

ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГНСС

И.М. Кравчук^{1*}

¹ Московский государственный университет геодезии и картографии, Москва, Россия

* ivankrv@yandex.ru

Цитирование: Кравчук И.М. Теория фазовых методов определения координат с использованием ГНСС // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2021. Т. 65. № 6. С. 625-633. DOI:10.30533/0536-101X-2021-65-6-625-633

Ключевые слова. время распространения радиоволн, гетероденирование, ГЛОНАСС, длина волны, координаты, фазовые измерения, скорость распространения радиоволн, фазовые методы, фазовые циклы, фазовый зонд

Аннотация

В статье рассматриваются проблемные теоретические вопросы, присущие современным алгоритмам обработки результатов спутниковых измерений. На примере простейшей радионавигационной системы МПЩ (Мандельштам, Папалекси, Щеголев), разработанной в СССР в 1936 году, авторы статьи показали, что основной недостаток существующих алгоритмов заключается в том, что не использована математическая запись одновременности регистрации фазовых циклов, причём обычно отмечают важность этих действий. Показано, что операция разрешения неоднозначности не является теоретически оправданным действием. При этом рекомендуется регистрировать длительность сеанса измерений и показано, что это может служить дополнительным источником информации. На основании выполненных исследований записан простой, единый и строгий алгоритм вычисления координат определяемых пунктов по результатам регистрации фазовых циклов при использовании радионавигационной системы в режиме фазового зонда. Показано, что метод фазового зонда может оказаться более перспективным, так как исключает необходимость организации базовой станции, нет необходимости задерживать приёмник на опорном пункте, выжидая, когда спутники переместятся на заметную величину, а самое главное, уменьшается объём измерений в два раза, что может способствовать повышению точности вычисления искомым величин.

1 Введение

При изучении теории фазовых методов определения разностей координат с использованием спутниковых навигационных систем возникают значительные трудности, как у студентов, так и у преподавателей, несмотря на то что этому вопросу уделено достаточно внимания в авторитетных научных журналах и монографиях, например [1-4]. Это связано с тем, что многие математические операции совершаются без строгого теоретического и логического обоснования. Например, предлагается: давайте выразим расстояние от спутника до фазового приёмника через некоторого количества длин волн $n\lambda + \Delta\lambda$, где n – целое число длин волн, а Δ – дробная часть волны λ . Это возможно, но необходимо доказать – к какому моменту времени будет отнесено это расстояние (моменту излучения или моменту приёма сигнала). Сигнал от спутника до приёмника пролетает примерно за 0,08 секунды, а спутник за это время перемещается более чем на 200 метров (в Гринвичской системе координат). Более того, волны излучаются последовательно, а расстояние от спутника до приёмника непрерывно изменяется, следовательно каждая волна составляющая цуг волн $n\lambda$ проходит различное расстояние. Кроме этого, необходимо обосновать связь результатов фазовых измерений с расстоянием от спутника до приёмника. Например, если приёмник в режиме статика выполняет фазовые измерения от спутника NAVSTAR GPS на частоте L_1 в течение более получаса – то на антенну приёмника поступит не менее 3 триллионов периодов несущей частоты, а длина этого цуга волн будет соизмерима с длиной орбиты Земли вокруг Солнца. И это ещё не всё, на счётчик числа фазовых циклов поступает не тот сигнал, который дошёл до антенны приёмника, а разностный сигнал, который образован как разность принятой частоты и частоты вспомогательного генератора – гетеродина. При этом регистрируемая частота снижается более чем в десять тысяч раз. Обнаружить непосредственную связь зарегистрированных величин с расстоянием от спутника до приёмника крайне сложно, если это вообще возможно. Эти и другие нелогичные математические действия были проанализированы в статье [5]. Это говорит о том, что существующий алгоритм обработки результатов фазовых измерений не имеет строгого теоретического обоснования, а является хорошо подобранным и экспериментально проверенным эмпирическим продуктом.

Собственно суть фазовых измерений крайне проста: необходимо чтобы приёмник мог принимать высокостабильные несущие частоты от нескольких

передатчиков и **одновременно** выполнить счёт числа всех периодов и их долей пришедших на антенну приёмника за **единый** интервал времени. Все остальные действия отражают специфические особенности самой навигационной системы. Например, если передатчики расположены на спутниках, то необходимо знать эфемериды спутников чтобы имелась возможность вычислить их координаты на любой момент времени. Если передатчики неподвижны в процессе измерения, то достаточно знать только их координаты. Если необходима высокая точность измерения, то несущая частота должна быть высокой, а в приёмнике следует предусмотреть гетеродинирование сигнала (понижение частоты) чтобы повысить точность фазовых измерений.

