)	-0.34495300	ctg(alfa1)	-2.89894567
-tg(alfa2)	1.92781596	-ctg(alfa2)	0.51872171
summa	-2.27276896	summa	-3.41766738
X(P) =	18144.584	Y(P) =	17184.386

$$\begin{cases} [aa]\delta x + [ab]\delta y + [al] = 0 \\ [ab]\delta x + [bb]\delta y + [bl] = 0 \end{cases} \quad (70)$$

Решив эти уравнения способом определителей, получим

$$\begin{cases} \delta x = \frac{[ab][bl] - [bb][al]}{[aa][bb] - [ab]^2} = \frac{D_x}{D} \\ \delta y = \frac{[ab][al] - [aa][bl]}{[aa][bb] - [ab]^2} = \frac{D_y}{D} \end{cases} \quad (71)$$

где

$$D = [aa][bb] - [ab]^2 \quad (72)$$

Уравненные значения координат определим по формуле (36), а уравненные значения измеренных дирекционных углов — по формуле (64), значения поправок v_i , для которой получим из уравнений (69).

Зная координаты пункта P (x и y), найдем

$$tg \alpha_i = \frac{y - y_i}{x - x_i} \quad (73)$$

а затем α_i . Значение углов α_i ; должно совпадать (в пределах точности вычислений) со значением углов, вычисленных по формуле (67). Это является заключительным контролем уравнивания.

Оценка точности произведенных измерений состоит в подсчете среднеквадратической погрешности угла

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[v^2]}{n - k}} \quad (74)$$

оценки точности уравненных значений координат — в подсчете их средних квадратических погрешностей

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{m_\beta}{\sqrt{P_x}} \\ m_y &= \frac{m_\beta}{\sqrt{P_y}} \end{aligned} \right\} \quad (75) .$$

Веса уравненных значений координат при этом определяются из выражений

$$\left. \begin{aligned} P_y &= \frac{D}{[aa]} \\ P_x &= \frac{D}{[bb]} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

При вычислении P_x и P_y следует иметь в виду, что вес в данном случае — поименованная величина. Размерность $[aa]$ выражается размерностью величины a в квадрате. Согласно выражениям (68)

размерность $|a| = \frac{1''}{1M}$, поэтому

$$P_x = P_y = \left(\frac{1''}{1M} \right)^2 .$$

Размерность m_x так же, как и m_y ,

$$m_x = \frac{1''}{\sqrt{\left(\frac{1''}{M} \right)^2}} .$$

Производить привязку полигонометрии к пунктам государственной геодезической сети способом прямой многократной засечки невыгодно с экономической точки зрения. При этом способе необходимо измерять углы на всех пунктах сети, которые, как правило, расположены на значительных

расстояниях и друг от друга и от пункта, координаты которого определяют.

Однако если работа проводится по хорошо продуманному плану с учетом дальнейших перспектив по сгущению обоснования, то можно значительно сократить время на переезды с одного пункта на другой, совместив измерения углов для привязочных работ с рекогносцировкой.

Прямая засечка чаще находит применение при засечке боковых пунктов с пунктов полигонометрических ходов, когда измерение углов для определения координат боковых пунктов будет совмещено с измерением углов поворота при проложении полигонометрического хода.

Пример вычислений. Прямая многократная засечка.

Исходные данные

N направл.	X	Y	alfa
T1	18515.328	17056.497	160°58'04.7"
T2	18359.752	17599.190	242°34'59.7"
T3	17814.943	17274.216	344°45'25.6"
T4	17731.160	16842.223	39°36'50.7"
T5	18287.079	16536.949	102°24'43.4"

Используя формулы вычисления координат из прямой однократной засечки $X_P = \frac{Y_B - Y_A + X_A \operatorname{tg}(\alpha_1) - X_B \operatorname{tg}(\alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1) - \operatorname{tg}(\alpha_2)}$ и

$Y_P = \frac{X_B - X_A + Y_A \operatorname{ctg}(\alpha_1) - Y_B \operatorname{ctg}(\alpha_2)}{\operatorname{ctg}(\alpha_1) - \operatorname{ctg}(\alpha_2)}$, вычислим приближенные

координаты точки P. Для этого выберем из исходных данных два пункта, направления с которых на определяемый пункт P пересекаются под углом 60° – 90° и распишем элементы формул в ниже приведенной табличке. В нашем случае подходят пункты T1 и T2.