

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ
(МИИГАиК)**

На правах рукописи



Валов Георгий Евгеньевич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ УЧЕТА
ВЛИЯНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ
ПО ГРАДИЕНТНЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ
ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ
НИВЕЛИРОВАНИИ**

1.6.22. Геодезия

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:

д-р техн. наук, доцент Вшивкова О.В.

МОСКВА 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1 Проблема учета влияния рефракции при производстве линейно-угловых геодезических измерений	14
1.1 Влияние рефракции на результаты линейно-угловых геодезических измерений	14
1.2 Коэффициент рефракции. Использование коэффициента рефракции для введения поправок за влияние вертикальной рефракции	17
1.3 Классификация методов учета влияния атмосферы на линейно-угловые измерения	20
1.4 Прямые методы учета влияния рефракции	21
1.4.1 Дисперсионные методы учета влияния рефракции	21
1.4.2 Компенсационный способ реализации дисперсионного метода	23
1.4.3 Турбулентные методы учета влияния рефракции	24
1.5 Косвенные методы учета влияния рефракции	29
1.5.1 Метеорологические методы	29
1.5.2 Геодезические методы	32
1.5.3 Статистические методы	43
1.6 Анализ существующих методик одностороннего и двустороннего тригонометрического нивелирования	44
1.7 Выводы по главе 1	51
Глава 2 Разработка методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании	52
2.1 Закономерности формирования полей рефракции в приземном слое атмосферы	52
2.2. Технология эффективного учета влияния приземного слоя атмосферы	60
2.3 Разработка алгоритма определения коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений	66

2.3.1 Расчет требований к точности выполнения угловых измерений.....	68
2.3.2 Обоснование выбора метода решения исходной системы уравнений	70
2.3.3 Алгоритм определения коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений.....	72
2.4 Разработка методических приемов производства градиентных геодезических измерений	76
2.5 Разработка программы полевых геодезических наблюдений при реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели атмосферы	80
2.6 Предварительный анализ методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании.....	81
2.7 Выводы по главе 2	83
Глава 3 Апробация методики учета влияния вертикальной рефракции.....	85
по градиентным геодезическим измерениям.....	85
при одностороннем тригонометрическом нивелировании	85
3.1 Цель и задачи полевых исследований	85
3.2 Первый этап полевых исследований	86
3.2.1 Описание эксперимента на территории Заокского района Тульской области	86
3.2.2 Результаты первого этапа полевых исследований	90
3.2.3 Выводы по результатам первого этапа полевых исследований	97
3.3 Второй этап полевых исследований	97
3.3.1 Описание эксперимента на территории Чеховского района Московской области.....	98
3.3.2 Результаты второго этапа полевых исследований	102
3.3.3 Выводы по результатам второго этапа полевых исследований	114
3.4 Формирование требований к реализации методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании	115

3.5 Выводы по главе 3	116
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	118
Список литературы	120

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. На современном этапе развития геодезического производства основным способом создания высотного обоснования для строительства, высотных сетей сгущения и высотных специальных сетей является геометрическое нивелирование. Геометрическое нивелирование является надежным и точным методом определения высот точек и превышений между ними. Однако способ геометрического нивелирования обладает рядом существенных недостатков: достаточно жесткие ограничения расстояния между определяемыми точками; предельно возможное измеренное превышение на станции ограничено величиной разности высоты рейки и допуска минимальной высоты отсчета по рейке; существенные трудовые и временные затраты на производство в случае значительной разности высот определяемых точек и протяженной дистанции; в ряде случаев невозможность получения необходимой точности из-за большого количества станций, вследствие чего возникает необходимость использования нивелирования более высокого класса, что приводит к увеличению стоимости производства.

Альтернативой способу геометрического нивелирования является способ тригонометрического нивелирования. Последний крайне перспективен, поскольку, в отличие от геометрического нивелирования, предельно возможное измеренное превышение на станции не ограничено длиной рейки, а предельные расстояния между определяемыми точками соответствуют дальности четкой видимости визирной цели, что особенно актуально во всхолмленных районах. При использовании электронного тахеометра со средней квадратической ошибкой измерения угла одним приемом, равной 2", погрешность определения превышения, обусловленная влиянием приборной погрешности, удовлетворяет требованиям геометрического нивелирования IV-го класса (10 мм/км). При измерении угла четырьмя приемами точность определения превышения повысится до 5 мм/км, что соответствует III-му классу. Таким образом, точностные возможности электронных

тахеометров, массово используемых в современном геодезическом производстве, позволяют измерять превышения методом тригонометрического нивелирования с точностью, соответствующей III-IV классам геометрического нивелирования. Практическое применение тригонометрического нивелирования осложнено влиянием атмосферы [1]. Погрешность, вызванная влиянием атмосферы, в частности вертикальной рефракции, может на порядки превосходить приборную погрешность [2].

Для учета влияния вертикальной рефракции в тригонометрическом нивелировании используется поправка за стандартный коэффициент рефракции, равный 0,14. В то же время, различными исследователями было неоднократно показано, что реальные значения коэффициента рефракции в приземном слое атмосферы могут на несколько порядков превосходить величину стандартного коэффициента, а в ряде случаев принимать отрицательные значения [1-3]. Таким образом, поправка за стандартный коэффициент рефракции однозначно не отвечает требованиям к точности геометрического нивелирования III и IV класса, а в случае отрицательных значений реального коэффициента рефракции приведет к потере в точности нивелирования.

В настоящее время тригонометрическое нивелирование применяется при производстве специальных видов геодезических работ, таких как передача отметки через препятствие. В этом случае используются различные вариации двустороннего тригонометрического нивелирования, последние имеют целый ряд недостатков, главные из которых обусловлены высокой стоимостью производства (необходимость использования двух приборов) и требованием к симметричности трассы для получения желаемой точности. В связи с чем, применение двустороннего тригонометрического нивелирования для производства работ по созданию высотных сетей сгущения не рационально.

Целесообразность диссертационного исследования обусловлена запросом геодезического производства на методику нивелирования, обеспечивающую точность геометрического нивелирования III и IV класса при сохранении всех преимуществ одностороннего тригонометрического нивелирования —

производительность, возможность использования в пересеченной местности, высокая степень автоматизации.

Степень разработанности темы исследований. На сегодняшний день существует более ста различных методов учета влияния вертикальной рефракции в тригонометрическом нивелировании [2]. Существенный вклад в изучение влияния вертикальной рефракции внесли такие ученые, как Островский А.Л., Изотов А.А., Пеллинен Л.П., Куштин И.Ф., Юношев Л.С., Вшивков В.Ф., Вшивкова О.В., Прилепин М.Т., Дрок М.К., Можухин О.А., Мороз А.И., Брынь М.Я., Никонов А.В., Яковлев Н.В., Дементьев В.Е., Brunner F.K., Kukkamaki T., Bahnert G., Vokem B., Flach P. и другие. Несмотря на существенное количество предложенных методов, все они обладают теми или иными недостатками, не позволяющими на требуемом в современном геодезическом производстве уровне обеспечить решение проблемы учета влияния вертикальной рефракции при производстве тригонометрического нивелирования. Учет влияния вертикальной рефракции, обеспечивающий повышение точности тригонометрического нивелирования, как правило, связан со значительным увеличением затрат на производство тригонометрического нивелирования, что снижает эффективность существующих методов учета влияния рефракции и объясняет широкое использование в геодезическом производстве стандартного коэффициента рефракции. Дополнительные финансовые, временные и трудовые затраты могут быть связаны с применением специализированного измерительного оборудования, увеличением времени производства полевых работ, необходимостью подготовки специалистов, владеющих используемым методом учета влияния рефракции.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка методики учета влияния вертикальной рефракции при производстве одностороннего тригонометрического нивелирования, обеспечивающей сбалансированность затрат на учет влияния вертикальной рефракции и соответствующего повышения точности.

Основные задачи исследования:

- сформулировать критерии оценки эффективности методик производства тригонометрического нивелирования с учетом влияния вертикальной рефракции по признаку сбалансированности затрат на учет влияния вертикальной рефракции и соответствующего повышения точности;
- обосновать возможность моделирования коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений, которые не требуют специальных навыков от исполнителя и могут быть реализованы стандартным геодезическим оборудованием;
- выявить факторы, влияющие на формирование вертикального профиля коэффициента рефракции вдоль визирной линии и разработать методические приемы, обеспечивающие их учет;
- разработать методику производства одностороннего тригонометрического нивелирования с учетом влияния вертикальной рефракции, основанную на моделировании коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений;
- апробировать разработанную методику производства одностороннего тригонометрического нивелирования с учетом влияния вертикальной рефракции в полевых условиях с целью ее детальной проработки и оценки точностных возможностей.

Научная новизна результатов диссертационного исследования.

- Разработанная методика учета влияния вертикальной рефракции при одностороннем тригонометрическом нивелировании отличается от существующих использованием результатов геодезических измерений, выполненных на нескольких уровнях, в качестве единственного и достаточного источника исходных данных, необходимых для моделирования коэффициента рефракции с учетом пространственных изменений полей рефракции.
- Разработанный алгоритм моделирования коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений, основанный на весовой реализации метода Монте-Карло, обеспечивает учет нелинейного характера изменения коэффициента рефракции с высотой.

- Обоснованный объективный критерий контроля точек перегиба температурной стратификации – тенденция изменения приращения рефракции с высотой – обеспечивает учет влияния слоистости рабочего слоя воздуха на точность моделирования коэффициента рефракции.
- Разработанная процедура производства угловых измерений на нескольких уровнях базируется на использовании предложенной оригинальной конструкции визирной цели, что обеспечивает ослабление влияния временных изменений полей рефракции.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость результатов диссертационного исследования заключается в разработке объективных критериев оценки эффективности существующих и разрабатываемых методик производства тригонометрического нивелирования с учетом влияния вертикальной рефракции; в обосновании возможности и преимуществ моделирования коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений, используемых в качестве надежного источника информации о среднеинтегральных для дистанции значениях параметров атмосферы; в разработке алгоритма, реализующего моделирование коэффициента рефракции с учетом нелинейного характера изменения полей рефракции с высотой.

Практическая значимость результатов диссертационного исследования заключается в том, что предложенная методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании обеспечивает точность геометрического нивелирования III и IV класса при соблюдении баланса между критериями эффективности – временем, затрачиваемым на ее реализацию, стоимостью, ограничениями условий применения и требованиями к квалификации исполнителей. Разработанная методика позволяет использовать метод тригонометрического нивелирования в качестве основного метода при создании высотных сетей сгущения и высотных специальных сетей, оптимизируя производство указанных видов работ.

Востребованность. В современном геодезическом производстве методика одностороннего тригонометрического нивелирования с учетом влияния вертикальной рефракции, обеспечивающая точность геометрического нивелирования III и IV класса, востребована там, где невозможно или нерационально применять метод геометрического нивелирования или более громоздкие методики тригонометрического нивелирования в связи с существенными перепадами высот на объекте, большими расстояниями между определяемыми точками и их значительным количеством. К таким видам геодезических работ относятся: создание высотного обоснования для строительства канатных дорог и строительства любых других объектов в горной местности, передача отметки через препятствие, мониторинг бортов карьеров, геодезические наблюдения с целью изучения динамики оползневых склонов и обвалоопасных участков и многие другие.

Методология и методы исследования. При проведении диссертационного исследования применялся целостный подход к изучению и решению проблемы учета влияния вертикальной рефракции при производстве тригонометрического нивелирования. В процессе исследования применялись следующие методы научного исследования: анализ, синтез, моделирование, анализ данных, сравнение, эксперимент. В частности, был выполнен качественный анализ существующих методов учета влияния вертикальной рефракции и их последующий синтез по разработанным автором критериям оценки. При моделировании коэффициента рефракции применялся математический метод Монте-Карло (weighted importance sampling), обладающий эффективностью решения нелинейных систем алгебраических уравнений. Апробация разработанной методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании выполнялась путем постановки полевых экспериментов с дальнейшим сравнением полученных результатов с результатами геометрического нивелирования более высокого класса. Для выявления и устранения влияния слоистости атмосферной стратификации

использовался анализ данных, полученных по результатам градиентных геодезических измерений.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Сформулированы критерии, позволяющие выполнять объективную оценку эффективности существующих и разрабатываемых методик производства тригонометрического нивелирования с учетом влияния вертикальной рефракции.
2. Обоснована возможность моделирования коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений с точностью, удовлетворяющей требованиям геометрического нивелирования III-IV классов; разработан алгоритм определения коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений, основанный на весовой реализации метода Монте-Карло.
3. Сформирован набор факторов, подлежащих учету при моделировании коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений; обосновано использование тенденции изменения приращений рефракции с высотой в качестве объективного критерия обнаружения слоистости рабочего слоя воздуха.
4. Разработана методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании, включающая алгоритм определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям; методические приемы производства градиентных геодезических измерений; процедуру производства угловых измерений на нескольких уровнях; программу полевых геодезических наблюдений.
5. Выполнена полевая апробация разработанной методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям, позволившая сформулировать требования к практической реализации методики, обеспечивающие определение превышений методом тригонометрического нивелирования с точностью III-го и IV-го классов.

Степень достоверности результатов исследования. Достоверность основных положений, полученных результатов и выводов обусловлена тем, что они не противоречат описанным в научной литературе закономерностям формирования

микроклимата приземного слоя атмосферы. Все качественные рассуждения опираются на результаты исследований признанных ученых, математические расчеты основаны на известных методах математической статистики. В процессе исследования выполнен ряд полевых экспериментов, подтвердивших работоспособность разработанной методики в различных условиях. Соответствие методики заявленным точностным показателям подтверждено сравнением с результатами геометрического нивелирования более высокого класса.

Апробация результатов. Основные результаты диссертационного исследования были представлены научному сообществу на следующих конференциях:

1. Международная научная конференция «Пространственные данные: наука и технологии», 28-29 мая 2024, г. Москва.
2. 80-ая Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых МИИГАиК, 7-11 апреля 2025, г. Москва.
3. Международная научная онлайн конференция «Пространственные данные: наука и технологии», 28-29 мая 2025, г. Москва.

Публикации по теме диссертации. Результаты диссертационного исследования представлены в четырех статьях в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (Перечень ВАК).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Объем диссертации – 132 страницы печатного текста, включающего 5 рисунков и 15 таблиц. Список литературы содержит 127 наименований.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю д.т.н., профессору кафедры высшей геодезии МИИГАиК Вшивковой О.В. за ценные наставления на всех этапах диссертационного исследования. Автор признателен: к.т.н., доц. кафедры фотограмметрии МИИГАиК Скрипицыной Т.Н. за предоставление цифровой модели рельефа территории экспериментального полигона, находящегося на территории Заокского района Тульской области; д.т.н.,

заведующему кафедрой геодезии МИИГАиК Ознамцу В.В. за предоставление геодезического оборудования для проведения исследования; начальнику Чеховского геополигона МИИГАиК Ляшковскому А.А., к.т.н., доценту кафедры геодезии МИИГАиК Клыпину И.А., старшему преподавателю кафедры прикладной геодезии МИИГАиК Охотникову А.В., преподавателю кафедры геодезии МИИГАиК Захаровой А.А., а также студенту МИИГАиК Хлебопашеву И.П. за помощь в проведении полевых измерений.

ГЛАВА 1 Проблема учета влияния рефракции при производстве линейно-угловых геодезических измерений

1.1 Влияние рефракции на результаты линейно-угловых геодезических измерений

В настоящее время основным инструментом для производства геодезических линейно-угловых измерений является электронный тахеометр (ЭТ). С помощью ЭТ осуществляются угловые и линейные измерения в видимой и инфракрасной частях оптического диапазона электромагнитных волн. Измерения с помощью ЭТ производятся в атмосфере, которая является неоднородной средой. Скорость распространения электромагнитного излучения в среде зависит от оптической плотности среды, которую характеризует показатель преломления n , представляющий собой отношение скорости распространения электромагнитного излучения в вакууме c к скорости распространения электромагнитного излучения в данной среде v [1-3]:

$$n = \frac{c}{v}. \quad (1.1)$$

Показатель преломления в атмосфере представляет собой величину четвертого порядка малости (для атмосферы он отличается от единицы на величину, близкую к $(100 - 300) \cdot 10^{-6}$), оперировать такими величинами неудобно, по этой причине на практике показатель преломления заменяют индексом преломления N , представляющим собой отличие показателя преломления от единицы, увеличенное в миллион раз $N = (n - 1) \cdot 10^6$. Индекс преломления измеряется в N -единицах, одна N -единица равна одной миллионной показателя преломления ($1 N\text{-ед.} = 10^{-6}$).

Согласно принципу Ферма, свет распространяется по кратчайшему оптическому пути, т.е. по пути, прохождение которого займет наименьшее время. В

неоднородной среде это явление проявляется в отклонении электромагнитного луча в сторону участков меньшей плотности. Изменение показателя преломления по нормали к траектории приводит к искривлению электромагнитного луча, данное явление называется угловой рефракцией.

Величину изменения показателя преломления n по трассе характеризует градиент показателя преломления $grad\ n$, являющийся его количественной характеристикой. Градиент показателя преломления в каждой точке распространения электромагнитного луча различен, вследствие чего траектория луча многократно искривляется, образуя вместо прямой линии сложную кривую, называемую рефракционной кривой. Вследствие искривления луча наблюдатель видит визирную цель не там, где она находится на самом деле. Угол между истинным и видимым положением визирной цели называется углом рефракции, а его проекции на горизонтальную и вертикальную оси – горизонтальным и вертикальным углом рефракции, соответственно.