Есть два обязательных условия, которые должны выполняться и которые коренным образом отличают данный метод измерений от измерений обычным фазовым дальномером. Во-первых, в процессе измерений должны участвовать несколько одновременно работающих передатчиков, а во-вторых, в период измерений (в период счёта числа периодов) расстояния между приёмником и передатчиками непременно должны изменяться. Если предположить, что в навигационной системе передатчики и фазовый приёмник в период регистрации числа периодов не перемещаются, то теряется смысл измерений, так как за известный интервал времени число периодов известных частот легко вычисляется. Изменение этих расстояний в период измерений приводит к изменению числа зарегистрированных периодов в зависимости от знака и величины изменения расстояний. Именно это и является источником информации позволяющим вычислять искомые величины.

Такая радионавигационная система была впервые создана в СССР в 1936 году, которая получила название МПЩ по фамилиям учёных, создавших эту систему (Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Щеголев Е. Я.). При этом были разработаны два метода измерений: метод фазового зонда, если перемещается фазовый приёмник и метод радиолога, если перемещаются передатчики [6-8]. В 1937 – 1940 годы впервые в мире в Главсевморпути СССР проводились гидрографические работы с применением радионавигационной фазовой системы МПЩ [9].

Для упрощения понимания происходящих действий рассмотрим следующую модель радионавигационной системы, которая состоит из нескольких (в нашем случае три или четыре) неподвижных радиостанций непрерывно излучающих высокостабильные частоты.

2 Методика исследования

Рассмотрим процесс измерений методом фазового зонда. Как и большинство геодезических измерений, процесс регистрации числа периодов необходимо начинать на опорном пункте с известными координатами. Вначале приёмник (фазовый зонд) необходимо установить над центром опорного пункта и включить его в режим измерений. С этого момента приёмник начинает одновременную регистрацию числа периодов пришедших на антенну частот от всех радиостанций (процесс регистрации числа периодов с применением гетеродинирования будет рассмотрен позже). Затем фазовый зонд, не выключая, переносят на определяемый пункт. При этом необходимо обеспечить непрерывный приём сигналов от всех радиостанций, а скорость и траектория перемещения зонда значения не имеют. На определяемом пункте после центрирования зонда над центром знака одновременно прекращается счёт числа периодов от всех радиостанций. Для обработки результатов полевых измерений потребуется дополнительная информация: точные значения частот всех передатчиков, а также координаты радиостанций и опорного пункта в единой системе координат, как это показано на Рисунке 1. **Рис. 1.** Схема определения координат пункта 6 методом фазового зонда

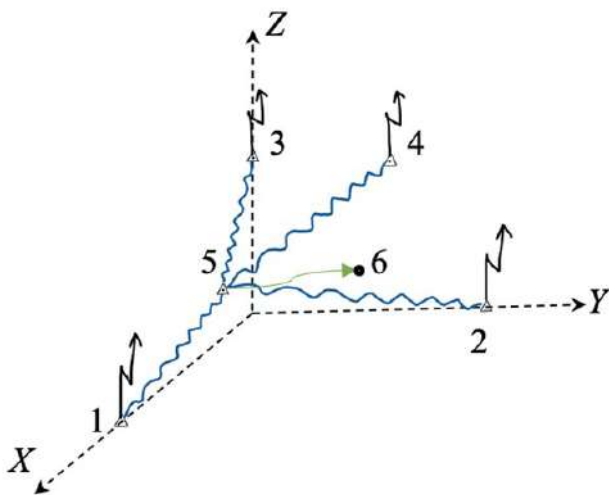


Рис.1. Схема определения координат пункта 6 методом фазового зонда

Пусть четыре радиостанции имеют следующие номера: 1, 2, 3 и 4; опорный пункт имеет номер 5, а определяемый пункт номер 6. По координатам вычислим расстояния от фазового зонда на опорном пункте 5 до радиостанций: $S_{1,5}$, $S_{2,5}$, $S_{3,5}$ и $S_{4,5}$ а затем и время задержки сигнала на пути от радиостанций до опорного пункта $\Delta T_{1,5}$, $\Delta T_{2,5}$, $\Delta T_{3,5}$ и $\Delta T_{4,5}$

(для случая, если раоволны распространяются в ионосфере и тропосфере) по формуле:

$$\Delta T_{i,5} = \frac{S_{i,5}}{C} + \frac{S_{i,5 \text{ ион}} \cdot N_{i,5 \text{ ион}}}{C} + \frac{S_{i,5 \text{ троп}} \cdot N_{i,5 \text{ троп}}}{C} = \frac{S_{i,5}}{C} + \frac{\delta S_{i,5}}{C}, \quad (1)$$

где i – номер радиостанций, $S_{i,5 \text{ ион}}$ и $S_{i,5 \text{ троп}}$ – длины путей сигналов в ионосфере и тропосфере соответственно; $N_{i,5 \text{ ион}} = n_{i,5 \text{ ион}} - 1$ и $N_{i,5 \text{ троп}} = n_{i,5 \text{ троп}} - 1$ – средние значения индексов преломления ионосферы и тропосферы соответственно в единицах шестого знака; C – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме; $n_{i,5 \text{ ион}}$ и $n_{i,5 \text{ троп}}$ – средние значения показателей преломления сред.

$$\delta S_{i,5} = \frac{S_{i,5 \text{ ион}} \cdot N_{i,5 \text{ ион}}}{C} + \frac{S_{i,5 \text{ троп}} \cdot N_{i,5 \text{ троп}}}{C}$$

где $\delta S_{i,5}$ – суммарная поправка влияния среды на время распространения сигнала.

