

На правах рукописи

**ХАМИД ФАРАМАРЗ ПУР**

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА ДЕФОРМАЦИЙ ПОДЗЕМНЫХ  
СООРУЖЕНИЙ**

**Специальность: 25.00.32 – Геодезия**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук**

**Москва 2007**

Работа выполнена на кафедре прикладной геодезии Московского государственного университета геодезии и картографии (МИИГАиК)

Научный руководитель: доктор технических наук Ключин Е.Б.

Официальные оппоненты: доктор технических наук Матвеев С.И.  
кандидат технических наук Назаров А.М.

Ведущая организация: Московское аэрогеодезическое предприятие  
(ФГУП «МАГП»)

Защита диссертации состоится « 31 » мая 2007 г. в 10.00 час. на заседании диссертационного совета Д 212.143.03 при Московском государственном университете геодезии и картографии по адресу: 105064, Москва, К-64, Гороховский пер., 4, МИИГАиК, ауд. 321.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИИГАиК.

Автореферат разослан « 16 » марта 2007 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Климков Ю.М.

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Актуальность темы:**

Опыт эксплуатации подземных видов транспорта неопровержимо доказал, что лучшим видом современного городского транспорта является метрополитен.

В г. Тегеране (Исламская Республика Иран) несмотря на высокую плотность населения не достаточно развита сеть общественного транспорта. На дорогах постоянно возникают пробки огромной протяженности, приводящие к сильной загазованности воздуха. Это стало причиной ухудшения экологии города. Проектирование линий метрополитена в г. Тегеран началось еще в 1959 году. К настоящему времени закончено строительство и пущены в эксплуатацию три линии метрополитена. В ближайшее время планируется строительство еще четырех линий.

Тоннели являются необходимым звеном в строительстве подземных инженерных сооружений, связанных с ростом и развитием народного хозяйства страны. В связи с этим геодезические работы находят широкое применение при тоннелестроении. Геодезическо-маркшейдерские работы являются ответственным процессом на всех этапах строительства метрополитенов. От своевременного и качественного выполнения геодезическо-маркшейдерских работ во многом зависят качество, сроки и эксплуатационный эффект использования строящихся объектов. Исследования в этой области способствуют достижению более высоких точностей, как при наблюдении, так и при вычислениях. Новые разработки позволяют автоматизировать работу в тоннеле и способствуют сокращению времени затрачиваемого на измерение углов и расстояний. В процессе строительства тоннелей метрополитена, после установки колец тоннеля возникают различного рода деформации. Для обеспечения безаварийной эксплуатации метрополитена необходимо вести постоянные и высокоточные геодезические наблюдения за развитием деформаций подземных сооружений метрополитена.

В связи с вышеизложенным, перед геодезическо-маркшейдерской службой г. Тегерана встает задача изучения современного опыта строительства метрополитена, для этого целесообразно применить методы ведения геодезических измерений в г. Москве при строительстве и эксплуатации сооружений метрополитена для выполнения аналогичных работ в г. Тегеране – столице Исламской Республики Иран.

Внедрение новых методов и средств геодезических измерений должно со-

проводиться и новой методикой обработки результатов измерений. Только комплексное решение задачи позволит добиться максимальной эффективности и будет отвечать современным требованиям.

### **Цель работы:**

Основной целью диссертационной работы является разработка методов анализа колец тоннеля с подробным анализом точности деформационных характеристик применительно к метрополитену г. Тегеран.

### **Научная новизна работы:**

1. Разработана эффективная методика ориентирования подземных геодезических сетей способом двух шахт.

2. Разработана методика эффективной обработки результатов измерений с возможностью объективной оценки точности результатов измерений.

3. Составлена математическая модель, связывающая результаты измерений с деформационными характеристиками стенок тоннелей:

$$(R + \Delta_i)^2 = S_i^2 + X^2 + Y^2 - 2S_i \sqrt{X^2 + Y^2} \cos \varphi_i,$$

где  $X, Y$  – координаты центра тоннеля относительно точки стояния инструмента;  
 $R$  – вероятнейший радиус тоннеля.

4. Разработаны два метода решения поставленной задачи. В первом случае удалось так преобразовать математическую модель формы тоннеля, что уравнивание и оценка точности свелась к коррелятному методу уравнивания. Во втором случае, для того чтобы более строго зафиксировать положение вероятнейшей окружности, уравнивание результатов измерений выполняется под двумя условия-

ми:  $F_1 = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{m_i^2} \rightarrow \min$  – минимум суммы квадратов поправок в измеренные вели-

чины с учетом средних квадратических ошибок измерений и  $F_2 = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \rightarrow \min$  – ми-

нимум суммы квадратов отклонений наблюдаемых точек стенок тоннеля от вероятнейшей окружности.

5. На основе практических расчетов показано, что повышение точности измеряемых величин не является существенным, но это позволяет ввести в обработку точностные характеристики измеренных величин и осуществить оценку точности искомых параметров, используя коррелятный метод с дополнительными неизвестными.

6. Показано, что современные средства геодезических измерений, а именно, электронные тахеометры, позволяют выполнять высокоточные измерения в безотражательном режиме с точностью, вполне удовлетворяющей точностным требованиям к определению деформаций колец тоннеля (2 – 5 мм).

#### **Практическая значимость работы:**

Развитие городского транспорта в Тегеране ведется активными темпами. К настоящему времени уже активно эксплуатируются линии современного метро, и в ближайшем будущем сеть метрополитена Тегерана будет существенно развита. Учитывая, что геологические условия в зоне строительства тоннелей являются сложными, проблема наблюдений за деформациями обделок тоннелей является важной и актуальной задачей. Разработанная методика обработки результатов измерений будет применена при анализе деформаций тоннелей метрополитена в Тегеране.

#### **Публикации:**

По теме диссертации опубликованы 2 статьи.

#### **Структура и объем диссертации:**

Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов с подразделами, заключения и списка литературы. Общий объем работы – 84 стр. Диссертация содержит три таблицы и 24 рисунка. Список литературы составляет 37 наименований.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

### **ВВЕДЕНИЕ**

Обоснована актуальность темы, сформулированы цели и основные направления исследований.

### **ГЛАВА 1. МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬСТВА ТОННЕЛЕЙ И ТОЧНОСТНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ**

В главе дается общая характеристика Исламской Республики Иран (название с 1979 г.) и столицы страны – г. Тегерана. Площадь Тегерана с его провинцией со-

ставляет около 28,225 кв. км. Население г. Тегеран – главного экономического центра страны – вместе с его провинциями составляет около 14-15 млн. человек. Климатической особенностью города является климат – жаркий и сухой летом и холодный в зимнее и осеннее время. Город Тегеран - это не только столица страны, но и ее дипломатический, культурный и экономический центр.

90% загрязнения атмосферы города происходит от выхлопных газов машин. Усугубляет положение большое количество заводов и фабрик на западе города, которые также производят большое количество выбросов в атмосферу вредных веществ и дыма. Такое состояние воздуха и постоянная нехватка кислорода приводят к ухудшению здоровья населения и развитию хронических заболеваний, снижению продолжительности жизни. Отмечается, что сложившаяся ситуация уже много лет назад привело власти Тегерана к мысли о необходимости строительства метрополитена на территории города.

Рассмотрены виды тоннелей и отмечено, что тоннели являются необходимым звеном в строительстве подземных инженерных сооружений, связанных с ростом и развитием народного хозяйства страны. В связи с этим геодезические работы находят широкое применение при тоннелестроении.