Зависимость угла рефракции от состояния среды строго описывает формула Ньютона [4]:

$$r = -\frac{\rho''}{D} \int_0^D grad\ n \cdot x \cdot dx, \quad (1.2)$$

где ρ – число секунд в радиане;

D – длина дистанции;

$grad\ n$ – градиент показателя преломления в текущей точке визирного луча;

x – расстояние от текущей точки визирного луча до визирной цели.

Из формулы (1.2) видно, что для точного определения влияния рефракции необходимо знать значения градиента показателя преломления в каждой точке траектории распространения электромагнитного луча, что на сегодняшний день невозможно.

Говоря о показателе преломления по трассе, как правило, подразумевают среднеинтегральный (результатирующий) показатель преломления, который можно записать в виде следующего выражения:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{D} \int_0^D n(x) \cdot dx, \quad (1.3)$$

где $n(x)$ – значение показателя преломления в текущей точке траектории.

Показатель преломления функционально связан с метеорологическими величинами: температурой T , атмосферным давлением p и парциальным давлением водяного пара (влажностью) e . Как правило, указанные величины в геодезических расчетах, выражают в К и гПа, соответственно. В оптическом диапазоне эту связь описывает формула Сирса-Баррела. Для группового индекса преломления света формула Сирса-Баррела имеет следующий вид [5]:

$$N = (n - 1) \cdot 10^{-6} = 83,11 \frac{p}{T} - 11,4 \frac{e}{T}, \quad (1.4)$$

где T , p , e – температура, давление и влажность в К и гПа.

Коэффициенты в формуле (1.4) меняются в зависимости от длины волны, тем не менее, формула (1.4) удовлетворительно описывает достаточно широкий диапазон волн и может быть использована для приближенных расчетов.

Очевидно, что изменение метеовеличин приведет к изменению индекса преломления. Это изменение, воспользовавшись формулой полного дифференциала, можно записать следующим образом:

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial N}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial N}{\partial e} \Delta e \quad (1.5)$$

Судить о зависимости группового индекса преломления от изменения метеовеличин возможно по значениям частных производных $\partial N / \partial T$, $\partial N / \partial p$, $\partial N / \partial e$. В различных условиях их значения будут меняться. Для нормальных условий ($T = 293,15$ К, $p = 1013,25$ гПа, $e = 13,33$ гПа): $\partial N / \partial T = -1 \cdot 10^{-6} / \text{К}$, $\partial N / \partial p = 0,3 \cdot 10^{-6} / \text{гПа}$, $\partial N / \partial e = -0,04 \cdot 10^{-6} / \text{гПа}$.

Заменой в формуле (1.5) приращения на градиенты в [6] получена следующая формула для градиента показателя преломления при нормальных условиях:

$$\text{grad}(n) \approx -1 \cdot 10^{-6} \text{grad } T + 0,3 \cdot 10^{-6} \text{grad } p - 0,04 \cdot 10^{-6} \text{grad } e. \quad (1.6)$$

Приближенная формула (1.6) позволяет судить о характере и степени влияния градиента каждого метеопараметра на градиент показателя преломления, который является результатом их совокупного влияния.

1.2 Коэффициент рефракции. Использование коэффициента рефракции для введения поправок за влияние вертикальной рефракции

Из формулы (1.2) следует, что угол рефракции зависит от длины дистанции, в связи с чем, использование непосредственно угла рефракции для учета влияния вертикальной рефракции (ВР) неудобно. Для этих целей в геодезической практике используют коэффициент рефракции, не зависящий от длины дистанции. Коэффициент рефракции представляет собой отношение радиуса Земли R_3 к среднему радиусу кривизны рефракционной кривой ρ_{cp} [6]:

$$k = \frac{R_3}{\rho_{cp}} = R_3 \text{grad}_{cp} n, \quad (1.7)$$

где $\text{grad}_{cp} n$ – средний для визирной линии вертикальный градиент показателя преломления.

Связь коэффициента рефракции с углом рефракции выглядит следующим образом [6]:

$$k = -\frac{2r''R_3}{D\rho''}. \quad (1.8)$$

Ввод поправки в измеренное ЭТ превышение производится по следующей формуле:

$$h_r = -k \frac{D^2}{2R_3}. \quad (1.9)$$

Тогда при переходе к средней квадратической погрешности (СКП) справедлива формула:

$$m_k = m_{h_r} \frac{2R_3}{D^2}. \quad (1.10)$$

На основании формулы (1.10) и требований к случайной СКП определения превышения на километр нивелирного хода [7] был осуществлен расчёт требований к точности определения коэффициента рефракции для нивелирования различных классов, результаты представлены в Таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Требования к точности определения коэффициента рефракции в сетях тригонометрического нивелирования

Класс нивелирования	Случайная СКП определения превышения m_{h_r}	СКП определения коэффициента рефракции m_k
III	5 мм/км	0,06
IV	10 мм/км	0,13

Поправку в измеренное горизонтальное проложение вводят по следующей формуле [8]:

$$S' = S - \frac{D^2 \sin(2z)}{2R_3} \left(1 - \frac{k}{2}\right), \quad (1.11)$$

где S – измеренное горизонтальное проложение;

R_3 – средний радиус Земли;

z – измеренное зенитное расстояние;

k – коэффициент рефракции.

Раскрывая в формуле (1.11) скобки и переходя к СКП, получим:

$$m_{S'} = \frac{D^2 \sin(2z)}{4R_3} m_k \Rightarrow m_k = \frac{m_{S'} 4R_3}{D^2 \sin(2z)}. \quad (1.12)$$

В различных руководствах по выполнению геодезических работ рекомендуется использовать так называемый стандартный коэффициент рефракции. До сих пор считают, что достаточно определить средний коэффициент рефракции на территорию работ (обычно очень крупные регионы, достигающие по площади размеров, сопоставимых с территорией стран). Так, для европейской территории России принят $k = +0,14$ [9]. Введение указанного коэффициента оправдано при высотах визирных лучей, равных сотне и более метров. На

указанных высотах градиенты температуры близки к адиабатическим [2]. В приземном слое атмосферы значения, близкие к стандартным, возникают в кратковременные моменты, близкие к моментам изотермии. В средней полосе России в летний период момент изотермии наступает за 3 часа до заката и после восхода солнца [9]. Периоды безразличной температурной стратификации крайне непродолжительны и не устойчивы по времени наступления.

Однозначного мнения о диапазонах изменения в течение дня реального коэффициента ВР k нет, согласно [10, 11], значения k лежат в пределах от +4,28 до -4,40. В [12] для трассы протяженностью в два километра со средней высотой над подстилающей поверхностью (ПП) 1,5 метра k до восхода солнца достигал значения +5,25, днем же принимал отрицательные значения, близкие к -4,72. В работе [13] в результате эксперимента определены значения k в непосредственной близости от земли: от -47 до +20. Согласно работе [14], на высоте 0,5 м в солнечные дни коэффициенты рефракции могут изменяться в пределах от -8 до +16. Автор работы [15] рекомендует принимать пределы изменения k от +6 до -6. Детальный анализ изменения k в приземном слое проведен автором работы [16].

Основываясь на вышесказанном, можно утверждать, что использовать стандартный коэффициент рефракции нельзя, т.к.:

- реальные изменения коэффициента рефракции на несколько порядков больше значения стандартного коэффициента и требований к точности определения k (см. Таблицу 1.1);
- большинство геодезических работ производятся в дневное время, когда коэффициент рефракции часто принимает отрицательные значения, что приводит к ухудшению результата измерений при введении поправки с использованием стандартного коэффициента рефракции.

1.3 Классификация методов учета влияния атмосферы на линейно-угловые измерения

Проблема влияния атмосферы изучается более 300 лет, на сегодняшний день, предложено более ста методов учета влияния рефракции [2], тем не менее, до сих пор нет устоявшейся (общепринятой) классификации методов.

В различных работах методы учета влияния рефракции разделяют на:

- инструментальные (аппаратурные) и расчетные (методические) [17];
- методы учета и ослабления [6];
- прямые и косвенные [1];
- статические и динамические [2].

Этот вопрос разбирается в работе [1], согласно которой деление на инструментальные и расчетные методы некорректно, так как методов, не использующих различные инструменты, просто не существует. Деление на методы учета и ослабления также не всегда корректно, поскольку иногда затруднительно отнести метод к той или иной группе. В качестве примера можно привести метод рефракционного базиса, который, по сути, является методом определения ВР, но использование полученного угла или коэффициента рефракции на других направлениях является методом ослабления. Можно оспорить и объединение геодезических, дисперсионных, метеорологических и ряда других методов в группу статических. Отнесенный к динамическим турбулентный метод действительно позволяет определять значение ВР по измеренным характеристикам динамики рабочего слоя воздуха. Однако отнесенные к статическим методы сводятся к учету рефракционного влияния, сформировавшегося на момент определений всей совокупностью влияющих факторов, в том числе и движениями атмосферного слоя, в котором выполняют угловые измерения. Объединение ряда принципиально отличающихся методов в одну группу исключает возможность дифференцированного анализа эффективности каждого из них.

Авторы [1, 18, 19] считают, что наиболее корректно делить методы на:

- опосредованные (косвенные);
- непосредственные (прямые).

К прямым методам можно отнести следующие подгруппы: дисперсионные, турбулентные.

К косвенным методам относятся следующие подгруппы: метеорологические, геодезические, статистические.

Со времен публикации работ [1, 18, 19] появился ряд новых методов, однако все они укладываются в рассмотренную классификацию. В дальнейшем в работе автор будет придерживаться ее.

1.4 Прямые методы учета влияния рефракции

1.4.1 Дисперсионные методы учета влияния рефракции

Дисперсионный метод основывается на явлении зависимости показателя преломления атмосферы от длины волны излучения. Для излучения с большей длиной волны показатель преломления всегда меньше, чем для волн с меньшей длиной волны. Описание, математическое обоснование, обзор реализаций дисперсионного метода представлен в работах [21-38].

Суть метода можно описать на следующем примере [21], если из источника света испускаются две монохромные волны, красная и синяя с различными длинами волнами волн λ_r и λ_b , соответственно, то углы рефракции этих волн будут различными и могут быть представлены в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} r_b &= \frac{\rho''}{L} (n_b - 1) \int_0^L \left(\frac{dP}{dh} \frac{1}{P} - \frac{dT}{dh} \frac{1}{T} \right) x dx, \\ r_r &= \frac{\rho''}{L} (n_r - 1) \int_0^L \left(\frac{dP}{dh} \frac{1}{P} - \frac{dT}{dh} \frac{1}{T} \right) x dx, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где r_b и r_r – углы рефракции для синей и красной волн, соответственно;

n_b и n_r – средние показатели преломления для синей и красной волн, соответственно;

L – длина траектории распространения излучения;

dT/dh и dP/dh – вертикальные градиенты температуры и давления, соответственно;

x – расстояние от текущей точки визирного луча до визирной цели.

Измерив дисперсию рефракции, представляющую собой разность углов рефракции: $\Delta r = r_b - r_r$, становится возможным определить угол рефракции интересующей длины волны λ для сухого воздуха $r_\lambda^{сух}$:

$$r_\lambda^{сух} = \frac{n_\lambda - 1}{n_b - n_r} \Delta r, \quad (1.14)$$

где n_λ – показатель преломления для средней длины волны λ ;

и для влажного воздуха $r_\lambda^{влаж}$ [36]:

$$r_\lambda^{влаж} = (n_0(\lambda_b) - 1) \frac{\Delta r}{n_0(\lambda_b) - n_0(\lambda_r)} - 0,14 \left(\frac{e}{P} \right) \bar{\alpha}_m, \quad (1.15)$$

где $n_0(\lambda_b)$ и $n_0(\lambda_r)$ – значения показателей преломления волн λ_b и λ_r для стандартной атмосферы;

$\bar{\alpha}_m$ – среднее значение угла рефракции для точек источника и приемника света.

Как правило, для реализации дисперсионного метода берутся волны из разных концов светового диапазона, для которых $n_b - n_r > 6 \cdot 10^{-6}$. В таком случае погрешность определения угла рефракции m_r примерно в 50 раз больше погрешности измерения дисперсионной разности $m_{\Delta r}$ [21]. Для того чтобы определить угол рефракции с точностью 0,1", дисперсионную разность необходимо определять с точностью 0,002", что в условиях реальных атмосферных флуктуаций задача на сегодняшний день практически невыполнимая [25].

Технически для реализации дисперсионного метода используются лазеры, генерирующие излучение с различными длинами волн. Дисперсионную разность определяют дифракционным или интерференционным способом [23, 37]. В случае

дифракционного способа объектом измерения являются расстояния между энергетическими центрами дифракционных изображений источников излучения [30], а в случае интерференционного способа – размер интерференционных полос [26, 33]. Угловую дисперсию определяют визуальным, фотографическим или фотоэлектрическим способом. В основном используют фотоэлектрический способ, реализуемый с помощью ПЗС-матриц. Наиболее точные из существующих рефрактометров используют в качестве углового чувствительного элемента оптические кристаллы, обладающие свойствами двойного лучепреломления. Такие рефрактометры позволяют измерять дисперсию рефракции с точностью 0,02–0,03", например, рефрактометр, разработанный ЦНИИГАиК [38].

Дисперсионный метод не вышел из стадии лабораторных исследований, это связано, в первую очередь, с турбулентностью атмосферы, из-за указанного явления интерференционная картина разрушается уже на расстоянии в несколько десятков метров [25].

1.4.2 Компенсационный способ реализации дисперсионного метода

Компенсационный способ предложен Вшивковым В.Ф. в работе [39]. В основе метода лежит специальное устройство, в состав которого входит компенсирующая призма – жидкостный или стеклянный клин, обладающий возможностью изменения преломляющего угла. При использовании компенсационного способа угол рефракции определяется по преломляющему углу компенсирующей призмы. Указанный прибор закрепляется в поле зрения трубы тахеометра (теодолита). Угол рефракции вычисляют по углу δ_e частичной компенсации рефракции, который равен:

$$\delta_e = \frac{q\nu}{\nu_1}, \quad (1.16)$$

где q – разность зенитных расстояний, измеренных с устройством, приведенным в рабочее положение, и при установке его преломляющей грани нормально к световому потоку;

ν – коэффициент дисперсии воздушного слоя;

ν_l – коэффициент дисперсии жидкостного клина.

При использовании компенсационного способа на порядок снижаются требования к точности измерения дисперсионной разности. В первых аппаратных реализациях компенсационного способа с визуальной регистрацией момента компенсации точность определения δ_e из одного приема составила $10''$. В последних оптико-электронных реализациях этого способа с целью повышения точности и учета влияния флуктуаций атмосферы в конструкцию рефрактометра введены элементы, формирующие два измерительных канала. В одном из них – канале адаптации – фотокатоды облучаются полными изображениями источников излучения и производится компенсация таких негативно влияющих на точность факторов, как разное затухание сигналов с разной длиной волны, разный размер изображений с разной длиной волны и др. [40, 41]. В другом – измерительном – канале фотокатоды облучаются частичными изображениями источников излучения, разнесенными в пространстве вследствие угловой рефракции, момент компенсации дисперсионной разности при изменении преломляющего угла компенсирующей призмы определяется по отсутствию разностного фототока. К сожалению, рассмотренный метод так и не нашел применение в геодезическом производстве.

1.4.3 Турбулентные методы учета влияния рефракции

Атмосфера всегда находится в движении, первопричиной которого является неоднородность нагрева участков подстилающей поверхности и атмосферы. Гладкое упорядоченное движение атмосферы называется ламинарным. Ламинарное движение достаточно предсказуемо [2]. При определенных условиях,

подробно описанных в [42], перемешивание теплых и холодных масс становится неустойчивым, малые возмущения в ламинарном потоке начинают расти, становясь нелинейными. Указанные возмущения продолжают расти, пока весь поток не становится неустойчивым. Такой поток называется турбулентным. В турбулентном потоке, в отличие от ламинарного, изменения метеовеличин происходят хаотично, причем как во времени, так и в пространстве. Турбулентность потока приводит к флуктуациям электромагнитных волн, а именно – их амплитуды, фазы, направления и частоты.

В основу большинства методов учета влияния рефракции положено условие неизменности состояния атмосферы на период измерения. Однако, предположение об устойчивом состоянии атмосферы неверно из-за постоянных турбулентных пульсаций атмосферы, в работах [43, 44] показан временной ход коэффициента и угла рефракции, откуда видно, что при расстоянии до визирной цели около километра, последний может колебаться на величины порядка $10''$ в секунду. Для того чтобы геодезические измерения были свободны от турбулентности и флуктуаций, необходимо определять угол рефракции непосредственно в момент измерений [45].

Для решения указанной проблемы в середине прошлого столетия были предложены методы, основанные на определении статистических характеристик световой волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере. Такие методы получили название «турбулентные» [46, 47]. По сути, турбулентные методы определения рефракции основаны на связи угла рефракции со случайными искажениями в световой волне.

Интенсивность случайных процессов определяют величиной ψ_φ^2 , которая представляет собой среднее из всех значений квадрата процесса. Часто ψ_φ^2 представляют как сумму двух составляющих – турбулентной и статистической. Интенсивность турбулентных пульсаций характеризует структурная характеристика поля показателя преломления C_n^2 , являющаяся параметром, характеризующим оптические свойства атмосферы [2] в «законе 2/3» Колмогорова-

Обухова. C_n^2 пропорциональна дисперсии показателя преломления и функционально связана с углом рефракции формулой вида:

$$r_{\epsilon} = 8,13L \left(0,000244 \frac{P}{T^2} \pm \frac{B(\lambda) \bar{C}_n}{h^{2/3} a(Ri)} \right), \quad (1.17)$$

где $\bar{C}_n$ – усредненное по трассе значение структурной характеристики;

h – эквивалентная высота;

$a(Ri)$ – универсальная функция, выбираемая в зависимости от стратификации атмосферы;

$B(\lambda)$ – коэффициент, выбираемый в зависимости от длины волны.