Несущая частота является гармоническим колебанием, а потому она не может служить сигналом. В данном случае для простоты изложения, термин «сигнал» используется в виртуальном смысле, полагая, что радиоволне, зафиксированной приёмником, именно с тем значением фазы, предшествовала радиоволна на передатчике, но разделённая на интервал времени строго равный времени задержки радиоволны на пути от излучателя до приёмника (время предшества) [10].

Зафиксировав время начала регистрации фазовых циклов на пункте 5, можно записать условие одновременности поступления сигналов в приёмник на момент T_H :

$$\left. \begin{aligned} T_{1,5} + \Delta T_{1,5} &= T_H; \\ T_{2,5} + \Delta T_{2,5} &= T_H; \\ T_{3,5} + \Delta T_{3,5} &= T_H; \\ T_{4,5} + \Delta T_{4,5} &= T_H. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $T_{1,5}$, $T_{2,5}$, $T_{3,5}$ и $T_{4,5}$ – время предшества (начало сеанса измерений по часам радиостанций); $\Delta T_{1,5}$, $\Delta T_{2,5}$, $\Delta T_{3,5}$ и $\Delta T_{4,5}$ – время распространения радиоволн от радиостанций до опорного пункта 5.

Если предположить, что известны координаты пункта 6 то по аналогии с системой уравнений (2) можно записать условие одновременности завершения сеанса измерений на момент времени T_K :

$$\left. \begin{aligned} T_{1,6} + \Delta T_{1,6} &= T_K; \\ T_{2,6} + \Delta T_{2,6} &= T_K; \\ T_{3,6} + \Delta T_{3,6} &= T_K; \\ T_{4,6} + \Delta T_{4,6} &= T_K. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $T_{1,6}, T_{2,6}, T_{3,6}$ и $T_{4,6}$ – время предшества (время окончания сеанса измерений по часам радиостанций); $\Delta T_{1,6}, \Delta T_{2,6}, \Delta T_{3,6}$ и $\Delta T_{4,6}$ – время распространения радиоволн от радиостанций до определяемого пункта 6.

За интервал времени $T_{i,6} - T_{i,5}$ радиостанции излучили то число периодов, которые зарегистрировал фазовый зонд за время его перемещения от пункта 5 до пункта 6, так как приёмник может зафиксировать лишь то, что излучили передатчики, следовательно

$$\left. \begin{aligned} T_{1,6} - \Delta T_{1,5} &= n_1 \tau_1; \\ T_{2,6} - \Delta T_{2,5} &= n_2 \tau_2; \\ T_{3,6} - \Delta T_{3,5} &= n_3 \tau_3; \\ T_{4,6} - \Delta T_{4,5} &= n_4 \tau_4. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где n_1, n_2, n_3 и n_4 – количество зарегистрированных периодов; τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4 – длительности периодов несущих частот.

В статье [11] приведено подробное доказательство возможности и целесообразности вычисления интервала времени между моментами предшества начала и завершения сеанса по результатам фазовых измерений.

Образовав разности между уравнениями (3) и (2) с учётом (4), составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_{1,6} - \Delta T_{1,5} + n_1 \tau_1 &= \Delta T; \\ \Delta T_{2,6} - \Delta T_{2,5} + n_2 \tau_2 &= \Delta T; \\ \Delta T_{3,6} - \Delta T_{3,5} + n_3 \tau_3 &= \Delta T; \\ \Delta T_{4,6} - \Delta T_{4,5} + n_4 \tau_4 &= \Delta T. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\Delta T = T_K - T_H$ – длительность сеанса измерений.

Если известна длительность сеанса измерений ΔT , то достаточно зафиксировать число периодов от трёх радиостанций и в этом случае минимальная система уравнений будет содержать три уравнения. Такая методика фазовых измерений пока никем не использовалась и даже не обсуждалась, но заслуживает детального анализа точности. Реализация этого метода измерений требует, чтобы счётчик фазовых циклов отображал число периодов электромагнитной волны, поступивших на антенну без гетеродинирования. Современные спутниковые приёмники не позволяют определить полное число периодов n_i , а лишь разность:

$$n_{\Phi_i} = n_i - n_{\text{гет}} \quad (6)$$

где: n_{Φ_i} – число периодов, зафиксированных фазометром после гетеродинирования; $n_{\text{гет}}$ – число периодов гетеродина, исключённых из принятого сигнала за время сеанса измерений.