Тоннели мелкого заложения обычно сооружают открытым способом. Перенесение в натуру оси трассы особых затруднений не вызывает, так как тоннели мелкого заложения обычно проектируют под малозастроенными открытыми территориями или под широкими улицами и проездами городов. На застроенных территориях для строительства тоннелей мелкого заложения применяют траншейный способ, при котором в местах расположения стен тоннеля роют узкие котлованы — траншеи и на проектной глубине бетонируют стены. Строительство горных тоннелей начинают непосредственно на дневной поверхности, врезаясь в горный массив. Порталы обычно сооружают в тех случаях, когда тоннель в горном массиве начинается полным поперечным сечением.

Тоннели метрополитена - тоннели глубокого заложения сооружают обычно посредством вертикальных стволов. Учитывая удобство дальнейшей эксплуатации тоннелей, стволы обычно проектируют смещенными на 20-50 м от трассы тоннеля. Так как в условиях густой городской застройки трудно выбрать место для строи-

тельной площадки, то нередко стволы смещают от трассы на расстояние более 50 м.

Наиболее индустриальный способ сооружения тоннелей — щитовой. В смонтированной оболочке щита собирают тубинговые кольца, необходимые для упора щитовых домкратов при выдвигании щита из камеры. В настоящее время на строительстве метрополитена применяют механизированные щиты, которые при помощи специальных механизмов и долот разрабатывают и транспортируют породы.

Приводятся данные о габарите и форме поперечных сечений тоннелей. Отмечается, что пространство между габаритом подвижного состава и габаритом приближения оборудования, называемое габаритным запасом, имеет весьма большое значение для геодезистов. Габаритный запас служит исходной величиной для расчета требуемой точности выполнения геодезических работ при сооружении тоннелей.

В последнем разделе главы даются сведения об особенностях создания геодезического обоснования тоннеля метрополитена и рассматривается точность геодезических наблюдений за деформациями. Геодезическое обоснование для строительства тоннелей можно разделить на геодезическое обоснование на поверхности и геодезическое обоснование в подземных выработках. Основным плановым геодезическим обоснованием для вынесения в натуру запроектированной трассы тоннеля и всех сооружений служит тоннельная триангуляция, трилатерация или линейно-угловая сеть. Для сгущения точек планового обоснования, получаемого этими методами, строят основную полигонометрическую сеть или прокладывают полигонометрический ход. Для передачи координат от пунктов основной полигонометрии к стволам прокладывают подходную полигонометрию в виде отдельных ходов, системы ходов или замкнутых полигонов, опирающихся на пункты основной полигонометрической сети. От точек подходной полигонометрической сети координаты передают в подземные выработки через стволы шахт. По трассе вслед за движущимся вперед забоем прокладывают ходы сначала рабочей полигонометрии со сравнительно короткими сторонами, затем основной подземной полигонометрии.

Для вынесения проекта профиля трассы создается высотное геодезическое обоснование в виде нивелирных сетей, класс которых выбирают в зависимости от длины тоннеля и длин встречных подземных выработок, предусмотренных проектом. Основная геодезическая задача при сооружении тоннелей обеспечить так

называемую сбойку встречных подземных выработок. Допустимая величина несбойки равна 100 мм.

В перегонных тоннелях круглого очертания измеряют горизонтальные и косые диаметры колец в тоннелях, а в тоннелях прямоугольного сечения - расстояния между вертикальными стенами на разных уровнях от лотка, для чего закладывают в стены специальные знаки. Значительная деформация может возникнуть при обратной засыпке котлованов после возведения конструкций. Для выявления деформаций в сооружаемых тоннелях с блочной и тубинговой обделкой, которые могут быть вызваны боковым горным давлением, измеряют горизонтальные диаметры колец обделки с периодичностью 10-20 дней. В тоннелях с тоннельной обделкой для выявления возможных деформаций наблюдают за сближением стен тоннеля, измеряя расстояние между противоположными знаками. Деформация колец тоннеля должна измеряться со средней квадратической ошибкой не хуже 5 мм.

## **ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ**

При строительстве подземных сооружений, в процессе разработки породы развивается сильное горное давление, под действием которого деформируются крепления и уже построенные сооружения, как с бетонной, так и с тубинговой обделкой.

В зависимости от гидрогеологических условий, горное давление действует в различных направлениях, и, в связи с этим, возникают различные деформации: осадка крепления при проходке штолен и разработке калотт; осадка сводов готовых сооружений; сближение стен готовых сооружений; выпучивание лежанов рам, лотков и обратных сводов. В малоустойчивых породах горное давление бывает настолько большим, что разрушаются уже сооруженные конструкции.

Указанные обстоятельства требуют тщательных наблюдений за деформацией подземных конструкций на всех стадиях строительства, согласно с методами исследования деформаций сооружений. Особенно тщательно надлежит наблюдать за деформацией колец на станциях при сооружении параллельных тоннелей и при раскрытии проемов. В этих случаях наблюдения по описанной выше программе рекомендуется производить не реже чем через каждые три дня.

Особое внимание в главе уделено особенностям ориентирования подземных геодезических сетей методом двух шахт. При реализации данного метода на по-



верхности определяют координаты двух пунктов сети и с помощью двух отвесов или приборов оптического вертикального проектирования их координаты передают в тоннель и закрепляют постоянными геодезическими знаками. Между двумя знаками с известными координатами прокладывают подземный полигонометрический ход. Отличительной особенностью подземного полигонометрического хода является то, что в нем отсутствуют линии с известным дирекционным углом. Решение такой задачи следует начинать с задания любого значения дирекционного угла одной из сторон полигонометрического хода, например, дирекционного угла стороны  $S_1$  (линия  $A - 1$ )  $\alpha'_{S_1} = 0$ . Используя координаты пункта  $A$  и выбранного дирекционного угла  $\alpha'_{S_1}$ , вычисляются координаты всех пунктов полигонометрического хода, включая и координаты второго опорного пункта  $B$ . Результаты расчета иллюстрируются на рис. 1.

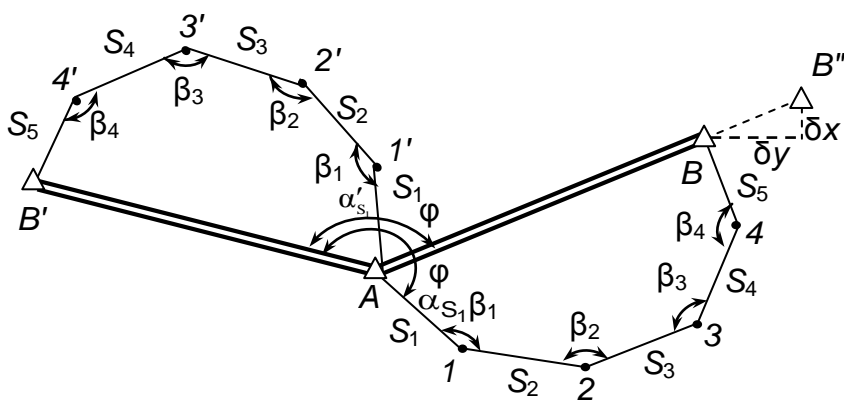


Рис. 1. Положение полигонометрического хода при произвольном ориентировании

Используя координаты пункта  $B$  и полученные координаты пункта  $B'$ , вычисляется угол разворота  $\varphi$  полигонометрического хода между пунктами  $B$  и  $B'$  относительно пункта  $A$ , и определяется

исправленное значение дирекционного угла первой стороны хода:

$$\alpha_{S_1} = \alpha'_{S_1} + \varphi. \quad (1)$$

Получив исправленное значение дирекционного угла  $\alpha_{S_1}$  (1), вычислим координаты пунктов полигонометрического хода. При этом координаты конечной точки хода  $B''$  будут находиться на прямой  $AB$  (рис. 1). Величина невязки хода  $BB''$  для вытянутого полигонометрического хода будет определяться в основном ошибками измерения длин линий хода и является исходной величиной для уравнивания хода. Контролем правильности вычислений в таком случае будет являться отсутствие поперечной невязки хода.