Все турбулентные методы можно охарактеризовать следующей последовательностью [2]:

$$\psi \rightarrow C_n \rightarrow C_T \rightarrow \frac{dT}{dh} \rightarrow \frac{dn}{dh} \rightarrow r'' \quad (1.18)$$

$\uparrow$
 T, P

Существует множество различных способов определения C_n^2 , так в [2] только для оптического диапазона представлено пять способов определения C_n^2 , а именно: по визуальной оценке амплитуды колебания визирной цели, по визуальной оценке размытости миры, по оценке размытости фотографии миры, по измерению флуктуаций угла прихода светового пучка, по измерению флуктуаций амплитуды волны.

Среди турбулентных методов можно выделить визуальные [48-54] и автоматизированные турбулентные методы [43, 44, 55, 56]. Визуальные методы можно разделить на методы определения угла рефракции, основанные на колебаниях визирной цели [1, 48] и на степени размытости визирной миры [49-53].

Согласно [1], угол рефракции из наблюдений максимальной амплитуды колебаний визирной цели $\sigma_{\max}$ можно найти по следующей формуле:

$$r = r_h + r_{ah} = 8,13L \cdot 0,000244 \frac{P}{T^2} + 0,05\sigma_{\max} L^{1/2} h_9^{-1/2}, \quad (1.19)$$

где r_n и r_{an} – нормальная и аномальная составляющие угла рефракции, соответственно;

P и T – давление в мбар и температура в кельвинах, соответственно;

L – длина визирного луча;

$h_э$ – эквивалентная высота визирного луча.

Плюсом этого метода является отсутствие дополнительной аппаратуры и простота исполнения. Точность представленного метода достигает 2".

В работе [54] разработан метод одновременного двустороннего тригонометрического нивелирования на основе вычисления среднеинтегральных зенитных расстояний:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{A-B} &= Z_{A-B} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}, \\ \bar{Z}_{B-A} &= Z_{B-A} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}.\end{aligned}\tag{1.20}$$

где Z_{A-B} и Z_{B-A} – измеренные зенитные расстояния в точках А и В соответственно;

γ – центральный угол, соответствующий дуге L на поверхности земли;

δ – полный угол рефракции.

Взаимообратные превышения h для нивелирной линии вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}h_{A-B} &= L \cdot \operatorname{ctg} \bar{Z}_{A-B} + i_A - v_B, \\ h_{B-A} &= L \cdot \operatorname{ctg} \bar{Z}_{B-A} + i_B - v_A,\end{aligned}\tag{1.21}$$

$$h_{cp} = \frac{h_{A-B} + h_{B-A}}{2}.\tag{1.22}$$

Угол полной рефракции δ вычисляется на основании соотношений, полученных в работе [57]. Вначале определяются частные углы рефракции δ_{ϵ_1} , δ_{ϵ_2} по формуле (1.23):

$$\begin{aligned}\delta_{\epsilon_1} &= \frac{2\delta\sigma_1^2 + \delta_n(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \\ \delta_{\epsilon_2} &= \frac{2\delta\sigma_2^2 + \delta_n(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2},\end{aligned}\tag{1.23}$$

где σ_1, σ_2 – амплитуды колебания изображений визирных целей в прямом и обратном направлениях, соответственно;

δ_n – угол нормальной рефракции.

После чего вычисляется угол полной рефракции по формуле (1.24):

$$\delta = \frac{\delta_{\theta_1} + \delta_{\theta_2}}{2}. \quad (1.24)$$

Указанный метод удовлетворяет точности геометрического нивелирования IV класса на расстоянии порядка 5 км, указанный метод применим только при одновременном двустороннем нивелировании.

В работе [51] был предложен метод определения рефракции на основании визуальной оценки размытия мир. В работе [52] предложена следующая формула определения угла рефракции:

$$r = 1,05 \frac{\bar{C}_n}{\sqrt[3]{h^2}} \frac{L}{[a(Ri)]^2}, \quad (1.25)$$

где h – высота визирного луча над ПП;

L – длина визирного луча;

$a(Ri)$ – универсальная функция, выбор которой зависит от температурной стратификации атмосферы.

Усредненное значение структурной характеристики при использовании набора мир можно найти по формуле [53]:

$$\bar{C}_n = \frac{0,81}{\sqrt{L} \sqrt[6]{k} \sqrt[6]{\left(\frac{2\pi L}{M}\right)^5}}, \quad (1.26)$$

где M – максимальный период мир, для которого наблюдается размытое изображение.

k – волновое число, $k = 2\pi / \lambda$, где λ – длина волны.

Точность методов определения угла рефракции по изображениям мир колеблется от 1" до 3" в зависимости от высоты и длины дистанций [58].

На современном этапе реализацию турбулентных методов можно автоматизировать посредством использования роботизированных электронных

тахеометров, при этом исключается ошибка производства отсчета, свойственная наблюдателю. СКП указанного способа составляет примерно 2" [43, 44, 55, 56].

Турбулентный метод один из самых быстроразвивающихся и точных методов определения влияния рефракции, однако, возможность его применения упирается в наличие турбулентности потока и неустойчивости стратификации атмосферы.

1.5 Косвенные методы учета влияния рефракции

1.5.1 Метеорологические методы

Метеорологический метод был впервые предложен академиком Струве В.Я. в 1837-1843 годах, им была получена эмпирическая формула связи коэффициента рефракции с метеовеличинами и высотой над ПП. В те времена еще не было известно, что коэффициент рефракции куда в большей степени зависит от градиентов метеовеличин, чем от значений самих метеовеличин. Кроме того, коэффициент рефракции, получаемый из формулы Струве, может иметь только положительные значения, что в корне не верно. Учет вертикальных градиентов метеовеличин был предложен двадцать лет спустя Цингером Н.Я. [2].

В. Иорданом [13] была получена формула для определения точечного коэффициента рефракции:

$$k = 502,4 \frac{P}{T^2} \left(0,0342 + \frac{dT}{dh} \right). \quad (1.27)$$

Указанная формула пригодна для расчетов только в случае однородного рефракционного поля, в противном случае она может привести к значительным искажениям результата [1, 2].

Авторами [17] был разработан способ определения влияния рефракции, где помимо температурных градиентов учитывалось влияние ветра, указанный способ дает точность порядка 20" на линии в 15 километров, что более, чем в два раза,

превосходит по точности метод Иордана, но, однозначно, не может использоваться для современных геодезических измерений [1].

В 1951-1955 гг. Изотовым А.А. и Пелинином Л.П. [59] был предложен метод эквивалентного градиента температуры $(dT/dh)_{\text{экв}}$, для определения которого необходимо знать аномальный градиент температуры c на высоте в один метр. Расчет производится по формуле:

$$\left(\frac{dT}{dh} \right)_{\text{экв}} = \frac{c}{h_{\text{экв}}}, \quad (1.28)$$

где $h_{\text{экв}}$ — эквивалентная высота.

Слабым местом указанного метода является определение аномального градиента температуры на высоте в один метр, поскольку любые метеоизмерения являются точечными, измерения же градиента температуры вдоль всей трассы крайне затратны как по времени, так и по цене. Рассматриваемый метод дает точность определения угла вертикальной рефракции порядка $5''$ на дистанции в 0,5-3 км [1].

Достаточно широкое распространение получила группа методов, основанных на использовании принципа подобия, описанного в теории Мони́на-Обухова. Один из наиболее известных методов, относящихся к этой группе представлен в работах Мозжухина О.М. и Гордеевцева А.В. [60-65]. Указанный метод в ряде случаев называют методом среднего градиента температуры [1]. Предполагается, что имеется модель и объект, на которых вертикальный температурный градиент γ_z на высоте z можно описать подобными дифференциальными уравнениями вида [62]:

$$\gamma_z' = \frac{T_*'}{z'} \text{ и } \gamma_z'' = \frac{T_*''}{z''}, \quad (1.29)$$

где T_* — температурный масштаб.

Один штрих соответствует модели, два штриха — объекту.

После ряда простых преобразований можно записать:

$$\gamma_z'' = \gamma_z' \frac{T_*'}{T_*''} \frac{z'}{z''}. \quad (1.30)$$

Заменяя в уравнении (1.30) переменные γ_z , T_* , z на среднеинтегральный температурный градиент, определяемый на модели методом геодезического базиса $\overline{\gamma_z}$, температурный градиент на высоте один метр γ_1 , снятую с карты среднюю или эквивалентную высоту z , соответственно, получим:

$$\overline{\gamma_z} = \overline{\gamma_1} \left(\frac{\gamma_1''}{\gamma_1'} \right)^n \left(\frac{z'}{z''} \right)^m, \quad (1.31)$$

где n , m – коэффициенты, отображающие уровень влияния параметров γ_1 и z на величину $\overline{\gamma_z}$.

Значение коэффициентов n , m эмпирически получены в работе [61] и соответствуют значениям 1 и 0,2, соответственно. Тогда можно записать:

$$\overline{\gamma_z} = a \frac{\gamma_1^{0,2}}{z}, \quad (1.32)$$

где $a = \frac{\overline{\gamma_z} \cdot z^m}{\gamma_1^n}$ – коэффициент, составленный по измерениям на модели.

На практике под моделью понимается участок, схожий с участком измерений.

В [60] предложено аномальный градиент температуры на высоте один метр γ_1 не измерять, а определять посредством измерения разности температуры воздуха ΔT_2 на высоте в два метра и на высоте шероховатости. Аномальный градиент температуры на высоте один метр вычислялся по следующей формуле:

$$\gamma_1 = \frac{\Delta T_2}{2,3 \log \frac{200}{z_{uu}'}} \quad (1.33)$$

где z_{uu}' – высота шероховатости.

Далее вычислялся средний интегральный вертикальный температурный градиент, по формуле:

$$\overline{\gamma_z} = \frac{\gamma_1}{z_{cp}}, \quad (1.34)$$

где z_{cp} – средняя высота.

После чего возможно получить среднеинтегральный температурный градиент $\bar{\gamma}_z$ на измеряемом участке по формуле 1.32.

Определение поправки за влияние ВР по измерениям среднеинтегрального градиента температуры на модели и последующего переноса его посредством метода подобия на территорию интересующего объекта [64-65] обеспечивает точность IV класса геометрического нивелирования в случае одинаковой температурной стратификации в моменты измерения на модели на объекте.

СКП коэффициентов рефракции, полученных по указанному алгоритму, колеблются от 0,02 до 0,25 в зависимости от времени суток.

1.5.2 Геодезические методы

К геодезическим методам относится метод одновременного измерения зенитных расстояний в прямом и обратном направлениях (метод одновременного двустороннего нивелирования). Формула определения коэффициента рефракции для указанного метода выглядит следующим образом [66]:

$$\bar{k} = 1 - \frac{R_3((z_{A-B} + z_{B-A}) - 180^\circ)}{S\rho''} + \frac{R_3(u_A - u_B)}{S\rho''} + \frac{R_3((v_A + v_B) - (i_A + i_B))}{S^2}, \quad (1.35)$$

где $\bar{k}$ – среднеинтегральный коэффициент рефракции;

S – горизонтальное проложение;

R_3 – средний для визирной линии радиус Земли;

u_A и u_B – отклонения отвесной линии в плоскости визирной линии в точках A и B , соответственно;

v_A и v_B – высота приборов над ПП в точках A и B , соответственно;

i_A и i_B – высота визирных целей над ПП в точках A и B , соответственно;

z_{A-B} и z_{B-A} – измеренные зенитные расстояния в точках A и B , соответственно.

Указанная формула работает корректно только при условиях одновременности измерения зенитных расстояний, симметричности профиля

трассы, однородного поступления солнечной радиации по профилю трассы. В противном случае получаемые результаты могут быть заметно искажены [67].

В работе [68] предлагается метод одновременного двустороннего тригонометрического нивелирования, основанный на разделении среднеинтегрального коэффициента рефракции на компоненты:

$$\bar{k} = \frac{k_{A-B} + k_{B-A}}{2}. \quad (1.36)$$

Значения k_{A-B} и k_{B-A} находятся из следующих соотношений:

$$k_{B-A} = \frac{2\bar{k} \cdot h_{\vartheta_{A-B}} + k_n \cdot (h_{\vartheta_{B-A}} - h_{\vartheta_{A-B}})}{h_{\vartheta_{A-B}} + h_{\vartheta_{B-A}}}, \quad (1.37)$$

$$k_{A-B} = 2\bar{k} - k_{B-A}.$$

где k_n – нормальный коэффициент рефракции;

$h_{\vartheta_{A-B}}$ и $h_{\vartheta_{B-A}}$ – эквивалентные высоты в прямом и обратном направлениях, соответственно.

Поправка за рефракцию вычисляется по формуле:

$$\Delta\delta = \frac{(K_{B-A} - K_{A-B})S^2}{4R}. \quad (1.38)$$

Тогда превышение с учтенным влиянием рефракции:

$$h_{исп} = h_{изм} + \Delta\delta, \quad (1.39)$$

где $h_{изм}$ и $h_{исп}$ – измеренное и исправленное за влияние рефракции превышение, соответственно.

Несколько лет спустя, в [69] было доказано, что предложенная методика способна повысить точность тригонометрического нивелирования в 1,3-1,4 раза.

В работах [70, 71] для повышения точности метода рекомендуется вместе с зенитными расстояниями измерять и метеовеличины, что, по утверждению авторов, повышает точность, но усложняет процесс измерений.

В работе [72] получена формула для одностороннего тригонометрического нивелирования наклонным лучом с вертикальным базисом.

$$H_P = \frac{b \sin(z_\varepsilon + z_\eta)}{2 \sin(z_\varepsilon - z_\eta)} - \frac{b}{2} - l + i + H_{Rp}, \quad (1.40)$$

где H_P – отметка искомого пункта Р;

b – длина вертикального базиса;

z_ε и z_η – измеренные зенитные расстояния на верхний и нижний концы базиса соответственно;

l – расстояние от точки Р до нижнего конца базиса;

i – высота прибора;

H_{Rp} – отметка исходного репера.

Ввод поправки за уклонение отвесной линии предлагается осуществлять на основании формул:

$$\begin{aligned} \delta h &= \frac{(\pm \delta S) \cos z_\varepsilon \cos z_\eta}{\sin(z_\eta - z_\varepsilon)}, \\ \delta h &= \pm b(1 - \cos \zeta). \end{aligned} \quad (1.41)$$

где δS – линейное смещение вертикального конца базиса;

ζ – уклонение базиса.

Тогда полная запись формулы одностороннего тригонометрического нивелирования наклонным лучом с вертикальным базисом:

$$H_P = \frac{b \sin(z_\varepsilon + z_\eta)}{2 \sin(z_\varepsilon - z_\eta)} - \frac{b}{2} - l + i + H_{Rp} + \frac{(\pm \delta S) \cos z_\varepsilon \cos z_\eta}{\sin(z_\eta - z_\varepsilon)}. \quad (1.42)$$

Введя обозначения: $\sigma = z_\varepsilon + z_\eta$, $\tau = z_\eta - z_\varepsilon$, $a = b/2$, получим:

$$H_P = a \frac{\sin(\sigma)}{\sin(\tau)} - a - l + i + H_{Rp} + \frac{(\pm \delta S) \cos z_\varepsilon \cos z_\eta}{\sin(\tau)}. \quad (1.43)$$

Продифференцировав формулу (1.43) и заменив полные дифференциалы на СКП, в [71] получены зависимости точности определения превышения от каждого параметра:

$$m_{h_a}^2 = \left(\frac{\sin \sigma}{\sin \tau} \right)^2 m_a^2 + m_a^2, \quad (1.44)$$

$$m_{h_{\tau}}^2 = \left(\frac{a \sin \sigma \sin \tau}{\sin^2 \tau} \right) \frac{m_{\tau}^2}{\rho^2}, \quad (1.45)$$

$$m_{h_{\sigma}}^2 = \left(\frac{a \cos \sigma}{\sin \tau} \right) \frac{m_{\sigma}^2}{\rho^2}, \quad (1.46)$$

$$m_{h_{\delta S}}^2 = \left(\frac{\cos Z_{\delta} \cos Z_H}{\sin \tau} \right)^2 m_{\delta S}^2, \quad (1.47)$$

$$m_{h_{z_{\delta}}}^2 = \left(\frac{\delta S \cos Z_{\delta} \cos Z_H}{\sin \tau} \right)^2 m_{z_{\delta}}^2, \quad (1.48)$$

$$m_{h_{z_H}}^2 = \left(\frac{\delta S \cos Z_H \cos Z_{\delta}}{\sin \tau} \right)^2 m_{z_H}^2. \quad (1.49)$$

Применение вертикального базиса также нашло применение при производстве геодезического сопровождения строительных работ. Так, в работе [73] разработана методика использования вертикального базиса на строительной площадке для определения и периодического контроля значения коэффициента рефракции. Суть методики сводится к созданию вертикального базиса в виде нескольких отражательных пленок, закрепленных на стене здания, при этом стоит отметить детальность предложенной методики создания вертикального базиса, заключающейся в многократном измерении каждого элемента построения различными методами (так в работе [73] высота электронного тахеометра определяется передачей отметки с нивелира тремя измерениями с СКП в 0,1 мм, расстояния до визирных целей измерялась электронным тахеометром с насадкой вертикального проектирования в 9 приемов с СКП 0,5 мм, а расстояния между визирными целям измерялись компарированной рулеткой в 4 приема с точностью 0,6 мм) с последующим уравниванием измерений коррелятным способом по методу наименьших квадратов. Предложенная методика позволяет осуществлять построение вертикального базиса с точностью в 0,5-0,7 мм.

