

Повышение обусловленности системы уравнений при обработке результатов фазовых измерений спутниковыми приемниками

© 2020 г. Е.Б. Ключин, И.М. Кравчук*

Московский государственный университет геодезии и картографии, Москва, Россия

*i_kravchuk@edu.miigaik.ru

Increasing the conditionality of the system of equations when processing the results of phase measurements by satellite receivers

E.B. Klyushin, I.M. Kravchuk*

Moscow State University Geodesy and Cartography, Moscow, Russia

*i_kravchuk@edu.miigaik.ru

Received Desember 2, 2019

Revised Mars 16, 2020

Accepted June 1, 2020

Keywords: coordinates, distance, frequency, measurements, period, phase cycles, satellite navigation system, speed of light, wavelength, GLONASS, GPS.

Summary. In the article «Analysis of the algorithm of processing the results of satellite measurements by the phase method» [1] the original system of equations describing the results of phase measurements by satellite receivers in a mathematical record was published. In the article it was noted that the system of equations is poorly conditioned, since many unknowns enter these equations with almost identical coefficients. In this article, the authors theoretically justified the transformation of the satellite navigation system is not an analogue of the phase rangefinder, and has its own theoretical basis. The method of processing allowing to exclude labor-consuming procedure of ambiguity resolution is offered. It is shown that the results of phase measurements allow to accurately calculate the time intervals between epochs of measurements on the clock of satellites, which provides an accurate calculation of the change in the position of satellites during the measurement period.

Citation: Klyushin E.B., Kravchuk I.M. Increasing the conditionality of the system of equations when processing the results of phase measurements by satellite receivers. *Izvestia vuzov «Geodesy and Aerophotosurveying»*. 2020, 64 (3): 269–276. [In Russian]. DOI:10.30533/0536-101X-2020-64-3-269-276.

Поступила 2 декабря 2019 г.

После доработки 16 марта 2020 г.

Принята к печати 1 июня 2020 г.

Ключевые слова: ГЛОНАСС, длина волны, измерения, координаты, период, спутниковая навигационная система, скорость света, частота, фазовые циклы.

Доказано, что фазовый метод измерений с использованием спутниковой навигационной системы не является аналогом фазового дальномера, а имеет собственную теоретическую базу. Предлагается метод обработки, позволяющий исключить трудоёмкую процедуру разрешения неоднозначности. Показано, что результаты фазовых измерений позволяют точно вычислять интервалы времени между эпохами измерений по часам спутников, что обеспечивает точное вычисление изменений положения спутников в период измерений.

Для цитирования: Е.Б. Ключин, И.М. Кравчук Повышение обусловленности системы уравнений при обработке результатов фазовых измерений спутниковыми приемниками // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2020. Т. 64. № 3. С. 269–276. DOI:10.30533/0536-101X-2020-64-3-269-276.

В опубликованной в [1] статье «Анализ алгоритма обработки результатов спутниковых измерений фазовым методом» приведена оригинальная система уравнений описывающих в математической записи результаты фазовых измерений спутниковыми приёмниками, в ней

также было отмечено, что система уравнений плохо обусловлена, так как многие неизвестные входят в эти уравнения практически с одинаковыми коэффициентами. В данной статье авторы теоретически обоснованно произвели преобразование системы уравнений до уровня

обеспечивающего надёжное вычисление иско- мых величин.

Особенности алгоритма обработки резуль- татов фазовых измерений спутниковым приём- ником были рассмотрены в работах [1□3]. В этих статьях показано, что методика рас- чётов, опубликованная в работах [4□9], слабо обоснована и представлена как набор удачных находок, хотя, справедливости ради следует признать, что итоговые формулы, не имеющие строгого теоретического обоснования, обе- спечивают хорошие практические результаты. Теория дальнометрии зарождалась для слу- чая, когда излучатель и приёмник излучения были неподвижны, а в этом случае рассто- яние и длина пути сигнала равны между со- бой. Эти особенности обработки результатов фазовых измерений детально рассмотрены в статье [2, 3], что послужило основой для на- писания теоретически обоснованной системы уравнений объединяющих результаты фазовых измерений с координатами спутников и приём- ников [1]. Такая система уравнений состоит из большого числа уравнений, но она плохо об- условлена, так как многие неизвестные входят в эти уравнения практически с одинаковыми коэффициентами.