Получив невязки координат полигонометрического хода  $\delta x$  и  $\delta y$  (рис.1),

можно вычислить продольный  $t$  и поперечный  $u$  сдвиги хода:

$$t = \frac{\delta y(y_B - y_A) + \delta x(x_B - x_A)}{L}; \quad u = \frac{\delta y(x_B - x_A) + \delta x(y_B - y_A)}{L},$$

где  $L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$  - длина полигонометрического хода.

Оценка точности вычисления дирекционных углов подземного полигонометрического хода производится для вытянутого полигонометрического хода вдоль оси ординат при равных длинах сторон  $S$ . Ошибка угла разворота угла  $\varphi$  будет определяться величиной поперечного сдвига вытянутого хода и линейном виде будет равна:

$$\Delta_{non} = \left[ (n-1)S \frac{\Delta\beta_1}{\rho} + (n-2)S \frac{\Delta\beta_2}{\rho} + \dots + S \frac{\Delta\beta_n}{\rho} \right], \quad (2)$$

где  $n$  - число сторон в вытянутом полигонометрическом ходе;  $\Delta\beta_i$  - истинные ошибки измерения углов поворота хода.

Ошибка угла разворота хода  $\varphi$  равна:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta_{non}\rho}{nS} = \frac{n-1}{n}\Delta\beta_1 + \frac{n-2}{n}\Delta\beta_2 + \frac{n-3}{n}\Delta\beta_3 + \dots + \frac{1}{n}\Delta\beta_n. \quad (3)$$

В таком случае ошибка дирекционного угла полигонометрического хода, учитывая, что поправка в угол вводится со знаком, обратным поперечному сдвигу, равна:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= -\Delta\alpha; \quad \Delta\alpha_2 = -\Delta\alpha + \Delta\beta_1; \quad \Delta\alpha_3 = -\Delta\alpha + \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2; \\ \Delta\alpha_i &= -\Delta\alpha + \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 + \dots + \Delta\beta_{i-1}. \end{aligned}$$

С учетом (3) получаем:

$$\Delta\alpha_i = \frac{1}{n}\Delta\beta_1 + \frac{2}{n}\Delta\beta_2 + \frac{3}{n}\Delta\beta_3 + \dots + \frac{i-1}{n}\Delta\beta_{i-1} - \frac{n-i}{n}\Delta\beta_i - \dots - \frac{1}{n}\Delta\beta_n. \quad (4)$$

Переходя от истинных ошибок измерения к средним квадратическим, для равномерно измеренных углов хода, произведя суммирование (4), имеем:

$$m_{\alpha_i} = \frac{m_\beta}{n} \sqrt{\frac{(n-i+1)(n-i+2)(2n-2i+3) + i(i+1)(2i+1)}{6}}.$$

На рис. 2 показан характер изменения ошибки дирекционного угла вытянутого полигонометрического хода при количестве сторон 6, 8 и 10. Общей и необычной характеристикой полигонометрического хода, не имеющего примычных углов, является то, что наиболее точно определяется дирекционный угол в середине хода. На рис. 2 приведены графики коэффициента  $k$ :

$$m_{\alpha_i} = m_{\beta} k, \text{ где } k = \frac{\sqrt{(n-i+1)(n-i+2)(2n-2i+3)+i(i+1)(2i+1)}}{n\sqrt{6}}.$$

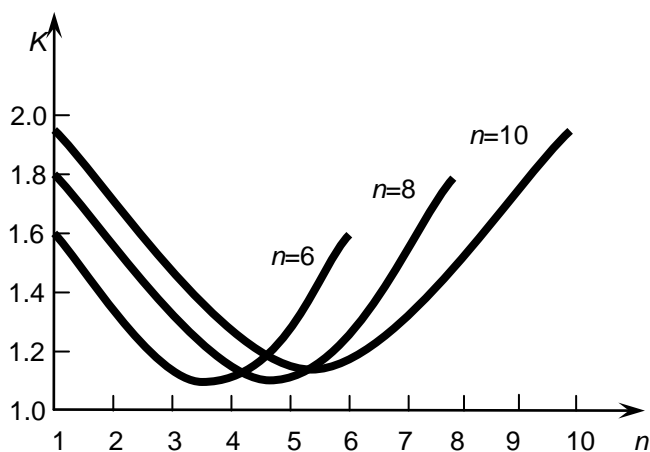


Рис. 2. График изменения коэффициента K

Второй отличительной особенностью полигонометрического хода, опирающегося только на два пункта с известными координатами, заключается в том, что при небрежном выполнении расчетов нельзя исключать ситуации, при которой могут быть вычислены координаты «зеркального» полигонометрического

хода. Избежать подобной ошибки поможет вычисление левых или правых углов поворота полигонометрического хода и сравнение их с измеренными.

Средняя квадратическая ошибка определения дирекционного угла в середине подземного полигонометрического хода, обусловленная ошибками угловых измерений, практически равна средней квадратической ошибке измерения углов. При количестве сторон в подземном полигонометрическом ходе не более 10, и средней квадратической ошибке измерения угла 2-3", основной ошибкой может стать ошибка передачи координат в тоннель. В диссертации выполнен подробный анализ точности определения координат пунктов подземной полигонометрической сети.

Выполненный анализ точности показывает, что подземный полигонометрический ход, опирающийся на два пункта, вполне может обеспечить точность, необходимую для наблюдения за изменением положения тоннеля. Основным недостатком данного метода является слабый контроль возможных промахов при выполнении работ.

В таких условиях геодезические работы необходимо выполнять особенно тщательно, обеспечив повторные измерения, для надлежащего контроля.

### ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИЙ КОЛЕЦ ТОННЕЛЯ

Внедрение в геодезию современных средств измерений привело к появлению новых задач. Такой задачей является обработка спутниковых результатов измерений, когда встает вопрос об учете ошибок исходных данных. Если использо-

вать основную формулу метода наименьших квадратов в традиционной записи:

$$\sum_{i=1}^n P_i v_i^2 \rightarrow \min, \quad (5)$$

то возникает новая проблема: как вычислить веса параметров уравнений Кеплера и поправочных коэффициентов?

Для этой задачи сформулирована новая целевая функция: минимум суммы квадратов остаточного рассогласования преобразованных координат и координат государственной или местной системы координат. Формулировка целевой функции отличается от целевой функции, предложенной Гауссом при разработке метода наименьших квадратов. При использовании новой целевой функции можно достичь желаемого результата и вычислить параметры преобразования, но при этом возникают две очень сложные проблемы:

- как вычислить веса величин, используемых в обработке;
- как выполнять оценку точности параметров преобразования и преобразованных координат, так как Гаусс разработал метод оценки точности для другой целевой функции.

К этому же классу задач относится и методика анализа деформаций колец тоннеля. Современные алгоритмы обработки результатов измерений предусматривают вычисление положения вероятнейшей окружности под условием минимума суммы квадратов расхождений реального положения колец тоннеля от вероятнейшего. Новая целевая функция не позволяет использовать при обработке результатов измерений все точностные характеристики измеренных и приближенно известных величин и выполнить объективную оценку как результатов измерений, так и их функций.