Для определения требований к частоте периодического контроля значения коэффициента рефракции в работах [73, 74] были произведены измерения суточного хода коэффициента рефракции на строительной площадке. В результате

были выработаны методические приемы, заключающиеся в требовании измерения коэффициента рефракции каждые полчаса, при этом расхождения в полученных значениях коэффициента рефракции из текущего и предыдущего измерений не должны превышать 0,2, при большем расхождении необходимо вводить дополнительную поправку. Рассмотренная методика корректна для измеряемых точек в пределах 200 метров от электронного тахеометра.

Относительно широкое распространение получил метод, предложенный Извековым М.И. [75]. В основе метода лежит допущение о том, что в момент измерений коэффициент рефракции на пункте измерений одинаков во всех направлениях. Изначально метод разрабатывался для сетей триангуляции, в которых измерены взаимные зенитные расстояния для всех сторон. Из метода Извекова следует, что для каждой стороны разности высот пунктов вычисляются по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 &= h_{1,2} + L_{1,2} f_1, \\ H_2 - H_1 &= h_{2,1} + L_{1,2} f_2, \end{aligned} \quad (1.50)$$

где $f_i = \frac{(1 - k_i^2)}{2R_3}$ – поправка за кривизну Земли и вертикальную рефракцию.

Для каждой стороны можно составить уравнение вида:

$$f_1 - f_2 = \frac{(h_{1,2} - h_{2,1})}{L_{1,2}}. \quad (1.51)$$

Составив три уравнения вида (1.33) по числу сторон в треугольнике, можно найти f_1 , f_2 , f_3 для каждой стороны треугольника.

В [2] показаны слабые места метода Извекова М.И.:

- предположение о равенности коэффициента рефракции во всех направлениях в момент измерений некорректно, так как метеовеличины изменяются крайне быстро и неоднородно, что приводит к различиям коэффициентов рефракции в различных направлениях;

- метод не согласуется с общепризнанным методом Юношева Л.С. [4], согласно которому необходимо дифференцированно подходить к каждому

отдельному направлению, при этом в каждом направлении необходимо выделять «квазистационарные блоки», характеризующиеся одинаковыми условиями (высота прохождения визирного луча над ПП, альbedo поверхности и т.д.) формирования показателя преломления.

В работе [76, 77] предложено усовершенствование метода Извекова М.И., заключающееся в «дифференцированном» подходе к решению задачи. Суть метода заключается в раздельном вычислении составляющих угла рефракции.

Общая формула исправленного зенитного расстояния имеет следующий вид:

$$z_0 = z - \gamma + r_n + r_{an} - \Delta h - \Delta u, \quad (1.52)$$

где z и z_0 – измеренное и исправленное зенитное расстояние, соответственно;

r_n и r_{an} – нормальная и аномальная часть угла рефракции, соответственно;

γ – поправка за кривизну Земли;

Δh и Δu – поправки за разность нормальных высот и уклонение отвесных линий, соответственно.

В случае наличия метеоизмерений угол нормальной рефракции вычисляют следующим образом:

$$r_n = 264,12 \frac{P}{T^2} L, \quad (1.53)$$

где L – горизонтальное проложение линии сети, км;

P – давление в мм. рт. ст.;

T – температура в градусах Кельвина, К.

При их отсутствии предлагается использовать формулу, соответствующую нормальному коэффициенту рефракции:

$$r_n = 2,266'' L. \quad (1.54)$$

Далее для каждой стороны сети вычисляют аномальный угол полной рефракции:

$$\sigma^a = 180^\circ - z_{np} - z_{обp} - r_{np}^H - r_{обp}^H + 2\gamma, \quad (1.55)$$

где поправка за кривизну Земли $\gamma = \frac{L\rho''}{2R_z \sin^2 z}$.

Задачу решают, разделяя угол полной рефракции на составляющие:

$$\sigma^a = r_{np}^a + r_{обр}^a. \quad (1.56)$$

При условии одновременности измерения зенитных расстояний находят аномальный угол полной рефракции на каждом пункте:

$$\overline{r^a} = \frac{2\sum\sigma_{см}^a - \sum\sigma_{окр}^a}{2(2m - n)}, \quad (1.57)$$

где $\sum\sigma_{см}^a$ – сумма аномальных углов полной рефракции смежных сторон;

$\sum\sigma_{окр}^a$ – сумма аномальных углов полной рефракции сторон, окружающих определяемый пункт;

m – количество смежных сторон;

n – количество окружающих сторон.

Остаточные погрешности для каждого направления вычисляются по следующей формуле:

$$\delta = \sigma^a - \overline{r_{np}^a} - \overline{r_{обр}^a}, \quad (1.58)$$

пропорционально распределив которые, получают окончательное значение:

$$r_{np}^a = \frac{1}{\left(\sigma^a + \overline{r_{np}^a} - \overline{r_{обр}^a}\right)^2}. \quad (1.59)$$

Автор работ [76, 77] утверждает, что указанная методика способна повысить точность на 30 процентов.

В работе [1] представлен метод учета ВР по каждому направлению из математической обработки сети. Согласно представленным в [1] результатам эксперимента, метод позволяет получить точность определения коэффициента рефракции порядка 0,011, что является крайне высокой точностью, однако для реализации указанного способа необходимо осуществлять измерения температуры и давления на каждом пункте сети, и каким-то образом определять эквивалентные высоты по каждому направлению, что является крайне трудоемкой задачей.

В работах [1, 2] описан метод геодезической службы рефракции. Метод применяется при создании пространственных линейно-угловых сетей. Внутри сети выбирается участок, характеризующий всю сеть. На участке работ должен быть

главный пункт и 5-6 идущих от него направлений. Все пункты должны иметь отметки, полученные из геометрического нивелирования. Одновременно с измерениями в сети, другая бригада осуществляет измерения (тригонометрическое нивелирование) на пунктах характерного участка, кроме того, измеряются температура и давление на главном пункте.

Для каждого направления характерного участка вычисляют эквивалентные вертикальные температурные градиенты по следующей формуле:

$$\gamma_s = 0,0924 \frac{T^2}{P} \frac{r_s}{S} - 0,0342, \quad (1.60)$$

где $r_s = Z_T - Z_{изм}$, – угол рефракции, полученный как разность теоретического и измеренного зенитного расстояния.

Далее для каждого направления сети вычисляют эквивалентные вертикальные температурные градиенты по эмпирической формуле вида:

$$\gamma_{s_i} = \gamma_{s_0} + a(h_{s_i} - h_{s_0}) + b(h_{s_i} - h_{s_0})^2, \quad (1.61)$$

где h_{s_0} и h_{s_i} – эквивалентные высоты на характерном участке и в сети, соответственно;

a , b , γ_{s_0} – коэффициенты и эквивалентный вертикальный температурный градиент характерного участка, полученные по способу наименьших квадратов.

Далее, используя полученные γ_{s_i} , определяют коэффициенты рефракции для каждого направления сети.

Указанный метод не получил распространения вследствие дороговизны (дополнительная бригада) и сложности реализации.

Достаточно широкое распространение получил метод геодезического базиса, предложенный Никольским Е.К. в работе [78]. Суть метода заключается в определении коэффициентов рефракции на определяемых направлениях посредством измерений на базисе (два взаимовидимых пункта с известными высотами), расположенном недалеко (в пределах видимости) от определяемых пунктов.

Для получения корректных результатов необходимо производить измерения зенитных расстояний по всем направлениям, включая базис, для отнесения к одному физическому моменту.

Для передачи коэффициента рефракции с базиса на другие направления применяются различные формулы, в работе [1] доказывається, что наилучшую точность дает формула, предложенная Джуманом Б.М.:

$$k_i = k_n + (k_\delta - k_n) \frac{h_{\delta}}{h_{\delta_i}}, \quad (1.62)$$

где k_n – нормальный коэффициент рефракции, равный 0,16;

k_δ – коэффициент рефракции, полученный из измерений на базисе;

h_δ , h_{δ_i} – эквивалентные высоты базиса и определяемого направления, соответственно.

Также стоит отметить, что для методов рефракционного базиса возможна замена эквивалентной высоты на максимальные амплитуды колебаний визирных целей, тогда формула (1.63) примет следующий вид:

$$k_i = k_n + (k_\delta - k_n) \frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_i^2}, \quad (1.63)$$

где σ_δ и σ_i – максимальные амплитуды колебаний визирных целей на базисе и на определяемом направлении, соответственно.

Одним из самых точных геодезических методов является метод измерений во время нейтральной атмосферной стратификации (изотермии). Также этот метод часто называют методом спокойных изображений, что в случае наличия ветра более 0,5 м/с [79] полностью отражает суть явления. Метод, при соблюдении ряда условий, позволяет практически полностью избавиться от погрешности, вызванной влиянием рефракции.

Однако у метода существует два существенных недостатка, ограничивающих его применение задачами, требующими прецизионной точности:

- кратковременность моментов изотермии (около получаса утром и вечером);
- нестабильность времени наступления изотермии (до нескольких часов).

Согласно результатам эксперимента по определению значений коэффициентов рефракции в периоды спокойных изображений для разных высот над ПП, при скорости ветра менее 0,5 м/с точность определения коэффициента рефракции может сильно меняться [1].

Чаще всего для определения моментов изотермии используют двустороннее одновременное тригонометрическое нивелирование по симметричной программе наблюдений [10], т.е. количество приемов, выполненное до и после установления нейтральной стратификации атмосферы, должно быть примерно равно. При корректной реализации симметричной программы наблюдений метод позволяет получить точность фиксации момента изотермии порядка 1'' [1].

Кроме того, время наступления момента изотермии зависит от конкретной местности, так, в условиях пустынь средней Азии нейтральная температурная стратификация наступает утром спустя 0,5-1 часа после восхода и вечером за 0,5 часа до заката Солнца, в то время как в горной местности это время сдвинуто почти на 3 часа в сторону полудня утром, а вечернее время наступления не меняется [2].

Для вечерних наблюдений время наступления выгоднейших условий наблюдений $\tau_{нач}$ можно весьма приблизительно рассчитать по следующей формуле [9]:

$$\tau_{нач} = \tau_{зах} - 2\tau', \quad (1.64)$$

где $\tau_{зах}$ – время захода Солнца, определенное по астрономическому ежегоднику;

τ' – время перехода радиационного баланса через нуль на широте измерений на высоте 2 метров над ПП, определенное по специальным диаграммам многолетних наблюдений.

Важным аспектом является запаздывание наступления моментов изотермии над обширными водными поверхностями относительно суши, обусловленное особенностями формирований температурных полей над водой [80].

Различными авторами предлагались те или иные способы прогнозирования угла рефракции на основании тех или иных моделей. В работе [81] для этих целей предложена простая сферическая модель. Определение поправки за рефракцию предполагается осуществлять методом итераций.

В некоторых работах предлагаются способы моделирования коэффициентов рефракции, основанные на различных алгоритмах. В работе [82] для моделирования используются температурные измерения и применяются формулы Kukkamaki [83, 84] и коэффициента рефракции, учитывающие неоднородности ПП и значения эквивалентных высот.

В настоящее время при производстве различных видов геодезических работ [85-88] все чаще применяется методика тригонометрического нивелирования из середины. Методика основывается на принципе ослабления влияния ВР и ряда других погрешностей путем реализации метода нивелирования из середины. Задачами разработки методики из середины являются установление предельных длин визирных лучей, их неравенства на станции и накопления по секции; минимальной высоты визирного луча над ПП; требуемой точности приборов; количества приемов измерений; предельных расхождений между приемами и методики измерений на станции.

Наиболее тщательное исследование метода тригонометрического нивелирования из середины проведено Никоновым А.А. (методика тригонометрического нивелирования короткими лучами) [87-92]. В указанных работах приведены требования к тригонометрическому нивелированию из середины, отвечающему точности геометрического нивелирования III и IV классов, соответственно.

Основными плюсами методики Никонова А.А. являются простота реализации и достаточно высокая точность, также к плюсам стоит отнести проработанность методики в вопросах ослабления влияния полей рефракции, вызванных неоднородностью ПП; применимость методики для любых визирных целей (рейка, отражательная пленка, отражатель, вертикальный базис); корректировка требований в зависимости от времени года и условий видимости.

Минусами являются невозможность использования ее при углах наклона визирных лучей более 12° ; требование к минимальной высоте визирного луча над поверхностью в 1 метр; требование к однородности ПП для заднего и переднего

луча; невозможность передачи отметки через препятствия протяжённостью более 300 метров.

1.5.3 Статистические методы

К статистическим методам относятся методы прогнозирования значений углов (коэффициентов) рефракции в зависимости от ряда внешних факторов (абсолютной высоты визирной линии, сезона года, погоды, типа ПП, времени суток и т.д.). Точность указанной группы методов неприемлема для геодезических работ, по этой причине она утратила свое самостоятельное значение [1]. Однако получаемые посредством статистических методов закономерности позволяют осуществить рациональное планирование процесса производства геодезических работ и оптимальное проектирование геодезических сетей, а в некоторых случаях осуществить примерные расчеты влияния рефракции на геодезические измерения в предполагаемых условиях.

Так, в зависимости от абсолютной высоты меняется значение усредненного коэффициента рефракции [93], что приближенно можно выразить следующей формулой:

$$k = 0,147 - 0,008H, \quad (1.65)$$

где H – абсолютная высота, км.

Рассмотренный метод особенно актуален для горной местности.

Важное значение для реализации геодезических работ имеет время наивыгоднейших условий, которое характеризуется наибольшей стабильностью коэффициента рефракции во времени и наименьшей изменчивостью от направления к направлению. Для равнинной и всхолмленной местности указанное время наступает с 9 до 17 часов местного времени [59]. В горных же районах вследствие запаздывания разрушения инверсии, время наступления сдвинуто на несколько часов вправо по временной оси [1].

Немаловажное значение в формировании полей рефракции имеет сезон года. Наивыгоднейшими периодами года являются весна и лето, когда коэффициент рефракции наиболее стабилен, в то время как осенью k , напротив, наиболее изменчив. Зимой же значение k сильно отличается от нормального и, как правило, больше 0,26, что обусловлено инверсионным строением атмосферы в это время года [94].

1.6 Анализ существующих методик одностороннего и двустороннего тригонометрического нивелирования

Для того чтобы оценить эффективность методик тригонометрического нивелирования, обеспечивающих учет влияния ВР, и выполнить их сравнительный анализ, необходимо сформулировать критерии оценивания. Можно выделить пять основных критериев эффективности любой методики производства геодезических работ, в том числе – методики тригонометрического нивелирования с учетом влияния ВР [95]:

- соответствие требуемой точности;
- время, затрачиваемое на производство полевых измерений и обработку полученных результатов (оперативность);
- стоимость реализации, зависящая от объема выполняемых работ, требований к используемому оборудованию, количеству и квалификации исполнителей;
- ограничение условий применения (где и когда методика обеспечивает получение заявленных результатов);
- квалификация исполнителей (необходимость в дополнительном обучении, знание особенностей реализации программы наблюдений и обработки полученных результатов, знание ограничений методики).

Основным критерием, бесспорно, является обеспечиваемая точность. Значимость остальных критериев варьируется в зависимости от выполняемого вида

геодезических работ. В современных реалиях необходимо, чтобы используемая методика по точности, как минимум, отвечала требованиям геометрического нивелирования III-IV классов [95, 96]. Перечислим методы, удовлетворяющие данному требованию: турбулентные методы (визуальные и автоматизированные), метод среднего градиента температуры, метод одновременного двустороннего нивелирования, усовершенствованный метод одновременного двустороннего нивелирования на основе разделения среднеинтегрального коэффициента рефракции на компоненты, метод одновременного двустороннего тригонометрического нивелирования с одновременным измерением метеовеличин, метод математической обработки сети, метод геодезической службы рефракции, метод спокойных изображений; методика тригонометрического нивелирования короткими лучами.

В приведенном выше списке все турбулентные методы отнесены к группе методов, обеспечивающих точность геометрического нивелирования IV и III классов, строго говоря, это не совсем правильно – существует ряд ранних способов относящихся к группе турбулентных методов, не удовлетворяющих поставленному условию [2]. Однако выделять каждый турбулентный способ нерационально в связи с их значительным числом [2], в данном случае под турбулентными методами нужно понимать способы определения ВР, основанные на измерении амплитуды колебания визирной цели и оценке размытия изображения миры, а также автоматизированный способ, основанный на использовании роботизированных электронных тахеометров, предложенный Дементьевым Д.В. [43, 44, 55, 56].

Результаты анализа методов, обеспечивающих получение точности геометрического нивелирования IV и III классов, по остальным четырем заявленным критериям, представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Оценка эффективности методов, реализующих тригонометрическое нивелирование с учетом влияния ВР с точностью IV-III классов.