Цель данной статьи — теоретически обо- снованно произвести преобразование си- стемы уравнений [1] для повышения её об- условленности до уровня, обеспечивающего надёжное вычисление иско- мых величин. Система уравнений, составленная по резуль- татам фазовых измерений, в сокращённой за- писи имеет вид:

$$\begin{aligned} T_{1,k,0}^S + \tau n_{1,k,i} + \Delta T_{1,k,i} &= T_{1,i}^r + \delta T_{1,i}^r; \\ T_{2,k,0}^S + \tau n_{2,k,i} + \Delta T_{2,k,i} &= T_{2,i}^r + \delta T_{2,i}^r. \end{aligned} \quad (1)$$

В формуле (1) использованы следующие индексы: l — номер приёмника, $l = 1, 2$, так как при определении разности координат ΔX , ΔY и ΔZ участвуют только два приёмника (ба- зовый и ровер), то и в дальнейших выводах будем рассматривать только пару приёмников; k — номер спутника, $k = 1, 2, 3 \dots$; i — номер эпо- хи регистрации фазовых циклов, $i = 0, 1, 2, 3 \dots$;

$T_{l,k,i}^S$ — время излучения сигнала со спут- ника с номером k , регистрируемое приём- ником с номером l на эпоху i (эпоха по часам спутника); $T_{l,i}^r$ — время приёмы сигналов со спутников приёмником l на эпоху i (эпоха по часам приёмника); $\Delta T_{l,k,i}$ — время распростра- нения сигнала от спутника k до приёмника l на эпоху i (время задержки сигнала на трассе); $\delta T_{l,i}^r$ — поправка в часы приёмника l на эпоху i ; τ — длительность периода несущей частоты; $n_{l,k,i}$ — число периодов, пришедших на антенну приёмника с номером l со спутника k , на эпоху i .

В развёрнутом виде система уравнений (1) для приёмника с номером 1 имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} &\text{эпоха 0} \\ &T_{1,1,0} + \Delta T_{1,1,0} = T_{1,0} + \delta T_{1,0}^r; \\ &T_{1,2,0} + \Delta T_{1,2,0} = T_{1,0} + \delta T_{1,0}^r; \\ &T_{1,3,0} + \Delta T_{1,3,0} = T_{1,0} + \delta T_{1,0}^r; \\ &\dots\dots\dots \\ &T_{1,k,0} + \Delta T_{1,k,0} = T_{1,0} + \delta T_{1,0}^r; \\ \\ &\text{эпоха 1} \\ &T_{1,1,0} + \tau n_{1,1,1} + \Delta T_{1,1,1} = T_{1,1} + \delta T_{1,1}^r; \\ &T_{1,2,0} + \tau n_{1,2,1} + \Delta T_{1,2,1} = T_{1,1} + \delta T_{1,1}^r; \\ &T_{1,3,0} + \tau n_{1,3,1} + \Delta T_{1,3,1} = T_{1,1} + \delta T_{1,1}^r; \\ &\dots\dots\dots \\ &T_{1,k,0} + \tau n_{1,k,1} + \Delta T_{1,k,1} = T_{1,1} + \delta T_{1,1}^r; \\ \\ &\text{эпоха 2} \\ &T_{1,1,0} + \tau n_{1,1,2} + \Delta T_{1,1,2} = T_{1,2} + \delta T_{1,2}^r; \\ &T_{1,2,0} + \tau n_{1,2,2} + \Delta T_{1,2,2} = T_{1,2} + \delta T_{1,2}^r; \\ &T_{1,3,0} + \tau n_{1,3,2} + \Delta T_{1,3,2} = T_{1,2} + \delta T_{1,2}^r; \\ &\dots\dots\dots \\ &T_{1,k,0} + \tau n_{1,k,2} + \Delta T_{1,k,2} = T_{1,2} + \delta T_{1,2}^r; \\ \\ &\dots\dots\dots \\ \\ &\text{эпоха } i \\ &T_{1,1,0} + \tau n_{1,1,i} + \Delta T_{1,1,i} = T_{1,i} + \delta T_{1,i}^r; \\ &T_{1,2,0} + \tau n_{1,2,i} + \Delta T_{1,2,i} = T_{1,i} + \delta T_{1,i}^r; \\ &T_{1,3,0} + \tau n_{1,3,i} + \Delta T_{1,3,i} = T_{1,i} + \delta T_{1,i}^r; \\ &\dots\dots\dots \\ &T_{1,k,0} + \tau n_{1,k,i} + \Delta T_{1,k,i} = T_{1,i} + \delta T_{1,i}^r. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для приёмника 2 система уравнений будет аналогичной, изменится лишь первый индекс членов уравнений с 1 на 2.

Приведём пример расчёта числа уравнений для одного приёмника при длительности сеанса наблюдений ΔT_1 , интервале регистрации фазовых циклов Δt_1 и количестве одновременно наблюдаемых спутников k . Общее число уравнений $m_{\text{ур}}$, составленных по результатам измерений одним приёмником, будет равно

$$m_{\text{ур}} = k \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta t_1} + 1 \right).$$

Например, при длительности сеанса наблюдений $\Delta T_1 = 20$ мин, интервале времени регистрации накопления фазовых циклов $\Delta t_1 = 10$ с и количестве одновременно наблюдаемых спутников $k = 5$, общее число уравнений, составленных по результатам спутниковых измерений каждым приёмником, равно

$$m_{\text{ур}} = 5 \left(\frac{20 \cdot 60}{10} + 1 \right) = 605.$$

Определяемые величины — число моментов излучения начал цугов волн для одного приёмника, например, для первого $T_{1,k,0}$, оно равно количеству наблюдаемых спутников k ; число определяемых координат ровера 3; число точного значения моментов регистрации фазовых циклов (число поправок в часы одного приёмника) равно $\frac{\Delta T_1}{\Delta t_1} + 1$.