Спутники NAVSTAR GPS излучают очень близкие частоты поэтому при гетеродинировании из всех частот вычитают равное число периодов $n_{\text{гет}}$. Формулы (5) написаны в общем виде, они справедливы и для NAVSTAR GPS и для неподвижных радиостанций с использованием фазового зонда (как в описанном примере). Отличаются они лишь особенностями вычисления времени задержек сигналов от передатчика до приёмника.

С целью исключения неизвестной величины ΔT в уравнениях (5) вычтем первое уравнения из остальных уравнений (это то, что обычно называют образованием разностей между спутниками), получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_{2,6} - \Delta T_{1,6} - \Delta T_{2,5} + \Delta T_{1,5} + n_2 \tau_2 - n_1 \tau_1 &= 0; \\ \Delta T_{3,6} - \Delta T_{1,6} - \Delta T_{3,5} + \Delta T_{1,5} + n_3 \tau_3 - n_1 \tau_1 &= 0; \\ \Delta T_{4,6} - \Delta T_{1,6} - \Delta T_{4,5} + \Delta T_{1,5} + n_4 \tau_4 - n_1 \tau_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Выразим время задержек сигналов от передатчиков до определяемого пункта 6 через расстояния. С этой целью умножим уравнения (7) на скорость распространения электромагнитных волн в вакууме C и учётom (1) получим:

$$\left. \begin{aligned} S_{2,6} - S_{1,6} - (\Delta T_{2,5} - \Delta T_{1,5}) \cdot C + n_2 \lambda_2 - n_1 \lambda_1 + \delta S_{2,6} - \delta S_{1,6} &= 0; \\ S_{3,6} - S_{1,6} - (\Delta T_{3,5} - \Delta T_{1,5}) \cdot C + n_3 \lambda_3 - n_1 \lambda_1 + \delta S_{3,6} - \delta S_{1,6} &= 0; \\ S_{4,6} - S_{1,6} - (\Delta T_{4,5} - \Delta T_{1,5}) \cdot C + n_4 \lambda_4 - n_1 \lambda_1 + \delta S_{4,6} - \delta S_{1,6} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Выразим число периодов пришедших на антенну приёмника n_i через число периодов, зарегистрированных фазометром n_{Φ_i} и число периодов исключённых при гетеродинировании $n_{\text{гет}}$ и представим систему уравнений (8) в виде:

$$\left. \begin{aligned} S_{2,6} - S_{1,6} + n_{\Phi_2} \lambda_2 - n_{\Phi_1} \lambda_1 - l_1 &= 0; \\ S_{3,6} - S_{1,6} + n_{\Phi_3} \lambda_3 - n_{\Phi_1} \lambda_1 - l_2 &= 0; \\ S_{4,6} - S_{1,6} + n_{\Phi_4} \lambda_4 - n_{\Phi_1} \lambda_1 - l_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= (\Delta T_{2,5} - \Delta T_{1,5}) \cdot C + n_{\text{гет}} (\lambda_2 - \lambda_1) - \delta S_{2,6} + \delta S_{1,6} = 0; \\ l_2 &= (\Delta T_{3,5} - \Delta T_{1,5}) \cdot C + n_{\text{гет}} (\lambda_3 - \lambda_1) - \delta S_{3,6} + \delta S_{1,6} = 0; \\ l_3 &= (\Delta T_{4,5} - \Delta T_{1,5}) \cdot C + n_{\text{гет}} (\lambda_4 - \lambda_1) - \delta S_{4,6} + \delta S_{1,6} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В формулу (10) вошли величины, которые никогда не учитывали ранее: число периодов $n_{\text{гет}}$. Это связано с тем, что в навигационной системе NAVSTAR GPS длины волн λ_i мало отличаются друг от друга и при длительности сеанса наблюдений не более часа этой величиной можно пренебречь, но при многочасовых сеансах число $n_{\text{гет}}$ существенно возрастает и в связи с этим свободные члены l_i подвергаются заметным искажениям. В результате ожидаемый эффект повышения точности от длительного сеанса наблюдений не достигается. Необходимо либо не увлекаться длительными сеансами наблюдений, либо научиться компенсировать негативное влияние долгих наблюдений. Например, при наблюдениях с использованием спутниковой навигационной системы NAVSTAR GPS на частотах L_i отклонение несущих частот от номинала может составлять 10^{-13} , а при введении поправок в частоты по информации, переданной в навигационном сообщении это отклонение может уменьшиться до $5 \cdot 10^{-15}$. Это приведёт к тому, что при часовом сеансе наблюдений величина $n_{\text{гет}} (\lambda_2 - \lambda_1)$ может составлять 0,5 мм в каждом из уравнений (9), а при сеансе наблюдений длительностью 4 часа она возрастёт до 2 мм. Эти искажения носят систематический характер, и они не уменьшатся за счёт увеличения числа повторных измерений.