Критерии Методы	Оперативность	Стоимость реализации	Ограничения условий применения	Требуемая квалификация исполнителей
Визуальные турбулентные методы	+	+	±	±
Автоматизированные турбулентные методы	±	–	±	+
Метод среднего градиента температуры Мозжухина О.М.	–	+	–	±
Метод одновременного двустороннего нивелирования	–	–	±	+
Усовершенствованный метод одновременного двустороннего нивелирования на основе разделения среднеинтегрального коэффициента рефракции на компоненты	–	–	–	+
Метод одновременного двустороннего тригонометрического нивелирования с одновременным измерением метеовеличин	–	–	±	+
Метод математической обработки сети	–	–	+	±
Метод геодезической службы рефракции	–	–	+	±
Методом измерений на момент спокойных изображений	–	–	–	+
Методика тригонометрического нивелирования короткими лучами	+	±	±	+

Деля вывод о снижении оперативности, повышении стоимости, ограничении условий применения, повышении квалификационных требований к исполнителям, автор сравнивал анализируемые методы с классической методикой

тригонометрического нивелирования, при реализации которой в электронной тахеометрии поправка за рефракцию вводится автоматически с использованием стандартного коэффициента рефракции, близкого к $+(0,13-0,14)$. Затраты на учет рефракции при таком подходе сведены к нулю, длина визирной линии ограничена только требованиями к точности и техническими характеристиками используемого электронного тахеометра. Точность учета влияния вертикальной рефракции при использовании стандартного коэффициента рефракции крайне низкая, т.к. реальное значение коэффициента рефракции может иметь отрицательный знак и отличаться от стандартного на 1-2 порядка.

Поясним каждую выставленную в таблице 1.2 оценку [95].

Оперативность визуальных турбулентных методов [49-51] не вызывает сомнения, они позволяют в течение нескольких минут определить угол/коэффициент рефракции прямо на измерительной станции. Время, затрачиваемое на реализацию автоматизированных турбулентных методов [44], составляет 30-40 минут, что несколько снижает их оперативность. При реализации визуальных методов стоимость тригонометрического нивелирования практически не меняется: в случае применения методов, основанных на оценке амплитуды колебания визирной цели, не требуется ни дополнительных приборов, ни дополнительных исполнителей; в случае применения методов, основанных на оценке размытия изображения миры, дополнительные затраты включают в себя только стоимость миры, которая крайне мала в сравнении со стоимостью геодезического оборудования. Иначе обстоит дело с автоматизированными турбулентными методами – роботизированный электронный тахеометр, по-прежнему, недоступен для большинства геодезических подразделений в массовом геодезическом производстве. Основным ограничением условий применения турбулентных методов является обязательное наличие турбулентного потока, в случае ламинарности потока указанные методы использовать нельзя. При использовании визуальных методов оценка размытия изображения миры и амплитуды колебаний изображений визирной цели производится наблюдателем «на глаз», что приводит к субъективности получения угла/коэффициента рефракции.

Снижение оперативности метода среднего градиента температуры [60-65] связано с необходимостью подбора модели (дистанции, схожей по условиям наблюдений с рабочим направлением) и производства геодезических измерений на модели и метеорологических измерений на высоте два метра и на высоте шероховатости. Стоимость реализации указанного метода включает стоимость метеорологических датчиков, которая незначительна в сравнении со стоимостью геодезического оборудования. Точность рассматриваемого метода зависит от времени суток и в ряде случаев не удовлетворяет требованиям геометрического нивелирования IV и III класса. Исполнитель должен уметь корректно подобрать модель и определить высоту шероховатости.

Метод одновременного двустороннего тригонометрического нивелирования [66] требует установки сразу двух приборов и визирных целей, а также синхронности наблюдений, что приводит к снижению оперативности. Необходимость двух комплектов оборудования и двух бригад исполнителей приводит к повышению стоимости. Для полного исключения влияния рефракции необходимо соблюдать целый ряд условий, а именно – одновременность измерения зенитных расстояний, симметричность профиля трассы и т.д. Рассматриваемый метод нашел применение только в специальных задачах, требующих высокой точности, таких как передача отметки через препятствие при выполнении инженерных работ. Для реализации данного метода от исполнителей не требуется каких-либо специфических навыков, кроме соблюдения синхронности наблюдений.

Усовершенствованный метод одновременного двустороннего нивелирования на основе разделения среднеинтегрального коэффициента рефракции на компоненты [68, 69] отличается от классического двустороннего классического метода одновременного двустороннего нивелирования тем, что он менее подвержен влиянию несоблюдения условий симметричности. Основным плюсом рассматриваемого метода, по сравнению с классическим вариантом, является более высокая точность (в 1,3 - 1,4 раза), минус же заключается в необходимости построения профиля трассы для определения по нему эквивалентных высот в

прямом и обратном направлениях, соответственно, что было возможно полвека назад при съемке рядов триангуляции (наличие топографических карт с сечением рельефа 5 и менее метров). На сегодняшний день тригонометрическое нивелирование используется для создания геодезических сетей сгущения и специальных сетей, а также специальных инженерных задач, в которых расстояния тригонометрического нивелирования редко превышают один-два километра. Указанное ограничение делает рассматриваемый метод практически не применимым в современных условиях.

Метод одновременного двустороннего тригонометрического нивелирования с одновременным измерением метеовеличин [70, 71] способен незначительно повысить точность классического одновременного двустороннего тригонометрического нивелирования, но при этом повышается стоимость (не только за счет необходимости приобретения метеорологических датчиков, но и за счет оплаты труда дополнительных членов бригады), а также усложняется процесс наблюдений вследствие необходимости синхронизации не только геодезических, но и метеорологических измерений.

Метод математической обработки сети [1] крайне затратен по времени, для его реализации на каждом пункте сети, по каждому направлению, необходимо выполнить метеорологические измерения, что помимо замедления скорости увеличивает стоимость. Кроме того, необходимо по каждому направлению вычислить эквивалентную высоту, что существенно увеличивает время реализации и стоимость камеральных работ. Для определения эквивалентной высоты необходимо наличие профилей рельефа по каждому направлению, в связи с чем, указанный метод не нашел применения в геодезическом производстве.

Высокая стоимость реализации метода геодезической службы рефракции [1, 2] обусловлена необходимостью наличия двух комплектов оборудования и второй бригады исполнителей, а также предварительного выполнения нивелировки пунктов базисного участка. Рассматриваемый метод достаточно сложен в плане организации полевых наблюдений и рекогносцировочных работ, поскольку требует

от исполнителя грамотного выделения участка, включающего все виды трасс, характерные для района проведения геодезических работ.

Метод спокойных изображений [79] в большинстве случаев реализуется методом одновременного двустороннего нивелирования по программе наблюдений, симметричной относительно моментов вертикальной изотермии воздуха [10]. Непродолжительность периодов изотермии, которые наблюдаются утром и вечером, приводит к существенному снижению оперативности. Стоимость сравнима со стоимостью реализации метода одновременного двустороннего нивелирования. Точность зависит от того, насколько корректно определено время наступления момента изотермии, которое в зависимости от погоды, сезона, региона и т.п. изменяется в широких пределах. От исполнителей требуется обеспечить одновременность наблюдений.

Ограничение длины визирного луча при реализации методики тригонометрического нивелирования короткими лучами из середины [89-92] позволяет повысить точность высотных определений, но приводит к увеличению числа станций и некоторому снижению оперативности. Время, затрачиваемое на реализацию программы наблюдений на измерительной станции, сравнимо с классическим тригонометрическим нивелированием. Такой же вывод можно сделать о стоимости реализации данной методики: необходимо учесть лишь средства, затрачиваемые на приобретение второй веши и биподов. Рассматриваемый метод предполагает, что углы наклона местности не превышают 12° , что ограничивает применение методики только равнинной и всхолмленной местностью. Методика неприменима для передачи отметки через препятствия шириной более 300 метров. В целом, методика проста для реализации и понятна любому геодезисту.

Из проведенного анализа несложно видеть, что на сегодняшний день ни одна из методик не удовлетворяет всем перечисленным выше критериям.

1.7 Выводы по главе 1

1. Рассмотрены общие сведения о влиянии вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования. Выполнен расчет требований к точности определения вертикальной рефракции при производстве тригонометрического нивелирования с точностью III и IV класса. Показано, что использование стандартного коэффициента рефракции не удовлетворяет полученным требованиям.

2. Представлены сведения о классификации методов учета влияния вертикальной рефракции в тригонометрическом нивелировании. Рассмотрены основные виды методов учета влияния вертикальной рефракции и наиболее значимые исследования в каждом из них.

3. Разработаны критерии эффективности методик тригонометрического нивелирования с учетом влияния вертикальной рефракции, позволяющие выполнять их объективную оценку, а именно: соответствие требуемой точности; время, затрачиваемое на производство полевых измерений и обработку полученных результатов; стоимость реализации, зависящая от объема выполняемых работ, требований к используемому оборудованию, количеству и квалификации исполнителей; ограничение условий применения; квалификация исполнителей.

4. Осуществлена оценка эффективности методов, реализующих тригонометрическое нивелирование с учетом влияния вертикальной рефракции с точностью III-IV классов по предложенным критериям эффективности. Было установлено, что на сегодняшний день ни одна из методик не удовлетворяет всем заявленным критериям. Сделан вывод о необходимости разработки методики учета влияния вертикальной рефракции при производстве одностороннего тригонометрического нивелирования, обеспечивающей сбалансированность затрат на учет влияния вертикальной рефракции и соответствующего повышения точности.

Глава 2 Разработка методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании

2.1 Закономерности формирования полей рефракции в приземном слое атмосферы

В основе проблемы учета влияния ВР лежит постоянная изменчивость и неоднородность атмосферы. Известно, что основным фактором формирования микроклимата в пограничном слое атмосферы является подстилающая поверхность [97]. Наибольшая амплитуда изменения метеопараметров присуща самому нижнему участку пограничного слоя атмосферы, непосредственно прилегающему к подстилающей поверхности. Указанный участок получил название приземного слоя. Особенности последнего являются мелкомасштабные турбулентность и конвекция, первая обусловлена шероховатостью подстилающей поверхности, вторая – неравномерностью нагрева подстилающей поверхности [98]. Днем мощность приземного слоя составляет несколько десятков метров, ночью несколько метров [98], именно в этом слое производят подавляющее большинство линейно-угловых геодезических измерений.

Как было сказано ранее, основным фактором формирования градиентов метеовеличин в приземном слое является подстилающая поверхность. Под подстилающей поверхностью необходимо понимать тонкий слой земной поверхности, где происходят процессы энергомассообмена, к указанным процессам можно отнести энергетические процессы преобразования лучистой энергии в тепловую, и преобразование масс гидрологическими и биологическими путями [98].

Микроклимат какого-либо участка можно описать в виде соотношений переменных балансовых уравнений (радиационного, теплового и водного) [98]:

$$B = Q(1 - A_k) - E^*, \quad (2.1)$$

$$B = LE + P + R, \quad (2.2)$$

$$E = r - f. \quad (2.3)$$

где B – радиационный (в уравнении 2.1) и тепловой (в уравнении 2.2) баланс;

Q – суммарная радиация;

A_K – альбедо поверхности;

E^* – эффективное излучение;

LE – затрата тепла на испарение;

P – турбулентный теплообмен поверхности с атмосферой;

R – теплообмен в почве;

E – водный баланс;

r – атмосферные осадки;

f – суммарный сток.

В приземном слое возможно выделить ряд характерных температурных стратификаций [97]:

- температура понижается с высотой во всем слое при наличии сверхadiaбатического градиента температуры (как правило, в дневные время в теплое время года в солнечную погоду);

- температура с высотой понижается, но с меньшими градиентами (как правило, в теплое время года в пасмурную погоду);

- изотермическое распределение температуры (как правило, в переходное время суток или в затяжную дождливую погоду);

- инверсия температуры во всем слое (как правило, ночью или при отрицательном радиационном балансе поверхности, обусловленном, например, наличием снежного покрова);

- переходные типы, такие как приподнятая инверсия и т.д.

В отличие от верхних слоев атмосферы, приземный слой характеризуется особенностью, обусловленной сильной корреляцией между метеорологическим режимом и свойствами турбулентного перемешивания. Турбулентный теплообмен является основным средством переноса тепла в приземном слое, указанный

механизм выражается в турбулентном теплообмене между подстилающей поверхностью и атмосферой приземного слоя. Помимо турбулентного теплообмена, перенос тепла осуществляют механизмы поглощения и излучения лучистой энергии, молекулярный теплообмен, а также фазовые превращения воды, однако указанные механизмы, как минимум, на порядок слабее турбулентного теплообмена и, как правило, игнорируются. В приземном слое турбулентный поток тепла практически не меняется с высотой, т.к. уменьшение вертикального градиента температуры с высотой нивелируется возрастающим коэффициентом турбулентности. Указанное свойство приземного слоя получило название квазистационарности [98].

При приближении к земной поверхности скорость ветра затухает, высота z_0 , на которой скорость ветра равна нулю, называется высотой шероховатости. В слое шероховатости поступательное движение ветра гасится за счет молекулярного трения. Высота шероховатости в большей степени зависит от величины неровностей подстилающей поверхности, и, в тоже время, не является постоянной величиной. Формирование микроклиматической картины во многом зависит от скорости ветра, влияющей на активность турбулентного перемешивания. Скорость ветра в случае установления условий, близких к равновесным, подчиняется логарифмическому закону [97], т.е. для скорости ветра U на высоте z можно записать следующее соотношение

$$U = \frac{U_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}; \quad (2.4)$$

где κ – постоянная Кармана, равная 0,40;

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau^*}{\rho}} \text{ – динамическая скорость;}$$

τ^* – касательное напряжение трения;

ρ – плотность воздуха.

Температура воздуха в приземном слое, аналогично скорости ветра, подчиняется логарифмическому закону, однако, находится в сильной зависимости

от стратификации атмосферы. Влияние стратификации на тепловой поток определяется с использованием профиля ветра, наибольшее распространение получил способ определения «числа Ричардсона (Ri)», являющегося аналогом показателя турбулентности и вычисляемое по следующей формуле:

$$Ri = \frac{g}{T_a} \cdot \frac{\partial T / \partial z}{\left(\partial U / \partial z \right)^2} \approx \frac{g}{T_a} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta U^2}; \quad (2.5)$$

где g – ускорение свободного падения;

T_a – средняя температура приземного слоя.

Температурной стратификации, подчиняющейся логарифмическому закону, соответствуют малые значения показания числа Ричардсона ($-0,008 \leq Ri \leq 0,02$). Чем больше число Ричардсона, тем больше температурная стратификация отличается от логарифмического закона. Подобные условия наблюдаются в слое, как правило, не превосходящем 2 метров от земной поверхности. Однако именно в этом слое осуществляется большая часть линейно-угловых геодезических измерений. Граница указанного слоя является переломом профиля температуры, выше которой температурная стратификация аппроксимируется функцией, близкой к логарифмической. Однако, в ряде случаев, как правило, обусловленных наличием растительного покрова, точек перелома может быть несколько. Это связано с тем, что формирование профиля температуры обусловлено профилем фитомассы. На основании вышесказанного можно сформулировать первый фактор, подлежащий учету при производстве тригонометрического нивелирования с учетом влияния ВР – **необходимость обязательного контроля точек перелома температурной стратификации, особенно на линиях с растительным покровом.**

Согласно Гейгеру Р., микроклимат приземного слоя можно рассматривать в виде трех упрощенных составляющих: микроклимат приземного слоя в случае ровной, однородной по почвенному составу, лишенной растительности подстилающей поверхности; микроклимат приземного слоя, обусловленный орографическими неровностями подстилающей поверхности; микроклимат приземного слоя, обусловленный влиянием растительного покрова [99, 100].

Влияние рельефа на микроклимат приземного слоя можно охарактеризовать следующим образом – в ночное время суток охладившиеся тяжелые воздушные массы скапливаются в естественных углублениях, образуя очаги холода, тогда как в выпуклых формах рельефа холодный воздух стекает вниз, что способствует установлению сравнительно более высокой температуры воздуха. Простая зависимость влияния рельефа на микроклимат приземного слоя была дана Воейковым А.И. [100] – амплитуда температурных значений увеличивается на вогнутых поверхностях и уменьшается на выпуклых. На поверхности склонов различия температуры могут достигать нескольких градусов. Согласно Гейгеру Р. [99], весной средние расхождения на одном склоне составили 3-4 °С, а предельные доходили до 7 °С.

Важнейшим фактором формирования микроклимата является растительный покров подстилающей поверхности, даже незначительная поросль существенно меняет физические свойства подстилающей поверхности в разрезе поглощения солнечной радиации, нагревания, охлаждения, а также испарения [100]. Согласно Ричардсону, наличие растительного покрова увеличивает альбедо поверхности за счет длинноволнового излучения (способность растений к отражению длинноволнового излучения). Днем растительный покров принимает солнечную радиацию по всей своей поверхности, создавая максимумы температуры чуть ниже высоты покрова, в зависимости от проникающей способности. При достижении высоты в один метр, растительный покров приобретает ряд особых микроклиматологических черт: замедление турбулентного движения, ослабление ветра, большая влажность, умеренные температуры с максимумами на поверхности растительного покрова или чуть ниже, в зависимости от проникающей способности солнечной радиации. В ночное время сначала охлаждается поверхность растительного покрова, а затем охлажденный воздух опускается ниже, создавая минимум температуры на определенной высоте. Часто внутри растительного покрова наличествуют несколько точек перелома атмосферной стратификации, это обусловлено тем, что в непосредственной близости от поверхности находится зона турбулентных колебаний, обусловленная влиянием рельефа (чем больше

орографические неровности, тем больше указанная зона), при этом при поднятии вступает в силу замедление турбулентного движения растительным покровом [100]. На основании вышесказанного можно сделать вывод, что **при наличии растительного покрова необходимо производить измерения не выше высоты шероховатости, а выше высоты растительного покрова, являющейся точкой перелома атмосферной стратификации.**

Анализируя формулу (2.5) можно видеть, что градиент скорости ветра стоит во второй степени в знаменателе, т.е. чем больше градиент скорости ветра, тем ближе температурная стратификация к логарифмическому закону, и наоборот. В штиль ветер, и, как следствие, его градиент практически отсутствуют, в таком случае отклонение температурной стратификации от логарифмического закона наибольшее, что приводит к трудностям моделирования рефракции на визирной линии. Также известно, что чем больше скорость ветра, тем больше обмен воздушных масс, что влечет за собой уменьшение вертикального градиента температуры [100], что, в свою очередь, ведет к уменьшению коэффициента рефракции. На основании чего можно сказать, что **наличие ветра уменьшает значения рефракции.**

Подстилающая поверхность в общем случае неоднородна, по мере прохождения визирного луча над подстилающей поверхностью может меняться: угол наклона подстилающей поверхности; тип почвы; наличие, состав и густота растительного покрова; увлажненность поверхности (связана с естественным стоком осадков) и т.д. Совокупность указанных факторов допустимо обозначить как тип подстилающей поверхности [6].