Следовательно, общее число неизвестных в системе уравнений для одного приёмника

$$m_{\text{неизв}} = \frac{\Delta T_1}{\Delta t_1} + k + 4$$

и применительно к ранее рассмотренному примеру $m_{\text{неизв}} = \frac{20 \cdot 60}{10} + 5 + 4 = 129$.

Несмотря на очень большое число избыточных измерений (в данном примере 476), однозначно решить систему уравнений (2) крайне сложно. Система уравнений (2) очень похожа на систему уравнений, решаемую при кодовых измерениях, с той лишь разницей, что при кодовых измерениях время излучения псевдошумового сигнала со спутника после разрешения неоднозначности — величина известная, а при фазовых измерениях — время излучения нача-

ла цугов волн может быть определено приближённо, но при этом известно изменение времени излучения $tn_{1,k,i}$ (интервалы времени между эпохами по часам спутников) с очень высокой точностью. При определённых условиях это позволит вычислить изменения координат спутника вплоть до миллиметров. Позднее этот вопрос будет рассмотрен подробнее.

При описании алгоритма обработки результатов спутниковых измерений рекомендуют образовывать так называемые первые, вторые, а иногда и третьи разности, представляя данный приём как оригинальную находку авторов алгоритма. В действительности, ничего нового в этом приёме нет, так как система линейных уравнений обычно решается методом последовательного исключения неизвестных путём образования разностей между уравнениями. При этом, какие разности называть первыми, а какие — вторыми, практического значения не имеет. Главная цель этих действий — исключение из системы уравнений неизвестных, которые плохо обусловлены, сохраняя лишь необходимые неизвестные.

В системе уравнений (2) точное значение времени регистрации накопления фазовых циклов $T_{l,i} + \delta T_{l,i}^r$ вычислить достаточно сложно, но его значение практически не требуется в большинстве инженерно-геодезических задач. Выразим значение $T_{l,i} + \delta T_{l,i}^r$ для одного из наблюдаемых спутников и подставим его в остальные уравнения в пределах каждой эпохи измерений. В результате таких преобразований систему уравнений (2) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_{1,k,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,k,i} - n_{1,1,i}) + \Delta T_{1,k,i} - \Delta T_{1,1,i} &= 0; \\ T_{2,k,0} - T_{2,1,0} + \tau(n_{2,k,i} - n_{2,1,i}) + \Delta T_{2,k,i} - \Delta T_{2,1,i} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

По сути, система уравнений (3) характеризует условие одновременности измерений фазовых циклов в каждой из эпох и в обоих приёмниках по часам этих приёмников. В конструкциях приёмников соблюдению одновременности измерений фазовых циклов от спутников в каждой эпохе уделено особое внимание, и это отражено в системе уравнений (3).

В развёрнутом виде система уравнений для первого приёмника будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{эпоха } 0 \\
 &T_{1,2,0} - T_{1,1,0} + \Delta T_{1,2,0} - \Delta T_{1,1,0} = 0; \\
 &T_{1,3,0} - T_{1,1,0} + \Delta T_{1,3,0} - \Delta T_{1,1,0} = 0; \\
 &T_{1,4,0} - T_{1,1,0} + \Delta T_{1,4,0} - \Delta T_{1,1,0} = 0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 &T_{1,k,0} - T_{1,1,0} + \Delta T_{1,k,0} - \Delta T_{1,1,0} = 0; \\
 \\
 &\text{эпоха } 1 \\
 &T_{1,2,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,2,1} - n_{1,1,1}) + \Delta T_{1,2,1} - \Delta T_{1,1,1} = 0; \\
 &T_{1,3,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,3,1} - n_{1,1,1}) + \Delta T_{1,3,1} - \Delta T_{1,1,1} = 0; \\
 &T_{1,4,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,4,1} - n_{1,1,1}) + \Delta T_{1,4,1} - \Delta T_{1,1,1} = 0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 &T_{1,k,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,k,1} - n_{1,1,1}) + \Delta T_{1,k,1} - \Delta T_{1,1,1} = 0; \\
 \\
 &\text{эпоха } 2 \\
 &T_{1,2,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,2,2} - n_{1,1,2}) + \Delta T_{1,2,2} - \Delta T_{1,1,2} = 0; \\
 &T_{1,3,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,3,2} - n_{1,1,2}) + \Delta T_{1,3,2} - \Delta T_{1,1,2} = 0; \\
 &T_{1,4,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,4,2} - n_{1,1,2}) + \Delta T_{1,4,2} - \Delta T_{1,1,2} = 0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 &T_{1,k,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,k,2} - n_{1,1,2}) + \Delta T_{1,k,2} - \Delta T_{1,1,2} = 0; \\
 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \\
 &\text{эпоха } i \\
 &T_{1,2,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,2,i} - n_{1,1,i}) + \Delta T_{1,2,i} - \Delta T_{1,1,i} = 0; \\
 &T_{1,3,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,3,i} - n_{1,1,i}) + \Delta T_{1,3,i} - \Delta T_{1,1,i} = 0; \\
 &T_{1,4,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,4,i} - n_{1,1,i}) + \Delta T_{1,4,i} - \Delta T_{1,1,i} = 0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 &T_{1,k,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,k,i} - n_{1,1,i}) + \Delta T_{1,k,i} - \Delta T_{1,1,i} = 0.
 \end{aligned} \right\} (3a)$$