С развитием дальномерной техники в геодезии стали широко применять полигонометрию и линейно-угловые сети. При уравнивании таких сетей возникли трудности: как вычислять веса для угловых и линейных измерений? Вес – величина размерная или безразмерная? Этот вопрос станет понятен, если целевую функцию (5) записать в виде:

$$F = \sum_{i=1}^n (P_{\beta_i} v_{\beta_i}^2 + P_{S_i} v_{S_i}^2) \rightarrow \min, \quad (6)$$

где  $P_{\beta_i}$  – веса угловых измерений;  $v_{\beta_i}$  – поправки в угловые измерения;  $P_{S_i}$  – веса

линейных измерений;  $v_{S_i}$  – поправки в линейные измерения.

Если вес – величина безразмерная, то в целевой функции (6) будут складываться, например, квадратные секунды с квадратными миллиметрами. В результате остро стоит вопрос о соотношении весов в угловых и линейных измерениях. Для того чтобы устранить возникшую парадоксальную ситуацию, можно записать

$$\text{формулу (6) в следующем виде: } F = \sum_{i=1}^n P_i v_i^2 = \mu^2 \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{m_i^2} \rightarrow \min. \quad (7)$$

Средняя квадратическая ошибка единицы веса  $\mu^2$ , стоящая перед знаком суммы, не влияет на отыскание минимума, следовательно, целевую функцию (7)

$$\text{можно представить в окончательном виде: } F = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{m_i^2} \rightarrow \min. \quad (8)$$

По сути, эта та же формула Гаусса, лишь записана она в другом виде. Однако такая форма записи снимает все трудности поиска соотношения весов между разнородными измерениями, так как под знаком суммы стоят безразмерные коэффициенты, если средние квадратические ошибки и поправки вычислены в единой размерности. Более того, целевая функция (8) позволяет вычислять поправки в любые величины, которые измерены или известны приближенно при совместной их обработке. В целевой функции (8) роль веса выполняет величина, обратная квадрату средней квадратической ошибки, что и рекомендовал Гаусс. Вводить в эту целевую функцию понятие веса бессмысленно, так как при обработке результатов измерений это ничего нового не прибавит и не убавит.

Аналогичная ситуация сложилась и при анализе результатов наблюдений за деформациями колец туннеля. По результатам угловых и линейных измерений вычисляют координаты нескольких точек по периметру тоннеля в условной системе координат, а затем вычисляют положение аппроксимирующей окружности под условием:

$$F = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \rightarrow \min, \quad (9)$$

где  $\Delta_i$  – отклонение радиуса аппроксимирующей окружности от реального расстояния от оси тоннеля до обделки.

Целевая функция (9) позволяет вычислить интересующие параметры тонне-

ля, но не допускает учета точностных характеристик измеренных величин, и невозможно воспользоваться алгоритмом Гаусса для оценки точности вычисленных параметров тоннеля. К сожалению, целевая функция (9) нашла неоправданно широкое применение при решении инженерно-геодезических задач, несмотря на ее откровенные недостатки. Автором разработана методика обработки результатов измерений при наблюдениях за деформациями колец тоннеля с использованием целевой функции (8) при сохранении возможности выполнения оценки точности всех вычисляемых параметров тоннеля.

Обычно метод решения задачи в геодезии состоит из самостоятельных этапов.

*Этап 1. Формулировка основной цели работы.*

Выполнить анализ деформаций колец тоннеля с заданной средней квадратической ошибкой 3 мм. Под термином «деформация колец тоннеля» может подразумеваться: отклонение размеров тоннеля от проектного; отклонение размеров тоннеля от вероятнейшей окружности.

При анализе отклонений размеров тоннеля от проектного значения все проектные размеры при обработке входят как константы, и к ним не требуется вычислять поправки. В зависимости от поставленной задачи могут встречаться оба варианта анализа деформаций. В большинстве случаев в инженерно-геодезической практике задается несколько точностных характеристик, например, допуск на радиус тоннеля и допуск на отклонение от вероятнейшего радиуса тоннеля. В таком случае целесообразнее вычислять действительный размер собранного тоннеля. В дальнейшем примере будем рассматривать именно этот вариант, как наиболее характерный.

*Этап 2. Выбор метода измерений, который решает поставленную задачу.*

Одновременно с выбором метода измерений необходимо записать математические зависимости между измеряемыми и вычисляемыми величинами (в данном случае деформационные характеристики колец тоннеля). Строгая математическая зависимость между измеряемыми и вычисляемыми величинами полностью исключает дальнейший выбор каких-либо иных «независимых параметров». В том случае, если измеряемые и вычисляемые величины связаны нелинейными уравнениями, то приведение данной функции к линейному виду возможно лишь в том случае, если удастся найти приближенные значения именно вычисляемых вели-

чин, и в таком случае нет места другим «независимым параметрам».

*Этап 3. Предварительная оценка точности с использованием метода наименьших квадратов, по результатам оценки точности выбор метода измерений, а также обоснование точности полевых измерений.*

*Этап 4. Полевые измерения.*

*Этап 5. Обработка результатов полевых измерений, вычисление уравненных значений искомым величин с оценкой их точности.*

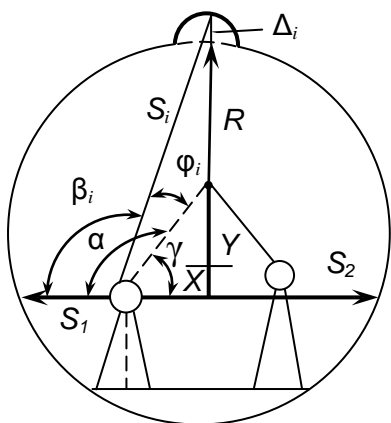


Рис. 3. Схема измерения деформации при помощи лазерной рулетки и теодолита

Процесс измерения заключается в следующем. В некоторой точке  $A$  устанавливают инструмент и измеряют углы наклона  $\beta_i$ , и расстояние  $S_i$  до стенок тоннеля в нескольких точках, расположенных в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси тоннеля. Зная проектные размеры тоннеля и выполнив дополнительные измерения можно определить приближенные координаты оси тоннеля относительно оси теодолита (рис. 3) со средней квадратической ошибкой 3 - 4 см.

носительно оси теодолита (рис. 3) со средней квадратической ошибкой 3 - 4 см.

Используя полярные координаты  $S_i$  и  $\beta_i$  и их точностные характеристики, необходимо вычислить положение оси тоннеля, радиус тоннеля и деформационные характеристики тоннеля с объективной оценкой точности. Как видно из рис. 4, уравнения, которые связывают измерения и интересующие нас величины, имеют вид:

$$(R + \Delta_i)^2 = S_i^2 + X^2 + Y^2 - 2S_i \sqrt{X^2 + Y^2} \cos \varphi_i, \quad (10)$$

где  $R$  – радиус тоннеля;  $\Delta_i$  – отклонение фактического положения стенок тоннеля от окружности;  $S_i$  - расстояние от прибора до наблюдаемой точки;  $X$  – расстояние от прибора до центра тоннеля по оси  $X$ ;  $Y$  – расстояние от центра тоннеля до горизонтальной оси прибора по оси  $Y$ ;  $\varphi_i$  – угол между направлением на центр тоннеля и наблюдаемой точкой. Учитывая, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{X}{Y}; \quad (11)$$

$$\alpha = 180^\circ - \gamma, \quad (12)$$

где  $\alpha$  – угол между горизонтом инструмента и направлением на центр тоннеля;

$$\varphi_i = \alpha - \beta_i, \text{ если } \alpha > \beta_i, \quad (13)$$

где  $\beta_i$  – измеренный угол между горизонтом инструмента и визирным лучом на точку  $I$  и

$$\varphi_i = \beta_i - \alpha, \text{ если } \alpha < \beta_i. \quad (14)$$

При этом необходимо выбрать знак координат  $X$  и  $Y$ . В дальнейшем будем считать величину  $Y$  положительной, если центр прибора расположен ниже оси тоннеля,  $X$  – величиной положительной, если центр прибора расположен слева от оси тоннеля, как показано на рис. 3.