Естественные неровности подстилающей поверхности приводят к различному поступлению солнечной радиации, так, как правило, юго-западные склоны нагреваются сильнее остальных. Наиболее заметно указанное явление проявляется в ясную погоду в пределах 2 метров над подстилающей поверхностью, на большей высоте температурные различия быстро сглаживаются, а в случае пасмурной погоды практически отсутствуют.

Помимо поступления солнечной радиации неровности рельефа оказывают влияние на увлажнённость почвы путем стока воды от возвышенностей к низинам. Почва представляет из себя совокупность почвенных частичек и межпоровых промежутков, заполненных воздухом или водой. Теплопроводность увлажненной почвы значительно выше, чем у сухой, указанное явление обусловлено следующим фактором – теплопроводность замещаемого воздуха (при увлажнении) в межпоровых промежутках примерно в 20 раз ниже, чем у воды. Т.е. при заполнении межпоровых промежутков водой возрастает их теплопроводность, а, как следствие, и всего почвенного покрова.

Важнейшим фактором является тип почвенного покрова, поскольку разные почвы обладают различной отражательной способностью (альбедо), которая характеризует в процентах отношение отраженного излучения к поглощённому. Помимо альбедо тип почвенного покрова определяет влагосодержание и, как следствие, коэффициент температуропроводности, который характеризует скорость передачи тепла по вертикали. Так, влагоемкость суглинистых почв в 1,5 раз больше, чем у песчаных. При увеличении влажности возрастает температуропроводность и удельная теплоемкость (способность накапливать тепло) почвы, например, увеличение влажности подзолистой почвы на 10-30 % приводит к увеличению коэффициента температуропроводности в 1,5-2 раза, а удельной теплоемкости в 4 раза.

Наличие растительного покрова создает переломы в атмосферной стратификации приземного слоя и, в общем случае, приподнимает высоту шероховатости. Наличие же мощной корневой системы изменяет плотность почвы, порой весьма существенно.

При переходе от одного типа подстилающей поверхности к другому меняется интенсивность теплообмена, и, как следствие, изменяется высота шероховатости, вертикальный градиент показателя преломления, может видоизменяться стратификация атмосферы (имеется в виду слой в непосредственной близости от земли толщиной около 2 метров), что неминуемо приводит к колебаниям коэффициента рефракции вдоль визирной линии. Ослабляющим фактором выступает тот факт, что ключевую роль в формировании угла рефракции играет

участок, расположенный ближе к наблюдателю. Тем не менее, влияние изменения типа подстилающей поверхности вдоль визирной линии способно оказать существенное влияние на результирующий угол/коэффициент рефракции [4]. На основании вышесказанного сформулируем второй фактор, подлежащий учету при производстве тригонометрического нивелирования – **необходимость учета изменения типа подстилающей поверхности вдоль линии визирования.**

В приземном слое распределение метеовеличин с высотой можно описать показательными функциями [99, 101]. Так, согласно Гейгеру Р. [99], изменение значений метеовеличин S_z и их градиентов $\partial S/\partial z$ высотой z с определенной степенью точности можно записать в виде следующих показательных уравнений:

$$\begin{aligned} S_z &= S_0 + a \cdot z^b; \\ \frac{\partial S}{\partial z} &= a \cdot z^{b-1}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

где S_0 – значение метеовеличины на исходной высоте, например, 1 метр;

a – градиент метеовеличины на исходной высоте;

b – коэффициент обмена.

На сегодняшний день экстраполяция значений метеовеличин и их градиентов с высотой является одной из самых сложных проблем при учете влияния ВР на результаты линейно-угловых геодезических измерений, поскольку помимо необходимости определения стратификации атмосферы необходимо учитывать изменение высоты визирного луча по ходу трассы. На основании вышесказанного можно сформировать третий фактор, подлежащий учету при производстве тригонометрического нивелирования – **необходимость учета изменения высоты визитного луча по трассе.**

Подводя итог выполненному анализу, можно сделать следующий вывод: оптимальный метод учета влияния вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования должен обеспечивать учет следующих факторов [95]:

– контроль точек перелома температурной стратификации, особенно на линиях, поросших растительным покровом;

- изменения типа подстилающей поверхности вдоль линии визирования;
- изменения высоты визитного луча над подстилающей поверхностью по трассе.

Также можно сделать выводы о том, что:

- наличие ветра уменьшает значения рефракции;
- при наличии растительного покрова необходимо производить измерения не выше высоты шероховатости, а выше высоты растительного покрова, являющейся точкой перелома атмосферной стратификации.

2.2. Технология эффективного учета влияния приземного слоя атмосферы

По мнению автора, получить оптимальное соотношение удовлетворительности сформулированным в пункте 1.6 критериям оценки эффективности методов производства тригонометрического нивелирования с учетом влияния ВР можно при использовании технологии эффективного учета влияния приземного слоя атмосферы [102-109]. Базовыми положениями технологии эффективного учета влияния приземного слоя атмосферы являются «геодезическая» модель атмосферы и принцип определения параметров модели по градиентным геодезическим и/или метеорологическим измерениям. Первая позволяет моделировать изменения показателя преломления и его градиента в пределах местных полей рефракции, выраженных в пограничном слое атмосферы, второй обеспечивает надежное определение параметров, характеризующих изменение состояния атмосферы с высотой.

В основу рассматриваемой технологии положены два основных принципа:

- 1) «совокупное использование измерений параметров атмосферы и моделирования их пространственной изменчивости;
- 2) дифференциальный принцип моделирования атмосферы» [107].

Первый принцип заключается в том, что непосредственные измерения дают информацию о фактическом мгновенном состоянии атмосферы, а дальнейшее

моделирование позволяет значительно сократить объем работ. Вторым принципом является учет пространственной изменчивости в пределах местных полей метеовеличин.

В сравнении с большинством существующих моделей учета влияния ВР «геодезическая» модель обладает следующим рядом преимуществ:

- 1) описывает результирующее для трассы влияние метеовеличин на результаты геодезических измерений;
- 2) отражает фактическое состояние атмосферы, т. е.
 - параметры модели не содержат прогнозируемых элементов;
 - постоянные численные параметры включают только элементы, не зависящие от времени и состояния атмосферы;
 - переменные параметры определяются на момент геодезических измерений [104].

Основные уравнения «геодезической» модели в приложении к учету влияния угловой рефракции имеют следующий вид [104, 105]:

$$r'' = -\frac{\rho''}{D} \sum_1^m \left(\frac{dn}{dz} \right)_i l_i L_i; \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{dn}{dz} \right)_i = \left(\left(\frac{dn}{dz} \right)_{исх} A_{1-i} + 0,038 \cdot 10^{-6} \right) \bar{z}_i^{-b} - 0,038 \cdot 10^{-6}; \quad (2.8)$$

где A_{1-i} – переходный коэффициент от исходной поверхности к другой;

$\bar{z}_i$ – средняя высота визирного луча на i -ом участке по линии визирования;

L_i и l_i – длина i -ого участка и расстояние от его середины до пункта наблюдения;

$(dn/dz)_{исх}$ и $(dn/dz)_i$ – градиент показателя преломления над исходной и текущей поверхностью, соответственно;

b – коэффициент обмена, характеризующий характер теплообмена и динамику расчетного слоя воздуха;

D – измеренное расстояние.

В уравнении (2.8) самым трудозатратным по времени получением параметром является средняя высота визирного луча $\bar{z}$, так, в работе [106] было показано, что для обеспечения точности геометрического нивелирования III класса на дистанции в 1 км при нормальных условиях ($b = -1$, высота луча над подстилающей поверхностью 2 метра) $\bar{z}$ необходимо определять с точностью 4 мм. Для получения указанной точности требуется проведение тщательного нивелирования подстилающей поверхности вдоль линии визирования.

В работе [106] предложен прием, позволяющий уйти от необходимости определения средней высоты визирного луча по трассе. Прием заключается в измерении вертикального угла на две визирные цели, закрепленные на разных высотах, в этом случае можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} r_1'' = -\frac{\rho'' D}{2} \left(\frac{dn}{dz} \right)_0 \bar{z}_i^{-b} + \frac{\rho'' D}{2} 0,038 \cdot 10^{-6}; \\ r_2'' = -\frac{\rho'' D}{2} \left(\frac{dn}{dz} \right)_0 (\bar{z}_i + \Delta z_i)^b + \frac{\rho'' D}{2} 0,038 \cdot 10^{-6}; \end{cases} \quad (2.9)$$

где Δz – разность средних высот измерительных уровней, равная половине разностей высот визирных целей;

$(dn/dz)_0$ – результирующий (средневесовой) градиент показателя преломления на высоте исходной (нижней) визирной цели, исправленный за нормальный градиент давления, вычисляемый по следующей формуле:

$$\left(\frac{dn}{dz} \right)_0 = \left(\frac{dn}{dz} \right)_{исх} \left(A_1 \frac{l_1 L_1}{D} + A_2 \frac{l_2 L_2}{D} + \dots + A_k \frac{l_k L_k}{D} \right) + 0,038 \cdot 10^{-6} \frac{D}{2}. \quad (2.10)$$

В работе [106] было показано, что для углов рефракции, не превосходящих $20''$, и $\Delta z = 0,5$ метра, для получения точности в $1''$; $(\bar{z}_i + \Delta z_i)^b$ можно разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь двумя первыми членами; для углов, превосходящих $20''$, необходимо удерживать третий член ряда. Для результата разложения в ряд $(\bar{z}_i + \Delta z_i)^b$, автором работы [106] было введено понятие эквивалентной высоты, вычисляемой по следующей формуле (разложение до второго члена ряда):

$$z_{\text{экв}} = \sqrt[b-1]{\frac{2\delta r}{\rho'' D \left(\left(\frac{dr}{dz} \right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6} \right) b \Delta z}}; \quad (2.11)$$

где δr – приращение угла рефракции между визирными целями, расположенными на разных высотах (уровнях).

Таким образом, в «геодезической» модели атмосферы предусмотрен прием, позволяющий уйти от самой трудоемкой, времязатратной и дорогостоящей задачи: необходимости определять среднюю высоту визирного луча над подстилающей поверхностью.

Тогда формулу для угла рефракции на исходном измерительном уровне можно записать в следующем виде [106]:

$$r'' = -\frac{\rho'' D}{2} \left(\left(\frac{dn}{dz} \right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6} \right) z_{\text{экв}}^b + \frac{\rho'' D}{2} 0,038 \cdot 10^{-6}. \quad (2.12)$$

В уравнении 2.12 четыре неизвестных параметра «геодезической» модели, согласно [110], определить указанные параметры можно тремя способами:

1. метеорологическим (по градиентным метеоизмерениям);
2. комбинированным (по комплексным градиентным метеорологическим и геодезическим измерениям);
3. геодезическим (по градиентным геодезическим измерениям).

Авторами работы [110] был выполнен расчет требований к точности проведения метеоизмерений при использовании метеорологического способа. Было установлено, что для получения точности III класса геометрического нивелирования на дистанции в 1 км, необходимо измерять вертикальные градиенты температуры, давления и влажности со средними квадратическими погрешностями 0,006 К/м, 0,019 гПа/м, 0,14 гПа/м, соответственно. Современные полевые метеодатчики не позволяют проводить измерения с указанной точностью, на основании чего был сделан вывод о невозможности применения метеорологического способа для определения параметров геодезической модели.

Разработка и реализация алгоритма комбинированного способа определения параметров модели были осуществлены в работах [110-114]. Для реализации алгоритма необходимы измерения зенитных расстояний на пяти уровнях, сопровождаемые градиентными измерениями температуры. По точности предложенная комбинированная методика стабильно удовлетворяет требованиям IV класса геометрического нивелирования на дистанциях до одного километра. Оперативность незначительно снижается вследствие включения в программу полевых наблюдений угловых измерений на дополнительных уровнях и градиентных температурных измерений. На стоимость оказывает влияние лишь необходимость приобретения метеорологического градиентометра [115]. Алгоритм комбинированного способа работает в любых условиях, кроме кратковременных периодов изотермии. Методику, реализующую комбинированный способ, способен осуществить любой специалист в области геодезии.

К сожалению, у метода существует весомый недостаток, ограничивающий его внедрение в массовое геодезическое производство: для рационального выполнения метеоизмерений на нескольких уровнях нужен метеорологический градиентометр; несмотря на дешевизну и простоту конструкции этого устройства, отсутствие серийного выпуска не позволяет внедрить рассматриваемую методику в массовое геодезическое производство без дополнительных капиталовложений.

По мнению автора, наилучший, с точки зрения геодезического производства, способ определения параметров «геодезической» модели – геодезический, осуществляемый по градиентным геодезическим наблюдениям, т.к. для его производства не требуется привлечения какого-либо дополнительного оборудования, что делает возможным его применение в геодезической практике. Помимо вышесказанного, геодезический способ обеспечивает определение результирующих для трассы параметров «геодезической» модели, сформированных всей совокупностью представленных типов подстилающей поверхности. Такой подход позволяет исключить влияние изменения типа подстилающей поверхности из числа факторов, подлежащих учету при

производстве тригонометрического нивелирования. На текущий момент алгоритма реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели, и, как следствие, основанной на нем методики выполнения тригонометрического нивелирования с учетом влияния ВР, не существует. Разработка алгоритма и методики реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели будут освещены ниже.

Подводя итог текущему подразделу, можно сделать следующие выводы:

- обеспечить учет сформулированных в первом подразделе текущей главы факторов можно при использовании технологии эффективного учета влияния приземного слоя атмосферы, основанной на «геодезической» модели атмосферы и принципе определения параметров модели по градиентным геодезическим и/или метеорологическим измерениям. В частности, контроль точек перелома температурной стратификации, особенно на линиях, поросших растительным покровом, возможно осуществить за счет измерений на нескольких уровнях; контроль изменения типа подстилающей поверхности вдоль линии визирования за счет моделирования результирующих для визирной линии параметров атмосферы; контроль изменения высоты визитного луча над подстилающей поверхностью по трассе за счет использования эквивалентной высоты;

- наилучшим, с точки зрения учета дифференциации ПП вдоль визирной линии, методом определения параметров геодезической модели является геодезический способ, основанный на градиентных геодезических наблюдениях, т.к. полученные посредством геодезических измерений параметры модели характеризуют совокупное влияние всех представленных вдоль визирной линии типов ПП;

- геодезический способ оптимален и с точки зрения геодезического производства, т.к. для его реализации не требуется привлечение какого-либо дополнительного оборудования, что делает возможным его применение в геодезической практике;

- необходима разработка алгоритма и методики реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели.

2.3 Разработка алгоритма определения коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений

Как было сказано ранее, угол рефракции r на дистанции длиной D связан с вертикальным градиентом $(dn/dz)_0$ показателя преломления на исходном уровне, эквивалентной высотой визирного луча $z_{\text{экв}}$ и коэффициентом обмена b , характеризующим динамику рабочего слоя воздуха, формулой вида (2.12):

$$r'' = -\frac{\rho'' D}{2} \left(\left(\frac{dn}{dz} \right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6} \right) z_{\text{экв}}^b + \frac{\rho'' D}{2} 0,038 \cdot 10^{-6}.$$

При изменении высоты визирного луча (измерительного уровня) изменяется градиент показателя преломления и функционально связанный с ним угол рефракции:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1'' = -\frac{\rho'' D}{2} \left(\left(\frac{dn}{dz} \right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6} \right) z_{\text{экв}}^b + \frac{\rho'' D}{2} 0,038 \cdot 10^{-6}; \\ r_2'' = r_1'' + \delta r_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\rho'' D}{2} \left(\left(\frac{dn}{dz} \right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6} \right) \cdot (z_{\text{экв}} + \Delta z_{2-1})^b + \frac{\rho'' D}{2} 0,038 \cdot 10^{-6}; \\ \dots \\ r_n'' = r_1'' + \delta r_{1 \rightarrow n} = -\frac{\rho'' D}{2} \left(\left(\frac{dn}{dz} \right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6} \right) \cdot (z_{\text{экв}} + \Delta z_{n-1})^b + \frac{\rho'' D}{2} 0,038 \cdot 10^{-6}. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

где 1, 2, ..., n – номер измерительного уровня;

Δz_{j-1} – разность средних высот измерительных уровней, равная половине разности высот отражателей;

$\delta r_{1 \rightarrow j}$ – приращение угла рефракции на текущем уровне j относительно первого, вычисляемое по измеренной $(\Delta v_{1 \rightarrow j})_{\text{изм}}$ и теоретической $(\Delta v_{1 \rightarrow j})_{\text{теор}}$ разностям углов наклона v :

$$\delta r_{1 \rightarrow j} = (\Delta v_{1 \rightarrow j})_{\text{изм}} - (\Delta v_{1 \rightarrow j})_{\text{теор}}. \quad (2.14)$$

Теоретическая разность углов наклона, в свою очередь, вычисляется по разности высот отражателей $\Delta h_{1 \rightarrow j}$:

$$\left(\Delta v_{1 \rightarrow j}\right)_{\text{теор}} = \frac{\Delta h_{1 \rightarrow j} \cdot \rho''}{D}. \quad (2.15)$$

В системе уравнений (2.13) четыре неизвестных: r_1'' , $(dn/dz)_0$, $z_{\text{эКВ}}$, b , следовательно, для ее решения необходимы, как минимум, четыре уравнения (для четырех измерительных уровней), т.е. $n \geq 4$. Представленную систему нелинейных уравнений можно решить известными методами, что обеспечивает принципиальную возможность определения всех параметров модели, необходимых для вычисления угла (коэффициента) рефракции на рабочем уровне, по результатам измерения вертикального угла на четырех и более уровнях. Число уровней, большее четырех, позволит уменьшить случайную ошибку моделирования рефракции за счет наличия избыточных измерений.