В системе уравнений (3a) общее количество уравнений для одного приёмника сократится на $i+1$ уравнений, настолько же сократится и количество неизвестных. В нашем примере общее число уравнений для одного приёмника составит 484, а число неизвестных сократится до $k+3$ (в данном примере 8).

В этом и заключается суть образования первых разностей: исключение из системы уравнений поправок в часы приёмника. При этом образовались и разности фазовых циклов. Нетрудно убедиться в том, что:

$$\begin{aligned}
 n_{1,k,i} - n_{1,1,i} &= n_{1,k,i}^\Phi - n_{1,1,i}^\Phi; \\
 n_{2,k,i} - n_{2,1,i} &= n_{2,k,i}^\Phi - n_{2,1,i}^\Phi,
 \end{aligned}$$

где $n_{1,k,i}$ и $n_{2,k,i}$ — общее число периодов, поступивших на антенну приёмников 1 и 2 на эпоху i ; $n_{1,k,i}^\Phi$ и $n_{2,k,i}^\Phi$ — число фазовых циклов, зарегистрированные приёмниками 1 и 2 на эпоху i после гетеродинирования.

Следовательно, при использовании результатов фазовых измерений в разностях фазовых циклов не требуется операция разрешения неоднозначности. Это связано с тем, что при гетеродинировании из общего числа периодов, пришедших на антенну приёмника, вычтено число периодов гетеродина, равное для всех наблюдаемых спутников, и в разности эта величина исключилась. Этап образования первых разностей — очень ответственный, и к выбору спутника, который принимается как опорный и ему присваивается при обработке номер 1, необходимо относиться предельно ответственно. Результаты фазовых измерений опорного спутника должны отвечать следующим требованиям:

не содержать влияния отражённых сигналов от посторонних объектов и других источников помех;

по возможности обладать максимальным временем наблюдений в пределах сеанса измерений.

В противном случае все искажения в результатах фазовых измерений опорного спутника войдут во все уравнения (3) и неизбежно негативно скажутся на результатах вычислений. Для приведения системы уравнений (3a) к линейному виду относительно координат и разностей координат необходимо воспользоваться результатами кодовых измерений. Несмотря на то, что реальная точность вычисления координат пунктов по результатам кодовых измерений составляет в настоящее время 3–5 м, этого вполне достаточно, чтобы существенно упростить алгоритм обработки результатов фазовых измерений.

Следующий приём — образование вторых разностей между результатами измерений двух одновременно работающих приёмников является действительно искусственным приёмом, вызванным плохой обусловленностью систе-

мы уравнений (3). В результате этих преобразований исключается необходимость высокоточного определения координат ровера. Вместо координат ровера искомыми величинами становятся разности координат между ровером и базовым приёмником. При этом обусловленность системы уравнений существенно повысилась.

Система уравнений после образования вторых разностей (разностей уравнений между двумя приёмниками на одну и ту же эпоху) может быть представлена в следующем виде:

$$T_{1,k,0} - T_{1,1,0} + \tau(n_{1,k,i} - n_{1,1,i}) + \Delta T_{1,k,i} - \Delta T_{1,1,i} - T_{2,k,0} + T_{2,1,0} - \tau(n_{2,k,i} - n_{2,1,i}) - \Delta T_{2,k,i} + \Delta T_{2,1,i} = 0. \quad (4)$$

При этом число уравнений осталось равным $(k-1) \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta t_1} + 1 \right)$, а число неизвестных возросло почти в два раза до $2k+3$ (для нашего примера это составляет 484 и 13 соответственно). При этом координаты базовой станции должны быть известны в системе координат ПЗ-90 для спутников ГЛОНАСС и в системе WGS-84 для спутников NAVSTARGPS. В крайнем случае, могут быть использованы координаты, полученные по результатам кодовых измерений.

Начало сеансов измерений по часам спутников $T_{1,k,0}$ и $T_{2,k,0}$ также целесообразно вычислить по результатам кодовых измерений и исключить их из числа неизвестных. В этом случае останется лишь три искомых величины (разности координат между базовой станцией и ровером), а обусловленность системы уравнений (4) существенно повысится.