Уравнению (10) будут удовлетворять лишь уравненные значения, причем измеренные или приближенно известные величины (далее выделены их волнистой чертой сверху) и уравненные связаны следующими равенствами:

$$R = \tilde{R} + V_R; \Delta i = \tilde{\Delta}_i + V_{\Delta_i}; X = \tilde{X} + V_X; Y = \tilde{Y} + V_Y; \varphi_i = \tilde{\varphi}_i + V_{\varphi_i}; S_i = \tilde{S}_i + V_{S_i}.$$

С учетом этих представлений приведем уравнение (10) к линейному виду относительно поправок в измеренные величины, но в начале определим зависимость между поправками в  $\beta_i$  и  $\varphi_i$ . С учетом (12) из уравнений (13) и (14) получим:

$$V_{\varphi_i} = -V_\gamma - V_{\beta_i}, \text{ если } \alpha > \beta_i; \quad (15)$$

$$V_{\varphi_i} = V_\beta + V_{\gamma_i}, \text{ если } \alpha < \beta_i. \quad (16)$$

В свою очередь, поправку  $V_\gamma$  получим из уравнения (11), представив его в виде:

$$V_\gamma = \rho \frac{\cos \tilde{\gamma}}{\tilde{D}} V_X - \rho \frac{\sin \tilde{\gamma}}{\tilde{D}} V_Y, \quad (17)$$

где

$$\tilde{D} = \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2}. \quad (18)$$

Следовательно,

$$V_{\varphi_i} = -\rho \frac{\cos \tilde{\gamma}}{\tilde{D}} V_X + \rho \frac{\sin \tilde{\gamma}}{\tilde{D}} V_Y - V_{\beta_i} \text{ при } \alpha > \beta_i, \quad (19)$$

$$V_{\varphi_i} = \rho \frac{\cos \tilde{\gamma}}{\tilde{D}} V_X - \rho \frac{\sin \tilde{\gamma}}{\tilde{D}} V_Y + V_{\beta_i} \text{ при } \alpha < \beta_i. \quad (20)$$

Запишем уравнение (10) через измеренные значения и поправки к ним:

$$\begin{aligned} (\tilde{R} + V_R + \tilde{\Delta}_i + V_{\Delta_i})^2 &= (\tilde{S}_i + V_{S_i})^2 + (\tilde{X} + V_X)^2 + (\tilde{Y} + V_Y)^2 - \\ &- 2(\tilde{S}_i + V_{S_i}) + \sqrt{(\tilde{X} + V_X)^2 + (\tilde{Y} + V_Y)^2} \cos(\tilde{\varphi}_i + V_{\varphi_i}). \end{aligned} \quad (21)$$



Разложим уравнение (21) в ряд Тейлора и, полагая, что искомые поправки достаточно малы, ограничиваясь первыми членами разложения, с учетом (19) и (20) при  $\alpha > \beta_i$  получим:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\tilde{S}_i \tilde{X} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{D}} - \tilde{X} + \tilde{S}_i \sin \tilde{\varphi}_i \cos \tilde{\gamma}_i \right) V_X + \left( \frac{\tilde{S}_i \tilde{Y} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{D}} - \tilde{Y} - \tilde{S}_i \sin \tilde{\varphi}_i \sin \tilde{\gamma}_i \right) V_Y + \\ & + (\tilde{R} + \tilde{\Delta}_i) \mathcal{V}_{\Delta_i} + (\tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i - \tilde{S}_i) \mathcal{V}_{S_i} + \tilde{S}_i \tilde{D} \sin \tilde{\varphi}_i \frac{V_{\beta_i}}{\rho} + (\tilde{R} + \tilde{\Delta}_i) \mathcal{V}_R + \\ & + \frac{(\tilde{R} + \tilde{\Delta}_i)^2 - \tilde{S}_i^2 - \tilde{X}_i^2 - \tilde{Y}_i^2 + 2\tilde{S}_i \tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i}{2} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

а при  $\alpha < \beta_i$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\tilde{S}_i \tilde{X} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{D}} - \tilde{X} - \tilde{S}_i \sin \tilde{\varphi}_i \cos \tilde{\gamma}_i \right) V_X + \left( \frac{\tilde{S}_i \tilde{Y} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{D}} - \tilde{Y} + \tilde{S}_i \sin \tilde{\varphi}_i \sin \tilde{\gamma}_i \right) V_Y + \\ & + (\tilde{R} + \tilde{\Delta}_i) \mathcal{V}_{\Delta_i} + (\tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i - \tilde{S}_i) \mathcal{V}_{S_i} - \tilde{S}_i \tilde{D} \sin \tilde{\varphi}_i \frac{V_{\beta_i}}{\rho} + (\tilde{R} + \tilde{\Delta}_i) \mathcal{V}_R + \\ & + \frac{(\tilde{R} + \tilde{\Delta}_i)^2 - \tilde{S}_i^2 - \tilde{X}_i^2 - \tilde{Y}_i^2 + 2\tilde{S}_i \tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i}{2} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Введем обозначения: при  $\alpha > \beta_i$ :

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \frac{\tilde{S}_i \tilde{X} \cos \varphi_i}{\tilde{D}} - \tilde{X} + \tilde{S}_i \sin \varphi_i \cos \tilde{\gamma}_i; \quad a_{2i} = \frac{\tilde{S}_i \tilde{Y} \cos \varphi_i}{\tilde{D}} - \tilde{Y} - \tilde{S}_i \sin \varphi_i \sin \tilde{\gamma}_i; \quad a_{3i} = \tilde{R} + \tilde{\Delta}_i; \\ a_{4i} &= \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2} \cos \beta_i; \quad a_{5i} = \frac{\tilde{S}_i \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2} \sin \beta_i}{\rho''}; \quad a_{6i} = a_{3i} = \tilde{R} + \tilde{\Delta}_i; \end{aligned}$$

$$\text{при } \alpha < \beta_i: \quad a_{1i} = \frac{\tilde{S}_i \tilde{X} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{D}} - \tilde{X} - \tilde{S}_i \sin \varphi_i \cos \tilde{\gamma}_i; \quad a_{2i} = \frac{\tilde{S}_i \tilde{Y} \cos \varphi_i}{\tilde{D}} - \tilde{Y} + \tilde{S}_i \sin \varphi_i \sin \tilde{\gamma}_i;$$

остальные коэффициенты остаются без изменений.

С учетом принятых обозначений условные уравнения примут вид:

$$a_{1i} V_X + a_{2i} V_Y + a_{3i} V_{\Delta_i} + a_{4i} V_{S_i} + a_{5i} V_{\beta_i} + a_{6i} V_R + l_i = 0. \quad (24)$$

Таблица 1

№ п/п	$\beta_i$	$S_i$ , см	$\varphi_i$
1	0°00'00"	188,5	159°56'38"
2	30°00'00"	209,7	129°56'38"
3	60°00'00"	234,7	99°56'38"
4	90°00'00"	266,0	69°56'38"
5	120°00'00"	302,8	39°56'38"
6	150°00'00"	323,8	9°56'38"
7	180°00'00"	318,0	20°03'22"

Измеренные значения углов  $\beta_i$  и расстояний от дальномера до стенок тоннеля  $S_i$ , представлены в табл. 1.