Для удобства записи дальнейших преобразований введем обозначения:

$$\begin{aligned} m &= -\frac{\rho'' D}{2} \left(\left(\frac{dn}{dz} \right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6} \right); \\ w &= \frac{\rho'' D}{2} 0,038 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В системе (2.13) выполним замены, согласно (2.16):

$$\begin{cases} r_1'' = m \cdot z_{\text{эКВ}}^b + w; \\ r_1'' + \delta r_{1 \rightarrow 2} = m \cdot (z_{\text{эКВ}} + \Delta z_{2-1})^b + w; \\ \dots \\ r_1'' + \delta r_{1 \rightarrow n} = m \cdot (z_{\text{эКВ}} + \Delta z_{n-1})^b + w. \end{cases} \quad (2.17)$$

Вычитая первое уравнение системы (2.17) из последующих, получим:

$$\begin{cases} \delta r_{1 \rightarrow 2} = m \cdot \left((z_{\text{эКВ}} + \Delta z_{2-1})^b - z_{\text{эКВ}}^b \right); \\ \delta r_{1 \rightarrow 3} = m \cdot \left((z_{\text{эКВ}} + \Delta z_{3-1})^b - z_{\text{эКВ}}^b \right); \\ \dots \\ \delta r_{1 \rightarrow n} = m \cdot \left((z_{\text{эКВ}} + \Delta z_{n-1})^b - z_{\text{эКВ}}^b \right). \end{cases} \quad (2.18)$$

2.3.1 Расчет требований к точности выполнения угловых измерений

Выполним предрасчет требований к точности выполнения угловых измерений, используя первое уравнение системы (2.18).

Согласно Инструкции по нивелированию I, II, III, IV классов [7], при нивелировании IV класса СКП определения превышения равна 10 мм на 1 км хода, что на трассе длиной $D = 1000$ м, соответствует СКП измерения зенитного расстояния, равной $2''$. Для простоты будем считать, что на точность определения зенитного расстояния влияет только СКП определения угла рефракции, т.е. $m_r = 2''$. Примем $z = 1,5$ м; $b = 0,8$; $(dn/dz)_0 = 0,2 \cdot 10^{-6}/\text{м}$. Перейдя в уравнении (2.18) к СКП, и воспользовавшись принципом равных влияний, получим:

$$m_{(dn/dz)_0} = \frac{m_r}{\left| \frac{\rho'' D}{2} z_{\text{эКВ}}^b \right| \sqrt{3}} = 8 \cdot 10^{-9} / \text{м}; \quad (2.19)$$

$$m_z = \frac{m_r}{\left| -\frac{\rho'' D}{2} \left[\left(\frac{dn}{dz} \right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6} \right] b z_{\text{эКВ}}^{b-1} \right| \sqrt{3}} = 0,06 \text{ м}; \quad (2.20)$$

$$m_b = \frac{m_r}{\left| -\frac{\rho'' D}{2} \left[\left(\frac{dn}{dz} \right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6} \right] z_{\text{эКВ}}^b \ln b \right| \sqrt{3}} = 0,08. \quad (2.21)$$

Запишем формулу, связывающую СКП определения приращения рефракции $m_{\delta r_{1 \rightarrow 2}}$ с СКП аргументов первого уравнения системы (2.13):

$$m_{\delta r_{1 \rightarrow 2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \delta r_{1 \rightarrow 2}}{\partial (dn/dz)_0} \right)^2 m_{\left(\frac{dn}{dz} \right)_0}^2 + \left(\frac{\partial \delta r_{1 \rightarrow 2}}{\partial z_{\text{эКВ}}} \right)^2 m_{z_{\text{эКВ}}}^2 + \left(\frac{\partial \delta r_{1 \rightarrow 2}}{\partial \Delta z} \right)^2 m_{\Delta z}^2 + \left(\frac{\partial \delta r_{1 \rightarrow 2}}{\partial b} \right)^2 m_b^2}. \quad (2.22)$$

Примем $\Delta z_{2-1} = 0,25$ м, что соответствует разности высот отражателей, равной 0,5 м, СКП определения разностей высот измерительных уровней $m_{\Delta z}$ примем равной 1 мм, тогда, используя значения средних квадратических погрешностей (2.19) - (2.21), получим $m_{\delta r_{1 \rightarrow 2}} = 0,7''$.

Согласно соотношениям (2.14) - (2.15), такую точность можно обеспечить, если измерять углы наклона с СКП

$$m_v = \sqrt{\frac{m_{\delta_{r_1 \rightarrow 2}}^2}{2} - \frac{(\rho'')^2}{2D^2} m_{\Delta h}^2}, \quad (2.23)$$

равной 0,5" при $m_{\Delta h} = 1$ мм.

Получение указанной точности возможно при использовании электронных тахеометров со СКП измерения вертикального угла в 1". В указанном случае угловые измерения необходимо выполнять четырьмя полными приемами.

СКП определения превышения при нивелировании III класса равна 5 мм на 1 км [7], тогда для тех же значений составляющих рефракционного уравнения получим требования к точности измерения угла наклона в 0,25". Указанную точность возможно получить только при использовании прецизионных электронных тахеометров с СКП измерения угла одним полным приемом в 0,5". Для получения заявленной точности потребуется выполнение четырех полных приемов.

Однако стоит отметить, что представленный расчет выполняется для приращения рефракции на нижних уровнях при $\Delta z_{2-1}=0,25$ м, что соответствует разности высот отражателей, равной 0,5 м, в то время как для последующих уровней требования к точности существенно снижаются. Так, для третьего и четвертого измерительных уровней при $\Delta z_{3-1}=0,50$ м и $\Delta z_{4-1}=0,75$ м, соответственно, требования к точности измерения вертикального угла составят 1,4" и 2,2" для IV класса и 0,7" и 1,1" для III класса, соответственно. Указанную точность возможно получить электронным тахеометром с СКП измерения вертикального угла в 1" при измерении в два полных приема или даже при использовании электронного тахеометра с СКП измерения вертикального угла в 2" при измерении в семь полных приемов. Благодаря вышеописанному, становится возможным снизить требования к точности измерительных инструментов за счет увеличения количества избыточных измерительных уровней. Последнее особенно актуально для III класса точности, так как прецизионные электронные тахеометры с точностью измерения вертикального угла в 0,5" являются достаточно редким и дорогостоящим инструментом, что может негативно сказаться на стоимости проведения работ.

Таким образом, применение геодезического способа для определения параметров «геодезической» модели может быть реализовано в геодезическом производстве с использованием серийно выпускаемых и широко используемых геодезических инструментов.

Возвращаясь к системе (2.18), почленно разделим каждое последующее уравнение системы на первое, тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta r_{1 \rightarrow 3}}{\delta r_{1 \rightarrow 2}} = \frac{m \cdot \left((z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{3-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b \right)}{m \cdot \left((z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{2-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b \right)} = \frac{(z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{3-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b}{(z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{2-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b}, \\ \dots \\ \frac{\delta r_{1 \rightarrow n}}{\delta r_{1 \rightarrow 2}} = \frac{m \cdot \left((z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{n-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b \right)}{m \cdot \left((z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{2-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b \right)} = \frac{(z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{n-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b}{(z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{2-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

2.3.2 Обоснование выбора метода решения исходной системы уравнений

Имеем систему из $n-2$ уравнений (n – количество измерительных уровней) с двумя неизвестными $z_{\text{ЭКВ}}$ и b . Можно видеть, что система (2.24) нелинейная. Для решения нелинейных систем уравнений традиционно применяются итерационные алгоритмы Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта. Основное преимущество алгоритма Гаусса-Ньютона заключается в том, что для определения вектора параметров, минимизирующего сумму квадратов невязок, используется только матрицы Якоби J (матрицы первых производных) без вычисления матрицы Гессе H (матрицы вторых производных), при этом скорость сходимости достигает квадратической [116]. Ключевыми недостатками алгоритма Гаусса-Ньютона являются возможность вырожденности подлежащей обращению матрицы $J^T J$ [116], также следует отметить плохую сходимость рассматриваемого алгоритма в случае сильной нелинейности системы уравнений связи и неудачного начального приближения [117]. Указанные недостатки частично устранены в алгоритме Левенберга-Марквардта, где проблема вырожденности матрицы $J^T J$ решается

путем ввода параметра регуляризации λ , обращению подлежит матрица $J^T J + \lambda I$, где I – единичная матрица [116]. Параметр регуляризации меняется в зависимости от получаемой погрешности на каждой итерации: если погрешность быстро уменьшается, то λ принимает значение близкие к нулю, в противном случае λ увеличивается. Сравнение алгоритмов Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта выполненное в работе [116], показало, что последний обеспечил на 20-30 % меньшее значение два-нормы погрешности оценивания вектора параметров.

У представленных методов наличествует ряд недостатков, первый из которых заключается в том, что оба алгоритма нацелены на поиск локального минимума, т.е. ближайшего к начальному приближению экстремума, второй – заключается в необходимости непрерывности производных целевой функции в области поиска [118, 119]. Оба недостатка являются весомым аргументом против применения классических алгоритмов, поскольку площадь поиска может содержать как множество локальных экстремумов, так и разрывы в целевой функции, сюда же следует добавить, что задать начальное приближение с достаточной точностью в текущей задаче невозможно, так как его выбор основан не на измерении, а на статистической закономерности. Стоит добавить, что атмосферные изменения непрерывны, т.е. целевая функция может иметь любой вид, а, следовательно, невозможно сделать даже приблизительные оценки свойств функции. Помимо вышесказанного следует отметить, что в системе (2.24) два искомых параметра, т.е. решается многопараметрическая задача, в то время как рассмотренные методы не всегда эффективны в указанной постановке [118, 119].

Кроме того, говоря о алгоритмах Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта, стоит отметить определенную сложность для понимания и реализации пользователем, так в работе [120] отмечено «освоение таких методов пользователями - представителями экспериментальных наук до уровня сознательного управления процедурами итерационных вычислений затруднено». Современное развитие библиотек языков программирования несколько смягчает последнее замечание, так, например, алгоритм Левенберга-Марквардта реализован на языке Python в библиотеке `scipy` в инструменте `scipy.optimize.root` с параметром

method='lm' [121]. Однако, несмотря на кажущуюся простоту применения указанного инструмента, особенности применения алгоритма Левенберга-Марквардта могут потребовать от пользователя «вынужденно изменять направление итераций» [120], как правило, при превышении порогового значения параметра регуляризации.

Таким образом, для решения задачи необходим метод, позволяющий определять глобальный экстремум многопараметрической функции с неизвестной степенью нелинейности при неточном начальном приближении. Для решения таких систем нелинейных алгебраических уравнений эффективно воспользоваться методом Монте-Карло [122]. Так, в работах [120, 123] подтверждается способность данного метода решать вышеописанные задачи. По мнению автора, для решения рассматриваемой задачи эффективно воспользоваться весовой реализацией метода Монте-Карло (weighted importance sampling), чья эффективность доказана в работах [124, 125].

2.3.3 Алгоритм определения коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений

Применительно к решению рассматриваемой задачи, весовая реализация метода Монте-Карло (weighted importance sampling) представляет из себя следующее [95] – в определенной области (диапазоны изменения коэффициента обмена и эквивалентной высоты) случайным образом выбирается N значений L_i (пар b и $z_{\text{ЭКВ}}$). Для каждого элемента L_i выборки определяется вес p_i , основываясь на оценках среднего квадратического отклонения, полученных для L_i и для пары более вероятных значений переменных b и $z_{\text{ЭКВ}}$. Используя значения элементов случайной выборки и их веса p_i , вычисляются наиболее надежные значения $\overline{X}$ параметров b и $z_{\text{ЭКВ}}$ по формуле средневзвешенной величины:

$$\overline{X} = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2 + \dots + L_N p_N}{p_1 + p_2 + \dots + p_N} = \frac{[Lp]}{[p]}. \quad (2.25)$$

Иными словами, назначаются более вероятные значения переменных b и $z_{\text{эКВ}}$ (в дневное время b можно принять равным 0,8; а эквивалентную высоту примерно равной средней высоте визирного луча над подстилающей поверхностью, определенной «на глаз» исполнителя). Данные значения подставляются в систему (2.24), вычисляются отклонения Δ по каждому уравнению по формулам вида (2.26)

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{\delta r_{1 \rightarrow 3}}{\delta r_{1 \rightarrow 2}} - \frac{(z_{\text{эКВ}} + \Delta z_{3-1})^b - z_{\text{эКВ}}^b}{(z_{\text{эКВ}} + \Delta z_{2-1})^b - z_{\text{эКВ}}^b}; \\ \dots \\ \Delta_{n-2} = \frac{\delta r_{1 \rightarrow n}}{\delta r_{1 \rightarrow 2}} - \frac{(z_{\text{эКВ}} + \Delta z_{n-1})^b - z_{\text{эКВ}}^b}{(z_{\text{эКВ}} + \Delta z_{2-1})^b - z_{\text{эКВ}}^b}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Важным замечанием является тот факт, что отклонения Δ , полученные по формулам вида (2.26), можно принять за истинную величину, т.к. точность измерения отношений приращений рефракции $\delta r_{1 \rightarrow j} / \delta r_{1 \rightarrow 2}$ являются величиной многократно более точной, чем установленные на статистических закономерностях вероятные значения переменных b и $z_{\text{эКВ}}$ или их случайная выборка.

После чего определяется μ – ошибка единицы веса пары более вероятных значений b и $z_{\text{эКВ}}$, по формуле (2.27):

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n-2}}. \quad (2.27)$$

Далее производится случайная выборка пар значений b и $z_{\text{эКВ}}$ из диапазонов из возможных значений. Диапазон возможных значений коэффициента обмена в течении суток лежит в пределах от -3 до 3. Для эквивалентной высоты диапазон можно установить от 0 метров до утроенного значения высоты визирного луча, определенного «на глаз» исполнителя. Выбранные пары b и $z_{\text{эКВ}}$ подставляются в систему (2.26), для каждой пары вычисляется СКП m_i . Последнее возможно осуществить двумя способами: равноточным [95] и неравноточным [126]. В первом случае значения $\delta r_{1 \rightarrow j} / \delta r_{1 \rightarrow 2}$ в системе уравнений (2.26) принимаются равноточными, в таком случае СКО каждой пары выбранных значений параметров b и $z_{\text{эКВ}}$ вычисляется по формуле, аналогичной (2.27). Затем назначаются веса:

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \quad (2.28)$$

После чего определяются средневзвешенные значения переменных b и $z_{\text{экв}}$ по формуле (2.25).

Неравноточный способ оценки предполагает учет степени доверия к отношениям $\delta r_{1 \rightarrow j} / \delta r_{1 \rightarrow 2}$, которая зависит от точности измерения углов наклона. Оценку точности величин $\delta r_{1 \rightarrow j} / \delta r_{1 \rightarrow 2}$ возможно произвести следующим образом. Воспользуемся обобщенной теоремой оценки точности

$$m_{\left(\frac{\delta r_{1 \rightarrow j}}{\delta r_{1 \rightarrow 2}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\delta r_{1 \rightarrow 2}}\right)^2 m_{\delta r_{1 \rightarrow j}}^2 + \left(\frac{-\delta r_{1 \rightarrow j}}{\delta r_{1 \rightarrow 2}^2}\right)^2 m_{\delta r_{1 \rightarrow 2}}^2}, \quad (2.29)$$

где $m_{\delta r_{1 \rightarrow 2}}$ и $m_{\delta r_{1 \rightarrow j}}$ – СКП измеренных приращений рефракции $\delta r_{1 \rightarrow 2}$ и $\delta r_{1 \rightarrow j}$, вычисленные по формуле

$$m_{\delta r_{1 \rightarrow j}} = \sqrt{m_{v_1}^2 + m_{v_j}^2}, \quad (2.30)$$

где m_{v_1} и m_{v_j} – СКП измеренных углов наклона на первом и j -ом уровнях, определенные по равноточной формуле Бесселя

$$m_v = \sqrt{\frac{[v_s - v_{cp}]^2}{r - 1}}, \quad (2.31)$$

в которой v_s – значение угла наклона v в приеме с номером s , v_{cp} – среднее значение угла v из приемов, r – количество приемов.