Зная исправленное время измерения фазы на эпоху ноль ($T_{1,0}^r + \delta T_{1,0}^r$ и $T_{2,0}^r + \delta T_{2,0}^r$) и время задержки сигнала от спутника до приёмника на этот же момент времени $\Delta T_{1,k,0}$ и $\Delta T_{2,k,0}$, определим время начала цугов волн для всех наблюдаемых спутников (эпоха ноль по часам спутников):

$$\begin{aligned} T_{1,k,0}^S &= T_{1,0}^r + \delta T_{1,0}^r - \Delta T_{1,k,0}; \\ T_{2,k,0}^S &= T_{2,0}^r + \delta T_{2,0}^r - \Delta T_{2,k,0}. \end{aligned}$$

При этом необходимо учитывать, что начала сеансов измерений по часам обоих приёмников численно равны друг другу $T_{1,0}^r = T_{2,0}^r$. Следовательно, координаты спутников на моменты начала измерений целесообразно вычислять на эпоху ноль по часам спутников. Необходимо вычислить начало сеанса измерений по часам спутников $T_{1,k,0}$ и $T_{2,k,0}$:

$$\begin{aligned} T_{1,k,0}^S &= T_{1,0}^r + \delta T_{1,0}^r - T_{1,k,0}; \\ T_{2,k,0}^S &= T_{1,k,0}^S + \Delta T_{1,k,0} - \Delta T_{2,k,0} + \delta T_{2,0}^r - \delta T_{1,0}^r. \end{aligned} \quad (5)$$

Введём новое обозначение и в дальнейшем детально рассмотрим эту величину

$$q_k = T_{1,k,0}^S - T_{1,1,0}^S - T_{2,k,0}^S + T_{2,1,0}^S \quad (6)$$

или с учётом (5)

$$q_k = \Delta T_{1,1,0} - \Delta T_{1,k,0} + \Delta T_{2,k,0} - \Delta T_{2,1,0}. \quad (7)$$

С учётом величин, входящих в уравнения (5)–(7), система уравнений (4) примет вид:

$$\tau(n_{1,k,i} - n_{1,1,i}) - \tau(n_{2,k,i} - n_{2,1,i}) + \Delta T_{1,k,i} - \Delta T_{2,k,i} - \Delta T_{1,1,i} + \Delta T_{2,1,i} + q_k = 0. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться в том, что с учётом постоянных слагаемых q_k все уравнения эпохи 0 обращаются в ноль. В связи с этим в преобразованной системе уравнений (8) индекс i начинается не с нуля, а с единицы, а k — с цифры 2. В развёрнутом виде система уравнений (8) стала иметь вид:

эпоха 1

$$\tau(n_{1,2,1} - n_{1,1,1}) - \tau(n_{2,2,1} - n_{2,1,1}) + \Delta T_{1,2,1} - \Delta T_{1,1,1} - \Delta T_{2,2,1} + \Delta T_{2,1,1} + q_2 = 0;$$

$$\tau(n_{1,3,1} - n_{1,1,1}) - \tau(n_{2,3,1} - n_{2,1,1}) + \Delta T_{1,3,1} - \Delta T_{1,1,1} - \Delta T_{2,3,1} + \Delta T_{2,1,1} + q_3 = 0;$$

$$\tau(n_{1,4,1} - n_{1,1,1}) - \tau(n_{2,4,1} - n_{2,1,1}) + \Delta T_{1,4,1} - \Delta T_{1,1,1} - \Delta T_{2,4,1} + \Delta T_{2,1,1} + q_4 = 0;$$

$$\dots$$

$$\tau(n_{1,k,1} - n_{1,1,1}) - \tau(n_{2,k,1} - n_{2,1,1}) + \Delta T_{1,k,1} - \Delta T_{1,1,1} - \Delta T_{2,k,1} + \Delta T_{2,1,1} + q_k = 0;$$

эпоха 2

$$\tau(n_{1,2,2} - n_{1,1,2}) - \tau(n_{2,2,2} - n_{2,1,2}) + \Delta T_{1,2,2} - \Delta T_{1,1,2} - \Delta T_{2,2,2} + \Delta T_{2,1,2} + q_2 = 0;$$

$$\tau(n_{1,3,2} - n_{1,1,2}) - \tau(n_{2,3,2} - n_{2,1,2}) + \Delta T_{1,3,2} - \Delta T_{1,1,2} - \Delta T_{2,3,2} + \Delta T_{2,1,2} + q_3 = 0;$$

$$\tau(n_{1,4,2} - n_{1,1,2}) - \tau(n_{2,4,2} - n_{2,1,2}) + \Delta T_{1,4,2} - \Delta T_{1,1,2} - \Delta T_{2,4,2} + \Delta T_{2,1,2} + q_4 = 0;$$

$$\dots$$

$$\tau(n_{1,k,2} - n_{1,1,2}) - \tau(n_{2,k,2} - n_{2,1,2}) + \Delta T_{1,k,2} - \Delta T_{1,1,2} - \Delta T_{2,k,2} + \Delta T_{2,1,2} + q_k = 0;$$