Зная проектное значение радиуса тоннеля  $R = 255$  см, высоту пола  $h_1$  и высоту инструмента  $h_2$ , можно вы-

числить приближенное значение величины  $\tilde{X}$ :  $\tilde{X} = R - h_1 - h_2$ .

В нашем случае  $h_1 + h_2 = 232$  см, следовательно,  $\tilde{X} = 23$  см. В соответствии с ранее принятым расположением осей координат, величину  $\tilde{Y}$  вычислим по горизонтальным расстояниям  $S_1$  и  $S_7$ :

$$\tilde{Y} = \frac{S_1 + S_7}{2} - \tilde{S}_1 = \frac{\tilde{S}_7 - \tilde{S}_1}{2}. \quad (25)$$

Из табл. 1 находим, что  $S_1 = 188,5$  см,  $S_7 = 318,0$  см, следовательно,  $\tilde{Y} = 64,8$  см.

По приближенным координатам оси инструмента вычисляется угол  $\tilde{\gamma}$ :

$$\tilde{\gamma} = \arctg \frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}} = 20^\circ 03' 22'' \text{ и углы } \tilde{\gamma} + \tilde{\beta}_I. \text{ Затем вычисляются коэффициенты } a_{ij} \text{ по при-}$$

веденному выше алгоритму.

Известно, что деформации колец тоннеля – величины сравнительно малые, и в первом приближении примем  $\tilde{\Delta}_i = 0$  со средней квадратической ошибкой 3 – 4 см. На примере расчета далее показано, что такой подход позволяет вычислить необходимые деформационные характеристики, однако у него имеются и некоторые недостатки. При уравнивании результатов измерений подобных схем измерений под условием (8), поправки к приближенным отклонениям фактического положения стенок тоннеля от окружности, по сути, являются собственно отклонениями, так как принято, что  $\tilde{\Delta}_i = 0$ . Далее рассмотрен иной подход к обработке результатов измерений.

По приближенным координатам оси инструмента вычислим угол  $\tilde{\gamma}$ :

$$\tilde{\gamma} = \arctg \frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}} = 20^\circ 03' 22'' \text{ и углы } \tilde{\gamma} + \tilde{\beta}_I, \text{ которые отражены в табл. 1 } (\varphi_i).$$

$$\text{Найдем невязки } l_i \text{ по формуле: } l'_i = \frac{(\tilde{R} + \tilde{\Delta}_i)^2 - \tilde{S}_i'^2 - \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_2^2 + 2\tilde{S}_i' \tilde{D}' \cos \tilde{\varphi}'_i}{2} \text{ и за-}$$

тем представим их в виде матрицы  $L$ .

Составим матрицу обратных весов, используя средние квадратические ошибки,  $P = (M^2)^{-1}$ , где элементами симметричной диагональной матрицы  $M$  размером  $24 \times 24$  являются следующие средние квадратические ошибки:  $m_{x,y} = 3$  см,

$m_{\Delta} = 3$  см,  $m_S = 0,3$  см,  $m_{\beta} = 20''$ ,  $m_R = 3$  см.

Вектор коррелат рассчитывается по формуле:  $K = N^{-1}L$ , где  $N = BP^{-1}B$ .

Вектор поправок найдем по формуле:  $V = P^{-1}BK$ .

Известно, что деформации колец тоннеля – величины сравнительно малые, и в первом приближении примем  $\Delta_i = 0$  со средней квадратической ошибкой 3 – 4 мм. Получив поправки  $V$ , можно найти фактическое положение стенок и радиуса тоннеля, по формулам (15). В итоге получен вектор поправок  $V_i$  (поправки в линейные величины выражены в сантиметрах, а в угловые – в секундах). После определения поправок в измеренные величины, найдено фактическое положение стенок и радиус тоннеля по формуле (15). (Численные значения в автореферате не приводятся).

Выполненный анализ точности результатов уравнивания показал, что величины деформаций колец тоннеля получены со средней квадратической ошибкой 3 мм, а координаты реального положения оси тоннеля – со средней квадратической ошибкой 1,9 мм, как и величина вероятнейшего радиуса.

**Далее в диссертации разработан второй метод определения деформаций стенок тоннеля с одновременным вычислением вероятнейшей окружности.** В данном методе рассмотрены результаты измерений полярных координат (углов и расстояний) с одной стоянки электронного тахеометра. В данном случае целесообразно представить функцию (10) в следующем виде:

$$\Delta_i = \sqrt{S_i^2 + X^2 + Y^2 - 2S_i \sqrt{X^2 + Y^2} \cos \varphi_i} - R. \quad (26)$$

Равенство (26) будет удовлетворено лишь в случае, если все величины будут уравнены.

Измеренные величины представим в виде:  $S_i = \tilde{S}_i + v_{S_i}$ ;  $\varphi_i = \tilde{\beta}_i + v_{\varphi_i}$ , где волнистой чертой сверху отмечены измеренные, либо приближенно известные величины.

Величины деформаций в первом приближении известны  $\tilde{\Delta}_i = 0$ , как величины малые, следовательно, поправки к ним будут собственно смещениями наблюдаемых точек от вероятнейшей кривой:  $\Delta_i = \tilde{\Delta}_i + v_{\Delta_i}$ .

Представим величины, характеризующие положение вероятнейшей окружности, в виде  $X = \tilde{X} + \delta X$ ;  $Y = \tilde{Y} + \delta Y$ ;  $R = \tilde{R} + \delta R$ , где величины  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta R$  являют-

ся дополнительными неизвестными. В таком случае уравнение (26) имеет вид:

$$\Delta_i = \sqrt{(\tilde{S}_i + vS_i)^2 + (\tilde{X} + \delta X)^2 + (\tilde{Y} + \delta Y)^2} - 2(S_i + vS_i) \sqrt{(\tilde{X} + \delta X)^2 + (\tilde{Y} + \delta Y)^2} \cos(\varphi_i + v\varphi_i) - \tilde{R} - \delta R. \quad (27)$$

Полагая, что поправки к измеренным величинам и дополнительным неизвестным – величины малые, воспользуемся разложением в ряд Тейлора и приведем нелинейное уравнение (27) к линейному виду и введем обозначения:

$$\Delta_i = \left( \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i} \right) v_{S_i} + \frac{\tilde{S}_i \tilde{D} \sin \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i} \cdot \frac{v_{\varphi_i}}{\rho} + \left( \frac{\tilde{X}}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{S}_i \tilde{X} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i \tilde{D}} \right) \delta X + \left( \frac{\tilde{Y}}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{S}_i \tilde{Y} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i \tilde{D}} \right) \delta Y + \delta R + \tilde{P}_i - R, \quad (28)$$

где  $P_i = \sqrt{\tilde{S}_i^2 + \tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 - 2\tilde{S}_i \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2} \cos \tilde{\varphi}_i}$ ;  $D = \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2}$ .

Введем обозначения:

$$a'_{1i} = \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i}; \quad a'_{2i} = \frac{\tilde{S}_i \tilde{D} \sin \tilde{\varphi}_i}{\rho \tilde{P}_i}; \quad a'_{3i} = \frac{\tilde{X}}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{S}_i \tilde{X} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i \tilde{D}}; \quad a'_{4i} = \frac{\tilde{Y}}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{S}_i \tilde{Y} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i \tilde{D}}.$$

С учетом принятых обозначений уравнение (28) представим в виде условных уравнений

$$\Psi_i = a'_{1i} v_{S_i} + a'_{2i} v_{\varphi_i} + a'_{3i} \delta X + a'_{4i} \delta Y + \delta R - v_{\Delta_i} + l_i = 0, \quad (29)$$

где невязки  $l_i = \tilde{P}_i - R - \tilde{\Delta}_i$ .