В системе уравнений (9) выразим расстояния через координаты:

$$\left. \begin{aligned} &\sqrt{(X_6 - X_2)^2 + (Y_6 - Y_2)^2 + (Z_6 - Z_2)^2} - \\ &-\sqrt{(X_6 - X_1)^2 + (Y_6 - Y_1)^2 + (Z_6 - Z_1)^2} + n_{\Phi_2} \lambda_2 - n_{\Phi_1} \lambda_1 - l_1 = 0; \\ &\sqrt{(X_6 - X_3)^2 + (Y_6 - Y_3)^2 + (Z_6 - Z_3)^2} - \\ &-\sqrt{(X_6 - X_1)^2 + (Y_6 - Y_1)^2 + (Z_6 - Z_1)^2} + n_{\Phi_3} \lambda_3 - n_{\Phi_1} \lambda_1 - l_2 = 0; \\ &\sqrt{(X_6 - X_4)^2 + (Y_6 - Y_4)^2 + (Z_6 - Z_4)^2} - \\ &-\sqrt{(X_6 - X_1)^2 + (Y_6 - Y_1)^2 + (Z_6 - Z_1)^2} + n_{\Phi_4} \lambda_4 - n_{\Phi_1} \lambda_1 - l_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Дальнейшие решения системы уравнений (11) следует выполнять по обычным правилам математики, предварительно приведя их к линейному виду.

3 Результаты исследования

При выполнении фазовых измерений при использовании спутниковых навигационных систем, как правило, используют базовую станцию, установленную на пункте с известными координатами. Часы фазовых приёмников, установленных на определяемых пунктах и моменты фиксации фазовых циклов должны быть синхронизированы с часами базовой станции. По результатам измерений на базовой станции (в данном случае 5) можно составить систему уравнений на момент начала измерений (по аналогии с формулой (2):

$$\left. \begin{aligned} T_{1,5}^{B_H} + \Delta T_{1,5}^{B_H} &= T_H^B; \\ T_{2,5}^{B_H} + \Delta T_{2,5}^{B_H} &= T_H^B; \\ T_{3,5}^{B_H} + \Delta T_{3,5}^{B_H} &= T_H^B; \\ T_{4,5}^{B_H} + \Delta T_{4,5}^{B_H} &= T_H^B. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где: $T_{1,5}^{B_H}, T_{2,5}^{B_H}, T_{3,5}^{B_H}$ и $T_{4,5}^{B_H}$ – время предшествования по часам спутников с номером i ($i = 1, 2, 3, 4$) относительно базовой станции на момент начала измерений;

$\Delta T_{1,5}^{B_H}, \Delta T_{2,5}^{B_H}, \Delta T_{3,5}^{B_H}$ и $\Delta T_{4,5}^{B_H}$ – время задержки сигналов на пути от спутников до базового приёмника на пункте 5;

T_H^B – время начала сеанса измерений по часам базовой станции.

Аналогичная система уравнений может быть составлена на конец сеанса измерений T_K^B на базовой станции, учитывая, что за время измерений, спутники изменили своё положение:

$$\left. \begin{aligned} T_{1,5}^{B_K} + \Delta T_{1,5}^{B_K} &= T_K^B; \\ T_{2,5}^{B_K} + \Delta T_{2,5}^{B_K} &= T_K^B; \\ T_{3,5}^{B_K} + \Delta T_{3,5}^{B_K} &= T_K^B; \\ T_{4,5}^{B_K} + \Delta T_{4,5}^{B_K} &= T_K^B. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где: $T_{1,5}^{B_K}, T_{2,5}^{B_K}, T_{3,5}^{B_K}$ и $T_{4,5}^{B_K}$ – время предшествования по часам спутников с номером i ($i = 1, 2, 3, 4$) относительно базовой станции на момент конца измерений;

$\Delta T_{1,5}^{B_K}, \Delta T_{2,5}^{B_K}, \Delta T_{3,5}^{B_K}$ и $\Delta T_{4,5}^{B_K}$ – время задержки сигналов на пути от спутников до базового приёмника на момент конца сеанса измерений;

T_K^B – время конца сеанса измерений по часам базовой станции.

Образовав разности между формулами (13) и (12), по аналогии выполняются все те же операции как показано в формулах (4), (5) и (7). получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_{2,5}^{B_K} - \Delta T_{2,5}^{B_H} - \Delta T_{1,5}^{B_K} + \Delta T_{1,5}^{B_H} + n_2^B \tau_2 - n_1^B \tau_1 &= 0; \\ \Delta T_{3,5}^{B_K} - \Delta T_{3,5}^{B_H} - \Delta T_{1,5}^{B_K} + \Delta T_{1,5}^{B_H} + n_3^B \tau_3 - n_1^B \tau_1 &= 0; \\ \Delta T_{4,5}^{B_K} - \Delta T_{4,5}^{B_H} - \Delta T_{1,5}^{B_K} + \Delta T_{1,5}^{B_H} + n_4^B \tau_4 - n_1^B \tau_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