эпоха i

$$\tau(n_{1,2,i} - n_{1,1,i}) - \tau(n_{2,2,i} - n_{2,1,i}) + \Delta T_{1,2,i} - \Delta T_{1,1,i} - \Delta T_{2,2,i} + \Delta T_{2,1,i} + q_2 = 0;$$

$$\tau(n_{1,3,i} - n_{1,1,i}) - \tau(n_{2,3,i} - n_{2,1,i}) + \Delta T_{1,3,i} - \Delta T_{1,1,i} - \Delta T_{2,3,i} + \Delta T_{2,1,i} + q_3 = 0;$$

$$\tau(n_{1,4,i} - n_{1,1,i}) - \tau(n_{2,4,i} - n_{2,1,i}) + \Delta T_{1,4,i} - \Delta T_{1,1,i} - \Delta T_{2,4,i} + \Delta T_{2,1,i} + q_4 = 0;$$

$$\dots$$

$$\tau(n_{1,k,i} - n_{1,1,i}) - \tau(n_{2,k,i} - n_{2,1,i}) + \Delta T_{1,k,i} - \Delta T_{1,1,i} - \Delta T_{2,k,i} + \Delta T_{2,1,i} + q_k = 0.$$

Для того чтобы выразить интервалы времени $\Delta T_{l,k,i}$ через координаты спутников и приёмников, примем следующую индексацию координат спутников на моменты излучения начала цугов волн: $X_{l,k,i}$, $Y_{l,k,i}$, $Z_{l,k,i}$, а координаты базового приёмника: X_1 , Y_1 , Z_1 , координаты второго приёмника (ровера) $X_2 = X_1 + \Delta X$, $Y_2 = Y_1 + \Delta Y$, $Z_2 = Z_1 + \Delta Z$. Интервал времени $\Delta T_{l,k,i}$ представим в следующем виде $\Delta T_{l,k,i} = \frac{S_{l,k,i}}{C} + \frac{\delta S_{l,k,i}}{C}$, где $S_{l,k,i} = \sqrt{(X_{l,k,i} - X_1)^2 + (Y_{l,k,i} - Y_1)^2 + (Z_{l,k,i} - Z_1)^2}$, а поправку за скорость излучения движения спутника в момент излучения сигнала представим в виде

$$\delta S_{l,k,i} = (X_{l,k,i} - X_1) \frac{V_{l,k,i}^X}{C} + (Y_{l,k,i} - Y_1) \frac{V_{l,k,i}^Y}{C} + (Z_{l,k,i} - Z_1) \frac{V_{l,k,i}^Z}{C},$$

где $V_{l,k,i}^X$, $V_{l,k,i}^Y$, $V_{l,k,i}^Z$ — скорости изменения координат спутников с номером k на эпоху i относительно приёмника l .

Умножим все уравнения системы (8) на скорость распространения радиоволн C , а время задержки сигнала на трассе от спутника до приёмника выразим через расстояние и поправки за скорость движения спутника [3], получим итоговую систему уравнений

$$\lambda(n_{1,k,i} - n_{1,1,i}) - \lambda(n_{2,k,i} - n_{2,1,i}) + S_{1,k,i} - S_{2,k,i} - S_{1,1,i} + S_{2,1,i} + Cq_k + \delta V_{k,i} = 0, \quad (9)$$

где λ — длина волны несущей частоты (одинакова для всех спутников NAVSTAR GPS и различная для спутников ГЛОНАСС); $\delta V_{k,i}$ — разности правок в расстояния, учитывающие скорости движения спутников в гринвичской системе координат.

$$\delta V_{k,i} = (X_{1,k,i}^S - X_1) \frac{V_{1,k,i}^X}{C} + (Y_{1,k,i}^S - Y_1) \frac{V_{1,k,i}^Y}{C} + (Z_{1,k,i}^S - Z_1) \frac{V_{1,k,i}^Z}{C} - (X_{2,k,i}^S - X_2) \frac{V_{2,k,i}^X}{C} - (Y_{2,k,i}^S - Y_2) \frac{V_{2,k,i}^Y}{C} - (Z_{2,k,i}^S - Z_2) \frac{V_{2,k,i}^Z}{C} -$$

$$- (X_{1,1,i}^S - X_1) \frac{V_{1,1,i}^X}{C} - (Y_{1,1,i}^S - Y_1) \frac{V_{1,1,i}^Y}{C} - (Z_{1,1,i}^S - Z_1) \frac{V_{1,1,i}^Z}{C} + (X_{2,1,i}^S - X_2) \frac{V_{2,1,i}^X}{C} + (Y_{2,1,i}^S - Y_2) \frac{V_{2,1,i}^Y}{C} + (Z_{2,1,i}^S - Z_2) \frac{V_{2,1,i}^Z}{C}. \quad (10)$$