С учетом (19) и (20) уравнение (29) можно представить в виде:

$$\Psi_i = a_{1i} v_S + a_{2i} v_{\beta_i} + a_{3i} \delta X + a_{4i} \delta Y + \delta R - v_{\Delta_i} + l_i = 0, \quad (30)$$

где при

$$\alpha > \beta_i: \quad a_{1i} = \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i}; \quad a_{2i} = -\frac{\tilde{S}_i \tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i}{\rho \tilde{P}_i};$$

$$a_{3i} = \frac{\tilde{X}}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{S}_i \tilde{X} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i \tilde{D}} + \frac{\tilde{S}_i \cos \tilde{\gamma} \cos \varphi_i}{\tilde{P}_i}; \quad a_{4i} = \frac{\tilde{Y}}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{S}_i \tilde{Y} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i \tilde{D}} - \frac{\tilde{S}_i \sin \tilde{\gamma} \cos \varphi_i}{\tilde{P}_i}.$$

$$\text{а при } \alpha < \beta_i: \quad a_{1i} = \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i}; \quad a_{2i} = -\frac{\tilde{S}_i \tilde{D} \cos \tilde{\varphi}_i}{\rho \tilde{P}_i};$$

$$a_{3i} = \frac{\tilde{X}}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{S}_i \tilde{X} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i \tilde{D}} - \frac{\tilde{S}_i \cos \tilde{\gamma} \cos \varphi_i}{\tilde{P}_i}; \quad a_{4i} = \frac{\tilde{Y}}{\tilde{P}_i} - \frac{\tilde{S}_i \tilde{Y} \cos \tilde{\varphi}_i}{\tilde{P}_i \tilde{D}} + \frac{\tilde{S}_i \sin \tilde{\gamma} \cos \varphi_i}{\tilde{P}_i}.$$

Используя условные уравнения (30), составим первую целевую функцию

метода наименьших квадратов:

$$F_1 = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{m_i^2} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i. \quad (31)$$

После дифференцирования из полученных производных сформируем уравнения поправок:  $v_{S_i} = \lambda_i a_{1i} m_S^2$ ;  $v_{\beta_i} = \lambda_i a_{2i} m_\beta^2$ ;  $v_{\Delta_i} = -\lambda_i m_\Delta^2$ . (32)

С учетом поправок, выраженных через корреляты (32), условные уравнения (30) предстанут в виде:

$$\lambda_i [a_{1i}^2 m_S^2 + a_{2i}^2 m_\beta^2 + m_\Delta^2] + a_{3i}^2 \delta X + a_{4i}^2 \delta Y + \delta R + l_i = 0. \quad (33)$$

Для определения параметров вероятнейшей окружности из уравнения (33) сформируем вторую целевую функцию, преобразовав величину свободного члена  $l_i$ :

$$F_2 = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \left[ \sum_{i=1}^n a_{1i} v_{S_i} + a_{2i} v_{\beta_i} + a_{3i} \delta X + a_{4i} \delta Y + \delta R - v_{\Delta_i} + l_i' \right]^2 \rightarrow \min, \quad (34)$$

где  $l_i' = \tilde{P}_i - R$ ,

откуда определим, при каких значениях  $\delta X$ ,  $\delta Y$  и  $\delta R$  функция (34) будет иметь минимум

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \delta X} &= 2 \sum_{i=1}^n [a_{1i} v_{S_i} + a_{2i} v_{\beta_i} + a_{3i} \delta X + a_{4i} \delta Y + \delta R - v_{\Delta_i} + l_i'] a_{3i} = 0; \\ \frac{\partial F_2}{\partial \delta Y} &= 2 \sum_{i=1}^n [a_{1i} v_{S_i} + a_{2i} v_{\beta_i} + a_{3i} \delta X + a_{4i} \delta Y + \delta R - v_{\Delta_i} + l_i'] a_{4i} = 0; \\ \frac{\partial F_2}{\partial \delta R} &= 2 \sum_{i=1}^n [a_{1i} v_{S_i} + a_{2i} v_{\beta_i} + a_{3i} \delta X + a_{4i} \delta Y + \delta R - v_{\Delta_i} + l_i'] = 0, \end{aligned}$$

откуда получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{1i} a_{3i} v_{S_i} + \sum_{i=1}^n a_{2i} a_{3i} v_{\beta_i} + \delta X \sum_{i=1}^n a_{3i}^2 + \delta Y \sum_{i=1}^n a_{4i} a_{3i} - \delta R \sum_{i=1}^n a_{3i} - \sum_{i=1}^n a_{3i} v_{\Delta_i} + \sum_{i=1}^n a_{3i} l_i' &= 0; \\ \sum_{i=1}^n a_{1i} a_{4i} v_{S_i} + \sum_{i=1}^n a_{2i} a_{4i} v_{\beta_i} + \delta X \sum_{i=1}^n a_{3i} a_{4i} + \delta Y \sum_{i=1}^n a_{4i}^2 + \delta R \sum_{i=1}^n a_{4i} - \sum_{i=1}^n a_{4i} v_{\Delta_i} + \sum_{i=1}^n a_{4i} l_i' &= 0; \\ \sum_{i=1}^n a_{1i} v_{S_i} + \sum_{i=1}^n a_{2i} v_{\beta_i} + \delta X \sum_{i=1}^n a_{3i} + \delta Y \sum_{i=1}^n a_{4i} + n \delta R - \sum_{i=1}^n v_{\Delta_i} + \sum_{i=1}^n l_i' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

С учетом поправок в измеренные величины, выраженных через корреляты

(32), и перегруппировки членов уравнений, окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned}
& \lambda_1 (a_{11}^2 a_{31} m_S^2 + a_{21}^2 a_{31} m_\beta^2 + a_{31} m_\Delta^2) + \lambda_2 (a_{12}^2 a_{32} m_S^2 + a_{22}^2 a_{32} m_\beta^2 + a_{32} m_\Delta^2) + \\
& + \lambda_3 (a_{13}^2 a_{33} m_S^2 + a_{23}^2 a_{33} m_\beta^2 + a_{33} m_\Delta^2) + \dots + \lambda_n (a_{1n}^2 a_{3n} m_S^2 + a_{2n}^2 a_{3n} m_\beta^2 + a_{3n} m_\Delta^2) + \\
& + \delta X \sum_{i=1}^n a_{3i}^2 + \delta Y \sum_{i=1}^n a_{4i} a_{3i} + \delta R \sum_{i=1}^n a_{3i} + \sum_{i=1}^n a_{3i} l_i = 0; \\
& \lambda_1 (a_{11}^2 a_{41} m_S^2 + a_{21}^2 a_{41} m_\beta^2 + a_{41} m_\Delta^2) + \lambda_2 (a_{12}^2 a_{42} m_S^2 + a_{22}^2 a_{42} m_\beta^2 + a_{42} m_\Delta^2) + \\
& + \lambda_3 (a_{13}^2 a_{43} m_S^2 + a_{23}^2 a_{43} m_\beta^2 + a_{43} m_\Delta^2) + \dots + \lambda_n (a_{1n}^2 a_{4n} m_S^2 + a_{2n}^2 a_{4n} m_\beta^2 + a_{4n} m_\Delta^2) + \\
& + \delta X \sum_{i=1}^n a_{3i}^2 a_{4i} + \delta Y \sum_{i=1}^n a_{4i}^2 + \delta R \sum_{i=1}^n a_{4i} + \sum_{i=1}^n a_{4i} l_i = 0; \\
& \lambda_1 (a_{11}^2 m_S^2 + a_{21}^2 m_\beta^2 + m_\Delta^2) + \lambda_2 (a_{12}^2 m_S^2 + a_{22}^2 m_\beta^2 + m_\Delta^2) + \\
& + \lambda_3 (a_{13}^2 m_S^2 + a_{23}^2 m_\beta^2 + m_\Delta^2) + \dots + \delta X \sum_{i=1}^n a_{3i} + \delta Y \sum_{i=1}^n a_{4i} + nR + \sum_{i=1}^n l_i = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Система уравнений (36) решается совместно с системой уравнений (33).