С помощью приёмника, установленного на определяемом пункте 6 (иногда его называют ровер) выполняют те же операции что и с помощью приёмника на базовом пункте, заменив лишь индекс Б на индекс Р, получим для определяемого пункта 6 следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_{2,6}^{P_K} - \Delta T_{2,6}^{P_H} - \Delta T_{1,6}^{P_K} + \Delta T_{1,6}^{P_H} + n_2^P \tau_2 - n_1^P \tau_1 &= 0; \\ \Delta T_{3,6}^{P_K} - \Delta T_{3,6}^{P_H} - \Delta T_{1,6}^{P_K} + \Delta T_{1,6}^{P_H} + n_3^P \tau_3 - n_1^P \tau_1 &= 0; \\ \Delta T_{4,6}^{P_K} - \Delta T_{4,6}^{P_H} - \Delta T_{1,6}^{P_K} + \Delta T_{1,6}^{P_H} + n_4^P \tau_4 - n_1^P \tau_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В формулах (14) и (15) выразим время задержки сигнала от спутников до приёмников через расстояния (как это делали при получении формулы (11) и эти формулы представим в виде:

$$\left. \begin{aligned} S_{2,5}^{B_K} - S_{2,5}^{B_H} - S_{1,5}^{B_K} + S_{1,5}^{B_H} + n_{\Phi_2}^B \lambda_2 - n_{\Phi_1}^B \lambda_1 &= 0; \\ S_{3,5}^{B_K} - S_{3,5}^{B_H} - S_{1,5}^{B_K} + S_{1,5}^{B_H} + n_{\Phi_3}^B \lambda_3 - n_{\Phi_1}^B \lambda_1 &= 0; \\ S_{4,5}^{B_K} - S_{4,5}^{B_H} - S_{1,5}^{B_K} + S_{1,5}^{B_H} + n_{\Phi_4}^B \lambda_4 - n_{\Phi_1}^B \lambda_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{2,6}^{P_k} - S_{2,6}^{P_H} - S_{1,6}^{P_k} + S_{1,6}^{P_H} + n_{\Phi_2}^P \lambda_2 - n_{\Phi_1}^P \lambda_1 &= 0; \\ S_{3,6}^{P_k} - S_{3,6}^{P_H} - S_{1,6}^{P_k} + S_{1,6}^{P_H} + n_{\Phi_3}^P \lambda_3 - n_{\Phi_1}^P \lambda_1 &= 0; \\ S_{4,6}^{P_k} - S_{4,6}^{P_H} - S_{1,6}^{P_k} + S_{1,6}^{P_H} + n_{\Phi_4}^P \lambda_4 - n_{\Phi_1}^P \lambda_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если длительность сеанса наблюдений была не менее 15 минут и спутники за это время заметно изменили своё положение, то информации содержащихся в формулах (16) и (17) вполне достаточно, чтобы вычислить координаты пунктов 5 и 6, но точность координат этих пунктов будет низкой. С целью получения высокоточных величин будем вычислять разности координат $\Delta X = X_6 - X_5$; $\Delta Y = Y_6 - Y_5$; $\Delta Z = Z_6 - Z_5$, для чего образуем разности уравнений (17) и (16):

$$\left. \begin{aligned} S_{2,6}^{P_k} - S_{2,6}^{P_H} - S_{1,6}^{P_k} + S_{1,6}^{P_H} + (n_{\Phi_2}^P - n_{\Phi_2}^B) \lambda_2 - (n_{\Phi_1}^P - n_{\Phi_1}^B) \lambda_1 - k_1 &= 0; \\ S_{3,6}^{P_k} - S_{3,6}^{P_H} - S_{1,6}^{P_k} + S_{1,6}^{P_H} + (n_{\Phi_3}^P - n_{\Phi_3}^B) \lambda_3 - (n_{\Phi_1}^P - n_{\Phi_1}^B) \lambda_1 - k_2 &= 0; \\ S_{4,6}^{P_k} - S_{4,6}^{P_H} - S_{1,6}^{P_k} + S_{1,6}^{P_H} + (n_{\Phi_4}^P - n_{\Phi_4}^B) \lambda_4 - (n_{\Phi_1}^P - n_{\Phi_1}^B) \lambda_1 - k_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= S_{2,5}^{B_k} - S_{2,5}^{B_H} - S_{1,5}^{B_k} + S_{1,5}^{B_H} + \delta_1; \\ k_2 &= S_{3,5}^{B_k} - S_{3,5}^{B_H} - S_{1,5}^{B_k} + S_{1,5}^{B_H} + \delta_2; \\ k_3 &= S_{4,5}^{B_k} - S_{4,5}^{B_H} - S_{1,5}^{B_k} + S_{1,5}^{B_H} + \delta_3. \end{aligned} \right\}$$

δ_1, δ_2 и δ_3 - поправки за задержки сигналов в тропосфере и ионосфере, за разность длин волн, как это сделано в формуле (10).