Формула (9) полностью соответствует формулам, которые используют во всех алгоритмах обработки результатов фазовых измерений [5–7]. Исключение составляют два последних члена формулы (9). Что касается величины $\delta V_{k,i}$ — эта поправка аналогична поправкам за поворот Земли или за эффект Саньяка, которую пытаются учесть при обработке результатов кодовых измерений. При фазовых измерениях эта величина может иметь малые значения при небольших расстояниях ровера от базы и при коротких сеансах наблюдений. При длительных сеансах координаты спутников и скорости изменения координат спутников существенно различаются между эпохами в начале сеанса наблюдений и в конце сеанса. Это может привести к тому, что $\delta V_{k,i}$ составит заметную величину, которая будет снижать эффективность длительного сеанса особенно при значительном удалении ровера от базы. Величина $\delta V_{k,i}$ заслуживает детального исследования.

Величину Cq_k также целесообразно выразить через расстояния от спутников до приёмников с учётом (7)

$$Cq_k = -S_{1,k,0} + S_{1,1,0} + S_{2,k,0} - S_{2,1,0} - (X_{1,k,0} - X_1) \frac{V_{1,k,0}^X}{C} - (Y_{1,k,0} - Y_1) \frac{V_{1,k,0}^Y}{C} - (Z_{1,k,0} - Z_1) \frac{Z_{1,k,0}^X}{C} + \\ + (X_{1,1,0} - X_1) \frac{V_{1,1,0}^X}{C} + (Y_{1,1,0} - Y_1) \frac{V_{1,1,0}^Y}{C} + (Z_{1,1,0} - Z_1) \frac{Z_{1,1,0}^X}{C} + (X_{2,k,0} - X_2) \frac{V_{2,k,0}^X}{C} + (Y_{2,k,0} - Y_2) \frac{V_{2,k,0}^Y}{C} - \\ - (Z_{2,k,0} - Z_2) \frac{Z_{2,k,0}^X}{C} - (X_{2,1,0} - X_2) \frac{V_{2,1,0}^X}{C} + (Y_{2,1,0} - Y_2) \frac{V_{2,1,0}^Y}{C} - (Z_{2,1,0} - Z_2) \frac{Z_{2,1,0}^X}{C}. \quad (11)$$

Формулы (9)–(11) были представлены так, чтобы разности расстояний на эпоху 0 были выделены отдельным членом Cq_k (11). Дело в том, что в ныне существующих алгоритмах обработки результатов фазовых измерений разности расстояний $S_{1,k,0} + S_{1,1,0} + S_{2,k,0} - S_{2,1,0}$ рассматриваются отдельно, в так называемой процедуре разрешения неоднозначности. Эти расстояния представляют в виде $n\lambda$, где n — целое число длин волн, укладывающихся в расстояниях от спутника до приёмника, полагая, без доказательств, что доли волны учтены в разностях $\lambda(n_{1,k,i} - n_{1,1,i}) - \lambda(n_{2,k,i} - n_{2,1,i})$.

По своей природе расстояния между спутниками и приёмниками на эпоху 0 ничем не отличаются от этих же расстояний на любую другую эпоху, поэтому применять к ним особую процедуру обработки нет необходимости. Возможно, их целесообразно обрабатывать так же, как и все остальные расстояния, а систему уравнений (9) представим в виде

$$\lambda(n_{1,k,i} - n_{1,1,i}) - \lambda(n_{2,k,i} - n_{2,1,i}) + S_{1,k,i} - S_{2,k,i} - S_{1,1,i} + S_{2,1,i} - S_{1,k,0} - S_{2,k,0} - S_{1,1,0} + S_{2,1,0} + \delta V_{k,0} + \delta V_{k,i} = 0, \quad (12)$$

где

$$\delta V_{k,0} = -(X_{1,k,0} - X_1) \frac{V_{1,k,0}^X}{C} - (Y_{1,k,0} - Y_1) \frac{V_{1,k,0}^Y}{C} - (Z_{1,k,0} - Z_1) \frac{Z_{1,k,0}^X}{C} + (X_{1,1,0} - X_1) \frac{V_{1,1,0}^X}{C} + (Y_{1,1,0} - Y_1) \frac{V_{1,1,0}^Y}{C} + \\ + (Z_{1,1,0} - Z_1) \frac{Z_{1,1,0}^X}{C} + (X_{2,k,0} - X_2) \frac{V_{2,k,0}^X}{C} + (Y_{2,k,0} - Y_2) \frac{V_{2,k,0}^Y}{C} + (Z_{2,k,0} - Z_2) \frac{Z_{2,k,0}^X}{C} - \\ - (X_{2,1,0} - X_2) \frac{V_{2,1,0}^X}{C} - (Y_{2,1,0} - Y_2) \frac{V_{2,1,0}^Y}{C} - (Z_{2,1,0} - Z_2) \frac{Z_{2,1,0}^X}{C}.$$

Таким образом, формула (12) в основном соответствует формулам, используемым в опубликованных алгоритмах обработки результатов спутниковых измерений, но при этом имеются и принципиальные отличия:

1) в формуле (12) длина волны λ — это не та длина волны, которая распространялась от спутника до приёмника; она образовалась как длительность периода высокостабильной несущей частоты, умноженной на скорость распространения электромагнитных волн в вакууме,

именно поэтому она не искажена эффектом Доплера;

2) интервалы времени между эпохами по часам спутников вычисляются очень точно, и это позволяет вычислять разности координат с высокой точностью.