Объединенную систему уравнений можно представить в виде:

$$A_{11} \lambda_1 + A_{21} \delta X + A_{31} \delta Y + \delta R + l_1 = 0;$$

$$A_{12} \lambda_1 + A_{22} \delta X + A_{32} \delta Y + \delta R + l_2 = 0;$$

$$A_{13} \lambda_1 + A_{23} \delta X + A_{33} \delta Y + \delta R + l_3 = 0;$$

...

$$A_{1n} \lambda_1 + A_{2n} \delta X + A_{3n} \delta Y + \delta R + l_n = 0;$$

$$B_{11} \lambda_1 + B_{21} \lambda_2 + B_{31} \lambda_3 + \dots + B_{n1} \lambda_n + C_{11} \delta X + C_{12} \delta Y + C_{13} \delta R + L_1 = 0;$$

$$B_{12} \lambda_1 + B_{22} \lambda_2 + B_{32} \lambda_3 + \dots + B_{n2} \lambda_n + C_{21} \delta X + C_{22} \delta Y + C_{23} \delta R + L_2 = 0;$$

$$B_{13} \lambda_1 + B_{23} \lambda_2 + B_{33} \lambda_3 + \dots + B_{n3} \lambda_n + C_{31} \delta X + C_{32} \delta Y + C_{33} \delta R + L_3 = 0;$$

где

$$\begin{aligned}
A_{1i} &= a_{1i}^2 a_{3i} m_S^2 + a_{2i}^2 a_{3i} m_\beta^2 + m_\Delta^2; \quad A_{2i} = a_{3i}; \quad A_{2i} = a_{4i}; \\
B_{i1} &= a_{1i}^2 a_{3i} m_S^2 + a_{2i}^2 a_{3i} m_\beta^2 + a_{3i} m_\Delta^2; \quad B_{i2} = a_{1i}^2 a_{4i} m_S^2 + a_{2i}^2 a_{4i} m_\beta^2 + a_{4i} m_\Delta^2; \quad B_{i3} = a_{1i}^2 m_S^2 + a_{2i}^2 m_\beta^2 + m_\Delta^2; \\
C_{11} &= \sum_{i=1}^n a_{3i}^2; \quad C_{12} = \sum_{i=1}^n a_{4i} a_{3i}; \quad C_{13} = \sum_{i=1}^n a_{3i}; \quad C_{21} = C_{12}; \quad C_{22} = \sum_{i=1}^n a_{4i}^2; \quad C_{23} = \sum_{i=1}^n a_{4i}; \\
C_{31} &= C_{13}; \quad C_{32} = C_{23}; \quad C_{33} = n; \\
L_1 &= \sum_{i=1}^n a_{3i} l'_i; \quad L_2 = \sum_{i=1}^n a_{4i} l'_i; \quad L_3 = \sum_{i=1}^n l'_i.
\end{aligned}$$

По сути, этот метод является коррелятным методом с дополнительными неизвестными. Основное отличие его заключается лишь в том, что на значения дополнительных неизвестных наложено новое условие  $F_2 = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \rightarrow \min$ .

По данной методике был обработан ранее приведенный пример. Оценка точности практически не изменилась, а поправки в измеренные стороны уменьшились, а величина выявленных деформаций увеличилась в среднем на 2 мм. Основное преимущество разработанного метода заключается в том, что для выполнения математической обработки результатов измерений используется стандартный алгоритм коррелятного метода с дополнительными неизвестными.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие городского транспорта в Тегеране ведется активными темпами. К настоящему времени уже активно эксплуатируются линии современного метро, и в ближайшем будущем сеть метрополитена Тегерана будет существенно развита. Учитывая, что геологические условия в зоне строительства тоннелей являются сложными, проблема наблюдений за деформациями обделок тоннелей является важной и актуальной задачей.

Надежное определение положения колец тоннеля возможно лишь при высокоточных методах передачи координат и дирекционных углов в подземные геодезические сети. В связи с этим в диссертации автором разработана эффективная методика ориентирования сторон подземной полигонометрии методом двух шахт. При этом через стволы шахт передаются только координаты. При этом исключается трудоемкая операция передачи дирекционного угла к сторонам подземной полигонометрии. В диссертации выполнен подробный анализ точности как дирекционных углов, так и координат пунктов, который убедительно показал, что усовершенствованная методика ориентирования подземных геодезических сетей обеспечивает точность, необходимую как для

строительства тоннелей, так и для изучения деформаций стен тоннелей.

Современные средства геодезических измерений, а именно, электронные тахеометры, позволяют выполнять высокоточные измерения в безотражательном режиме с точностью вполне удовлетворяющей точностным требованиям к определению деформаций колец тоннеля (2 – 5 мм). В связи с этим автором диссертации была поставлена научная задача: разработать математический аппарат эффективной обработки результатов измерений с возможностью объективной оценки точности результатов измерений. Автором составлена математическая модель, связывающая результаты измерений с деформационными характеристиками стенок тоннелей:

$$(R + \Delta_i)^2 = S_i^2 + X^2 + Y^2 - 2S_i \sqrt{X^2 + Y^2} \cos \varphi_i,$$

где  $X, Y$  – координаты центра тоннеля относительно точки стояния инструмента;

$R$  – вероятнейший радиус тоннеля.

Учитывая, что определяемых неизвестных всего три, а результатов измерений значительно больше, появляется возможность использования метода наименьших квадратов для получения наиболее надежных значений искомых величин.

В диссертации рассмотрены два метода решения поставленной задачи. В первом случае удалось так преобразовать математическую модель формы тоннеля, что уравнивание и оценка точности свелись к коррелятному методу уравнивания. Для того чтобы более строго зафиксировать положение вероятнейшей окружности, уравнивание результатов измерений выполняется под двумя условиями:

$F_1 = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{m_i^2} \rightarrow \min$

– минимум суммы квадратов поправок в измеренные величины с учетом средних

квадратических ошибок измерений и  $F_2 = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \rightarrow \min$  – минимум суммы квадратов

уклонений наблюдаемых точек стенок тоннеля от вероятнейшей окружности. Как показали результаты практических расчетов, повышение точности измеряемых величин не является существенным, но это позволило ввести в обработку точностные характеристики измеренных величин и осуществить оценку точности искомых параметров, используя коррелятный метод с дополнительными неизвестными.

Разработанная методика обработки результатов измерений будет применена при анализе деформаций тоннелей метрополитена в Тегеране.

**Публикации по теме диссертации:**



1. Власенко Е.П., Хамид Фармарз Пур. Особенности ориентирования подземных геодезических сетей методом двух шахт. Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», № 1, 2007.
2. Ключин Е.Б., Шлапак В.В., Власенко Е.П., Хамид Фармарз Пур. О некоторых особенностях обработки результатов измерений при решении современных геодезических задач. Материалы международной научно-технической конференции, посвященной 225-летию МИИГАиК. М., 2004.