Дальнейшее решение системы уравнений (18) не сложно: необходимо выразить расстояния через координаты, а координаты пункта 6 представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} X_6 &= X_5 + \widetilde{\Delta X} + \delta x; \\ Y_6 &= Y_5 + \widetilde{\Delta Y} + \delta y; \\ Z_6 &= Z_5 + \widetilde{\Delta Z} + \delta z. \end{aligned} \right\}$$

где $\widetilde{\Delta X}, \widetilde{\Delta Y}$ и $\widetilde{\Delta Z}$ – приближённые значения разности координат между пунктами 5 и 6, а $\delta x, \delta y$ и δz – искомые поправки к разностям координат. После этого привести систему уравнений (18) к линейному виду и вычислить поправки к приближенным значениям разностей координат.

4 Обсуждение результатов

Подводя итог, следует отметить, что получены хорошо известные формулы, но они наполнены конкретным содержанием, при этом сняты все вопросы, которые были сформулированы в статье [5]. Процесс вывода рабочих формул существенно упростился после того, как автору статьи удалось математически записать условия одновременности регистрации фазовых циклов [11]. Строгий анализ алгоритма обработки результатов измерений спутниковыми приёмниками показал, что нет необходимости в трудоёмком процессе разрешения неоднозначности. Показано что метод фазового зонда может оказаться более перспективным, так как исключает необходимость организации базовой станции, нет необходимости задерживать приёмник на опорном

пункте, выжидая, когда спутники переместятся на заметную величину, а самое главное, уменьшается объём измерений в два раза, что может способствовать повышению точности вычисления искомых координат.

5 Выводы

Все вышеперечисленное может служить хорошей основой дальнейшему развитию методов и средств использования спутниковых навигационных систем в геодезии. Безусловно, объём журнальной статьи не позволяет описать все тонкости выполнения математических операций (а их достаточно много) но автор статьи готов поделиться результатами своих исследований с заинтересованными специалистами.

Благодарности

Выражаю благодарность проф. Е. Б. Ключину за ценные советы в исследовании и написании статьи. Также выражаю благодарность сотрудникам кафедры «Прикладная геодезия» МИИГАиК за организацию работы секции международной конференции.

Библиография

1. Leick A. GPS Satellite Surveying. 3rd ed. New York: A Wiley & Sons, Inc. 2004. 399 p.
2. Teunissen P.J.G., Kleusberg A. GPS for geodesy. Berlin: Springer, 1998. 655 p.
3. Seeber G. Satellite Geodesy. 2nd completely revised and extended edition, Berlin-New York, Walter de Gruyter, 2003. 612 p.
4. Hofmann-Wellenhof, B. Global Positioning System. Theory and practice. Fifth, revised edition [Text] / B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger and J. Collins – Wienn, New-York: Springer. 2001. 384 p.
5. Ключин Е. Б., Кравчук И. М. Спутниковая навигационная система – уникальный инструмент для фундаментальных научных исследований // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2017. Т. 61. № 5. С. 14–18.
6. Авторское свидетельство № 47348 А1 СССР, МПК G01S3/46. Способ определения при помощи электромагнитных волн положения пункта : № 139326 : заявл. 10.11.1933 : опубл. 30.06.1936 / Л. И. Манделъштам, Н. Д. Папалекси, Е. Я. Щеголев.
7. Авторское свидетельство № 47723 А1 СССР, МПК G01S13/34. Способ измерения расстояний при помощи электромагнитных волн : № 137341 : заявл. 10.11.1933 : опубл. 31.07.1936 / Л. И. Манделъштам, Н. Д. Папалекси, Е. Я. Щеголев.
8. Авторское свидетельство № 47724 А1 СССР, МПК G01S13/34. Устройство для измерения расстояний с помощью электромагнитных волн : № 149996 : заявл. 01.07.1934 : опубл. 31.07.1936 / Л. И. Манделъштам, Н. Д. Папалекси, Е. А. Щеголев.
9. Быков В. И., Никитенко Ю. И. Фазовая радионавигационная система Декка-навигатор. Издательство «Транспорт», Москва, 1969. 175 с.
10. *Поваляев А. А., Вейцель А. В., Мазена Р. Б.* Глобальные спутниковые системы синхронизации и управления движением в околоземном пространстве / Уч. пособие. М.: Вузовская книга, 2012.
11. Ключин Е. Б., Кравчук И. М. Анализ алгоритма обработки результатов спутниковых измерений фазовым методом // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2019. Т. 63. №4. С. 75-84. DOI: 10.30533/0536-101X-2019-63-4-375-384

Кравчук Иван Михайлович

Кандидат технических наук; Кафедра Геодезии; Геодезический Факультет
ORCID: 0000-0002-8842-8700

Поступила 27.09.2021. Рецензия получена 10.12.2021. Принята к публикации 20.12.2021

UDC 528.2:629.78

DOI:10.30533/0536-101X-2021-65-6-625-633

THEORY OF PHASE COORDINATE DETERMINATION METHODS USING GNSS

Ivan M. Kravchuk^{1*}

¹ Moscow State University Geodesy and Cartography, Russia, Moscow

* ivankrv@yandex.ru

Citation: Kravchuk IM. Theory of phase coordinate determination methods using GNSS. *Izvestia vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying*. Moscow. 2021;65(6): 625-633. (In Russian). DOI:10.30533/0536-101X-2021-65-6-625-633

Keywords. radio wave propagation time, heterodyning, GLONASS, wavelength, coordinates, phase measurements, radio wave propagation speed, phase methods, phase cycles, phase probe.