Дальнейшее преобразование системы уравнений (12) заключается в приведении её к линейному виду, соблюдая высокую точность коэффициентов при неизвестных и высокую точность вычисления свободных членов.

Выводы

1. Устранена слабая обусловленность системы уравнений, так как многие неизвестные входили в уравнения практически с одинаковыми коэффициентами. Выполнены преобразования системы уравнений, которые существенно снизили число неизвестных до уровня, обе-

спечивающего надёжное вычисление искомых величин.

2. Исключена трудоёмкая процедура разрешения неоднозначности, так как все расстояния, входящие в формулу (12), могут быть выражены через координаты спутников и координаты приёмников, при этом округлять расстояния на начало измерений (эпоха 0) не целесообразно.

3. Доказано, что фазовый метод измерений с использованием спутниковой навигационной системы не является аналогом фазового дальномера, а имеет собственную теоретическую базу. Показано, что результаты фазовых измерений позволяют точно вычислять интервалы времени между эпохами измерений по часам спутников, что обеспечивает точное вычисление изменений положения спутников в период измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ключин Е.Б., Кравчук И.М. Анализ алгоритма обработки результатов спутниковых измерений фазовым методом // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъёмка» 2019. Т. 63, №4. С. 375–384.
2. Ключин Е.Б., Кравчук И.М. Спутниковая навигационная система — уникальный инструмент для фундаментальных научных исследований. // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъёмка» 2017. Т. 61. № 5, С. 14–18.
3. Ключин Е.Б. Особенности учёта скорости движения спутника при обработке результатов спутниковых измерений. // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъёмка» 2019. Т. 63 №2. С. 152–159.
4. Малинников В.А., Ключин Е.Б., Калугин В.В., Шлапак В.В. Перспективы развития методов обработки результатов спутниковых измерений в геодезии // Глобальная ядерная безопасность. 2011. №1 (1). С. 79–88.
5. Teunissen P.J.G., Bocr Y., Beutler G. et al. GPS for geodesy. Berlin: Springer, 1998. 750 p.
6. Leick A. GPS Satellite Surveying, New York: A Wileyinter – Science publication, 1995. 560 p.
7. Günter Seeber. Satellite Geodesy 2nd edition, Walterde Gruyter. Berlin. NewYork. 2003. 589 p.
8. Генике А.А., Побединский Г.Г. Глобальные спутниковые навигационные системы определения местоположения и их применение в геодезии. М.: Картгеоцентр. 2004. 355 с.
9. Антонович К.М. Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии, Т. 2, ФГУП М.: Картгеоцентр. 2006. 359 с.

REFERENCE

1. Klyushin E.B., Kravchuk I.M. Analysis of the processing algorithm based on phase method for results of the satellite measurements. *Izvestia vuzov «Geodesy and Aerophotosurveying»*. 2019, 63(4): 375–384. [In Russian].
2. Klyushin E.B., Kravchuk I.M. The satellite navigation system — a specific tool for fundamental. *Izvestia vuzov «Geodesy and Aerophotosurveying»*. 2017, 61(5): 14–18. [In Russian].
3. Klyushin E.B. Features of processing of satellite measurements. *Izvestia vuzov «Geodesy and Aerophotosurveying»*. 2019, 63(2): 152–159. [In Russian]
4. Malinnikov V.A., Klyushin E.B., Kalugin V.V., Shlapak V.V. Prospects for the development of methods of processing satellite measurements in geodesy. *Global'nay ayadernaya bezopasnost`*. 2011, 1(1): 79–88. [In Russian].
5. Teunissen P.J.G., Bocr Y., Beutler G. et al. GPS for geodesy. Berlin: Springer, 1998: 750 p.
6. Leick A. GPS Satellite Surveying, New York: A Willeyinter – Science publication, 1995: 560 p.
7. Günter Seeber. Satellite Geodesy 2nd edition, Walterde Gruyter. Berlin. NewYork. 2003: 589 p.
8. Genike A.A., Pobedinskij G.G. *Global'ny`esputnikovy`enavigacionny`esistemy` opredeleniya-mestopolozheniyai ix primenenie v geodezii*. Global satellite navigation positioning systems and their applications in geodesy. Moscow: Kartgeocentr. 2004: 355 p. [In Russian].
9. Antonovich K.M. *Ispol'zovanie sputnikovy`x radionavigacionny`x sistem v geodezii*, Use of satellite radio navigation systems in geodesy. Moscow: Kartgeocentr. 2006: 359 p. [In Russian].