Acknowledgements. The author expresses gratitude to Professor E.B. Klyushin for valuable advice in researching and writing this article, as well as to the staff of the Applied Geodesy Department of MIIGAiK.

Abstract. The article discusses problematic theoretical issues inherent in modern algorithms for processing the results of satellite measurements. Using the example of the simplest radio navigation system called “MPShch” after Mandelshtam, Papaleksi, Shchegolev, developed in the USSR in 1936, the authors of the article showed that the main drawback of existing algorithms is that the mathematical record of the simultaneity of registration of phase cycles is not used, and the importance of these actions is usually noted. It is shown that the operation of disambiguation is not a theoretically justified action. In this case, it is recommended to record the duration of the measurement session and it is shown that this can serve as an additional source of information. Based on the studies performed, a simple, unified and rigorous algorithm for calculating the coordinates of the determined points based on the results of registering phase cycles when using the radio navigation system in the phase probe mode was written. It is shown that the phase probe method may turn out to be more promising, as it eliminates the need to organize a base station, there is no need to delay the receiver at the reference point, waiting for the satellites to have a noticeable offset, and most importantly, the volume of measurements is halved, which can contribute to an increase in the accuracy of calculating the required quantities.

References

1. Leick A. *GPS Satellite Surveying*. 3rd ed. New York: A Wiley & Sons. 2004. 399 p.
2. Teunissen PJG, Kleusberg A. *GPS for geodesy*. Berlin: Springer, 1998. 655 p.
3. Seeber G. *Satellite Geodesy*. 2nd completely revised and extended edition, Berlin-New York, Walter de Gruyter, 2003. 612 p.
4. Hofmann-Wellenhof, B. *Global Positioning System. Theory and practice*. Fifth, revised edition. New-York: Springer. 2001. 384 p.
5. Klyushin EB, Kravchuk IM, The Satellite navigation system - a specific tool for fundamental research. *Izvestia vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying*. 2017;5: 14 - 18.
6. Author's certificate 47348, USSR, IPC G 01 S3/46, №139326, declared 10/11/1933, Sposob opredeleniya pri pomoshchi elektromagnitnykh voln polozheniya puncta [Method for determining the position of a point using electromagnetic waves]. Published on 30 June 1936. Mandel'shtam LI, Papaleksi ND, Shchegolev EA
7. Author's Certificate 47723, IPC G 01 S13/34, No. 137341, declared 10/11/1933, published on 31 July 1936. Sposob izmereniya rasstoyanii pri pomoshchi elektromagnitnykh voln [The method of measuring distances using electromagnetic waves]. Mandel'shtam LI, Papaleksi ND, Shchegolev EA
8. Author's Certificate 47724, IPC G 01 S13/34, No. 149996, declared 07/01/1934, published on July 31, 1936. Ustroistvo dlya izmereniya rasstoyanii s pomoshch'yu elektromagnitnykh voln [Device for measuring distances using electromagnetic waves]. Mandel'shtam LI, Papaleksi ND, Shchegolev EA
9. Bykov VI, Nikitenko YuI, Fazovaya radionavigatsionnaya sistema Dekka-navigator. [Phase radio navigation system Decca-navigator], Izdate'l'stvo «Transport», Publishing house "Transport", Moscow, 1969, 175 p.
10. Povalyaev A.A., Veitsel A.B., Mazepa RB, Global'nye sputnikovye sistemy sinkhronizatsii i upravleniya dvizheniem v okolozemnom prostranstve [Global satellite systems for synchronization and motion control in near-Earth space, Uch. allowance. M.: University book, 2012.
11. Klyushin EB, Kravchuk IM, Analiz algoritma obrabotki rezul'tatov sputnikov'x izmerenij fazovy'm metodom [Analysis of the algorithm for processing the results of satellite measurements by the phase method]. *Izvestia vuzov. Geodesy and Aerophotosurveying*. 2019;63(4): 75-84. DOI: 10.30533/0536-101X-2019-63-4-375-384

Ivan M. Kravchuk

PhD in Engineering; Department of Geodesy; Faculty of Geodesy
ORCID: 0000-0002-8842-8700

Received 2021.09.27. Revised 2021.12.10. Accepted 2021.12.20