Примем за СКП единицы веса μ среднее из $m_{\delta r_{1 \rightarrow j} / \delta r_{1 \rightarrow 2}}$. Назначим веса отношений $\delta r_{1 \rightarrow j} / \delta r_{1 \rightarrow 2}$ по следующей формуле

$$p_{\left(\frac{\delta r_{1 \rightarrow j}}{\delta r_{1 \rightarrow 2}}\right)} = \frac{\mu^2}{m_{\left(\frac{\delta r_{1 \rightarrow j}}{\delta r_{1 \rightarrow 2}}\right)}^2}. \quad (2.32)$$

Зная весовые коэффициенты величин $\delta r_{1 \rightarrow j} / \delta r_{1 \rightarrow 2}$, можно назначить веса каждой паре значений $b_i z_i$ по формуле, аналогичной (2.28), используя СКП, вычисленные по формуле

$$m_{b_i z_i} = \sqrt{\frac{p\left(\frac{\delta r_{1 \rightarrow j}}{\delta r_{1 \rightarrow 2}}\right) \Delta^2}{n}}, \quad (2.33)$$

где n – количество уравнений в исходной системе.

После чего определяются средневзвешенные значения переменных b и $z_{\text{ЭКВ}}$ по формуле (2.25).

Определив значения коэффициента обмена и эквивалентной высоты по одному из предложенных способов, возвращаемся к решению системы уравнений (2.18) и выполняем замены, согласно (2.16):

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dn}{dz} \right)_0 &= - \frac{2\delta r_{1 \rightarrow 2}}{\left((z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{2-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b \right) \rho'' D} - 0,038 \cdot 10^{-6}; \\ \left(\frac{dn}{dz} \right)_0 &= - \frac{2\delta r_{1 \rightarrow 3}}{\left((z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{3-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b \right) \rho'' D} - 0,038 \cdot 10^{-6}; \\ &\dots \\ \left(\frac{dn}{dz} \right)_0 &= - \frac{2\delta r_{1 \rightarrow n}}{\left((z_{\text{ЭКВ}} + \Delta z_{n-1})^b - z_{\text{ЭКВ}}^b \right) \rho'' D} - 0,038 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \right. \quad (2.34)$$

Полученные значения $(dn/dz)_0$ усредняем и вычисляем СКП $m_{(dn/dz)_0}$ среднего арифметического, используя отклонения $\Delta_{(dn/dz)_0}$ результата, полученного в каждом уравнении системы (2.34), от среднего арифметического значения:

$$m_{(dn/dz)_0} = \sqrt{\frac{\Delta_{(dn/dz)_0}^2}{n-2}}. \quad (2.35)$$

Зная $(dn/dz)_0$ с достаточной точностью, можно вычислить коэффициент рефракции k_1 на первом измерительном уровне:

$$k_1 = \left(\frac{dn}{dz} \right)_1 R_3, \quad (2.36)$$

где $(dn/dz)_1$ – вертикальный градиент показателя преломления на первом измерительном уровне:

$$\left(\frac{dn}{dz}\right)_1 = \left(\left(\frac{dn}{dz}\right)_0 + 0,038 \cdot 10^{-6}\right) z_{\text{экв}}^b + \frac{\rho'' D}{2} 0,038 \cdot 10^{-6}. \quad (2.37)$$

Перед применением алгоритма определения коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений следует определить необходимое количество случайных выборок пар b и $z_{\text{экв}}$. Для этого был смоделирован ряд ситуаций с наиболее жесткими требованиями к точности (III класс и минимальное количество измерительных уровней), неблагоприятными значениями параметров «геодезической» модели и условий съемки (существенный диапазон возможных значений $z_{\text{экв}}$). Значение стандартного отклонения моделируемой погрешности измерения углов назначалось на основании расчета, проведенного в пункте 2.3.1 текущей главы. Для каждой моделируемой ситуации подбиралось количество случайных выборок пар b и $z_{\text{экв}}$, для которого обеспечивалось решение с заявленной точностью. Итоговым результатом принималось число случайных выборок, обеспечивающее решение с заявленной точностью для всех смоделированных ситуаций. Оптимальное число случайных выборок – 200 000, что соответствует примерно 4,3 секундам машинного времени.

2.4 Разработка методических приемов производства градиентных геодезических измерений

Методические приемы должны учитывать требования, поставленные в подразделе 2.1 текущей главы, а именно:

1. контроль точек перелома температурной стратификации, особенно на линиях, поросших растительным покровом;
2. контроль изменения типа подстилающей поверхности вдоль линии визирования;
3. контроль изменения высоты визитного луча над подстилающей поверхностью по трассе.

Второй пункт реализуется за счет применения геодезического способа

определения параметров «геодезической» модели. Свойство последнего обеспечивает определение результирующих для трассы параметров «геодезической» модели, сформированных всей совокупностью представленных типов подстилающей поверхности. Выполнение третьего требования осуществляется с помощью принципа учета влияния атмосферы без знания высоты визирного луча [106], реализованного в «геодезической» модели атмосферы. Контроль точек перелома температурной стратификации возможно осуществить за счет градиентных геодезических измерений, в частности, по результатам измеренных приращений угла рефракции δr_{1-j} (приращение угла рефракции на текущем уровне j относительно первого), вычисляемых по формуле (2.14). Под переломом понимается не изменение знака самих приращений угла рефракции δr_{1-j} , а изменение их направленности (уменьшение или увеличение с высотой), т.е. тенденции направления. Для корректного решения задачи необходим набор как минимум из трех последовательных приращений угла рефракции, что соответствует четырем последовательным измерительным уровням.

Для оценки оптимального набора автором предлагается следующий способ: составляется таблица приращений угла рефракции по всем измеренным уровням, полученные данные анализируются на наличие переломов в атмосферной стратификации, при наличии нескольких удовлетворяющих условию отсутствия слоистости атмосферной стратификации наборов выбирается набор с наибольшими значениями приращений угла рефракции. При отсутствии наборов, удовлетворяющих заданному условию, в обработку принимаются все измерительные уровни.

При этом, измерения должны выполняться в кратчайшие промежутки времени, так как значения рефракционных параметров могут значительно меняться за короткое время. Однако, согласно расчетам, выполненным в подразделе 2.3 текущей главы, для получения требуемой точности может потребоваться значительное количество приемов, которое невозможно выполнить за короткое (относительно изменений рефракции) время. В связи с чем необходима разработка процедуры производства угловых измерений на нескольких уровнях,

обеспечивающей выполнение полного комплекса угловых измерений в максимально сжатые сроки.

Опираясь на представленный в подразделе 2.1 текущей главы анализ факторов формирования ВР, известные закономерности ее изменений во времени и пространстве, специфические требования к точности и организации градиентных измерений при реализации разработанного автором алгоритма определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям предложены следующие методические приемы производства градиентных геодезических измерений [127]:

1. Визирная линия на нижнем уровне должна располагаться выше верхней границы растительности и уровня шероховатости, что позволит минимизировать вероятность возникновения точек перегиба вертикального профиля атмосферной стратификации и сократить их количество.

2. Количество измерительных уровней должно быть больше четырех, что обеспечит:

- повышение точности моделирования коэффициента рефракции за счет наличия избыточных измерений;
- контроль уровней перегиба стратификации атмосферы;
- возможность формирования нескольких наборов уровней, включенных в обработку, в случае обнаружения точек перегиба вертикального профиля стратификации атмосферы;

3. При расчете количества приемов, которым осуществляется измерение вертикальных углов, следует учитывать технические характеристики используемого электронного тахеометра и требования к точности угловых измерений при реализации разработанного автором алгоритма определения коэффициента рефракции.

4. Процедура производства угловых измерений на нескольких уровнях должна обеспечивать выполнение полного комплекса измерений в максимально сжатые сроки с целью уменьшения влияния временных изменений рефракции, которые могут быть значительными.

На каждом уровне в качестве визирной цели следует использовать закрепленные на вешке или рейке геодезические марки (отражательные пленки). Измерения выполнять в режиме «измерение углов», при котором электронный тахеометр производит отсчет практически мгновенно, так как не приходится ожидать обработки вычислительным центром электронного тахеометра результатов дальномерных измерений (в режиме «точно» процесс линейных измерений может занять 5-6 секунд). Исполнитель осуществляет наведение на нижнюю визирную цель, измеряет вертикальный угол, после чего при том же круге, не открепляя закрепительные винты, вертикальным наводящим винтом осуществляет наведение на следующую визирную цель. Для контроля временных изменений состояния атмосферы и уменьшения случайных погрешностей наведения измерения осуществляются в «прямом» и «обратном» направлениях (от нижней марки к верхней и обратно). Указанные действия осуществляются вращением наводящего винта одной рукой и нажатием на кнопку измерения другой рукой, один полуприем на все измерительные уровни можно осуществить в течение нескольких десятков секунд. Аналогичные действия выполняются при другом положении вертикального круга. Таким образом, производится один полный прием на все измерительные уровни.

5. Разность высот визирных целей должна удовлетворять следующим условиям:

- приращения рефракции с высотой, которые используются для определения параметров модели, должны быть в несколько раз больше погрешности их определения;
- необходимо обеспечить контроль точек «перегиба» атмосферной стратификации.

Для удовлетворения первого условия следует увеличивать расстояние между визирными целями, выполнение второго условия связано с уменьшением разности высот визирных целей. Таким образом, речь идет об определении оптимальной разности высот визирных целей. Предварительные исследования в этом направлении выполнены в [114]. В рассматриваемой работе было показано, что

разность высот визирных целей в 0,2 м обеспечивает получение детальной информации о строении рабочего слоя атмосферы, однако величина приращения рефракции была сопоставима с погрешностью измерений, в то же время установка разности высот визирных целей в 0,5 метров показала противоположный результат. В результате чего авторами работы [114] был сделан вывод о значении оптимальной величины разности высот визирных целей в 0,3-0,4 метра. Стоит отметить, что при выполнении эксперимента [114] авторы выполняли градиентные измерения последовательно, т.е. сначала выполнялись все приемы на нижнем уровне, а после на каждом последующем, что неминуемо должно было привести к некоторой погрешности определения приращения рефракции, вызванной временными колебаниями последней. Выявление оптимальной разности высот визирных целей является одной из задач полевой апробации предлагаемой методики.

Изложенные выше методические приемы производства градиентных геодезических измерений обеспечивают повышение точности и оперативности производства геодезических измерений на нескольких уровнях и выполнение сформулированных в подразделе 2.1 требований.

2.5 Разработка программы полевых геодезических наблюдений при реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели атмосферы

Сформулируем методику полевых геодезических наблюдений при реализации геодезического способа учета влияния вертикальной рефракции:

1. На исходную станцию устанавливается электронный тахеометр, инструмент приводится в рабочее положение, рулеткой измеряется высота инструмента над исходным пунктом.
2. На определяемый пункт устанавливается отражатель, на который осуществляется измерение расстояния D .

3. На определяемом пункте устанавливается веха или рейка с закрепленными на ней геодезическими марками в количестве пяти штук и более. Расстояния между марками промеряются рулеткой от нижней до каждой последующей перед установкой на определяемый пункт. Расстояния между марками устанавливаются на основании расчета требуемой точности измерения угла (так, чтобы указанную точность было возможно получить имеющимся электронным тахеометром), но не более 0,5 метров (при большем расстоянии можно пропустить точку «перегиба» атмосферной стратификации). Нижняя визирная цель должна находиться выше высоты шероховатости и растительного покрова.

4. Электронный тахеометр переводится в режим «измерения углов», и осуществляется измерение вертикальных углов в соответствии с описанной выше процедурой. Количество приемов подбирается из расчета получения требуемой точности конкретным инструментом.

2.6 Предварительный анализ методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании

Приведенные выше расчеты доказывают возможность определения поправок за влияние вертикальной рефракции геодезическим способом основанном на:

- технологии эффективного учета влияния приземного слоя атмосферы, включающей в себя «геодезическую» модель атмосферы и принцип учета влияния атмосферы без знания высоты визирного луча над подстилающей поверхностью;
- принципе определения параметров модели по результатам градиентных геодезических измерений.

Разработанная автором методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании, включает в себя:

- алгоритм определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям;
- методические приемы производства градиентных геодезических измерений;
- процедуру производства угловых измерений на нескольких уровнях;
- программу полевых геодезических наблюдений при реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели атмосферы.

Используя сформулированные в подразделе 1.6 критерии оценки эффективности методик учета и ослабления влияния вертикальной рефракции проанализируем разработанную методику учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании. Расчет, представленный в подразделе 2.3, показал, что методика отвечает требованиями к точности III и IV класса геометрического нивелирования на дистанции в один километр. Для ее реализации необходимо осуществить измерения с одной станции на четыре и более измерительных уровня, время работы на станции зависит от количества приемов, зависящих, в свою очередь, от используемого электронного тахеометра, однако, даже при самом неблагоприятном сценарии, реализация методики значительно оперативнее проложения хода геометрического нивелирования. В качестве визирных целей предлагается использовать ряд геодезических марок, стоимость указанного аксессуара ничтожна в сравнении со стоимостью комплекта геодезического оборудования. Дополнительные члены бригады не требуются. По предварительным оценкам, представленное решение работает в любых условиях, кроме кратковременных периодов утренней и вечерней изотермии воздуха. Осуществить измерения расстояний и углов наклона способен любой геодезист. Математический алгоритм основан на методе Монте-Карло, который значительно проще для освоения и программной реализации, чем широко используемый в геодезической практике метод наименьших квадратов. Таким образом, предложенная методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным

геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании полностью или частично удовлетворяет всем критериям оценивания.

2.7 Выводы по главе 2

1. Выполнен анализ закономерностей формирования полей рефракции в приземном слое атмосферы. Было установлено, что оптимальный метод учета влияния вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования должен обеспечивать учет следующих факторов: контроль точек перелома температурной стратификации, особенно на линиях, поросших растительным покровом; изменения типа подстилающей поверхности вдоль линии визирования; изменения высоты визирного луча над подстилающей поверхностью по трассе.

2. Установлено, что обеспечить учет сформулированных факторов возможно при использовании технологии эффективного учета влияния приземного слоя атмосферы, основанной на «геодезической» модели атмосферы и принципе определения параметров модели по градиентным геодезическим и/или метеорологическим измерениям. В результате анализа способов определения параметров «геодезической» модели атмосферы было установлено, что наилучшим является геодезический способ, основанный на градиентных геодезических наблюдениях. Его ключевые преимущества заключаются в учете дифференциации подстилающей поверхности вдоль визирной линии и отсутствии необходимости привлечения какого-либо дополнительного оборудования для реализации.

3. Выполнен расчет требований к точности градиентных геодезических измерений для получения точности тригонометрического нивелирования, соответствующей III-му и IV-му классам. Установлено, что при увеличении количества измерительных уровней становится возможным снизить требования к точности измерительных инструментов. Обосновано использование для решения

исходной системы нелинейных уравнений связи весовой реализации метода Монте-Карло (weighted importance sampling). Показано превосходство указанного метода в текущей задаче над классическими методами решения систем нелинейных уравнений. Разработан алгоритм определения коэффициента рефракции по результатам градиентных геодезических измерений.

4. Разработаны методические приемы производства градиентных геодезических измерений. Обоснованно использование тенденции изменения приращений рефракции с высотой в качестве объективного критерия обнаружения слоистости атмосферы в рабочем слое воздуха. Разработана процедура производства угловых измерений на нескольких уровнях, позволяющая минимизировать время реализации градиентных геодезических измерений и контролировать временной ход вертикальной рефракции во время проведения измерений. Разработана программа полевых геодезических наблюдений при реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели атмосферы.

5. Разработана методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании, которая включает в себя: алгоритм определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям; методические приемы производства градиентных геодезических измерений; процедуру производства угловых измерений на нескольких уровнях; программу полевых геодезических наблюдений при реализации геодезического способа определения параметров «геодезической» модели атмосферы. Осуществлена ее предварительная оценка по критериям эффективности методик производства тригонометрического нивелирования, установлено, что методика отвечает всем заявленным критериям.

Глава 3 Аprobация методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании

3.1 Цель и задачи полевых исследований

Целью полевых экспериментов является аprobация соответствия предложенной во второй главе методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании заявленным критериям оценки эффективности методик учета и ослабления влияния вертикальной рефракции [95].

Для достижения указанной цели необходимо решение следующих задач:

1. Полевая аprobация соответствия предлагаемой методики точности III и IV класса геометрического нивелирования.
2. Оценка временных затрат на производство полевых измерений и обработку полученных результатов.
3. Оценка возможности понижения требований к точности электронного тахеометра за счет увеличения количества избыточных измерительных уровней. Формирование рекомендаций по оптимальному количеству измерительных уровней, обеспечивающему точность III и IV класса геометрического нивелирования.
4. Оценка работоспособности предлагаемой методики для разных типов подстилающей поверхности и разных высот визирного луча.
5. Сравнение точностных возможностей равноточного и неравноточного вариантов оценки случайной выборки пар искомых параметров b и $z_{эkb}$ при реализации алгоритма определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям.

6. Апробация возможности использования тенденции изменения приращений рефракции с высотой в качестве объективного критерия обнаружения слоистости атмосферы в рабочем слое воздуха.

7. Оценка эффективности разработанной методики в сравнении с используемым на производстве методом введения поправки за стандартный коэффициент рефракции 0,14.

Апробация методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании осуществлялась в два этапа, первый этап реализован в июле - августе 2024 года на территории Заокского района Тульской области [127], второй этап – в августе 2025 года на территории Чеховского района Московской области [126].

3.2 Первый этап полевых исследований

На первом этапе полевых исследований осуществлялось решение задач 1 и 3 (применительно к требованиям точности IV класса геометрического нивелирования), 2, 5, 6 и 7 [127].

3.2.1 Описание эксперимента на территории Заокского района Тульской области

На территории Заокского района Тульской области был создан экспериментальный полигон. Схема полигона представлена на рисунке 3.1. Превышения между исходным пунктом Родник и определяемыми Речка, Костино, Швейцария были определены по программе геометрического нивелирования III класса.

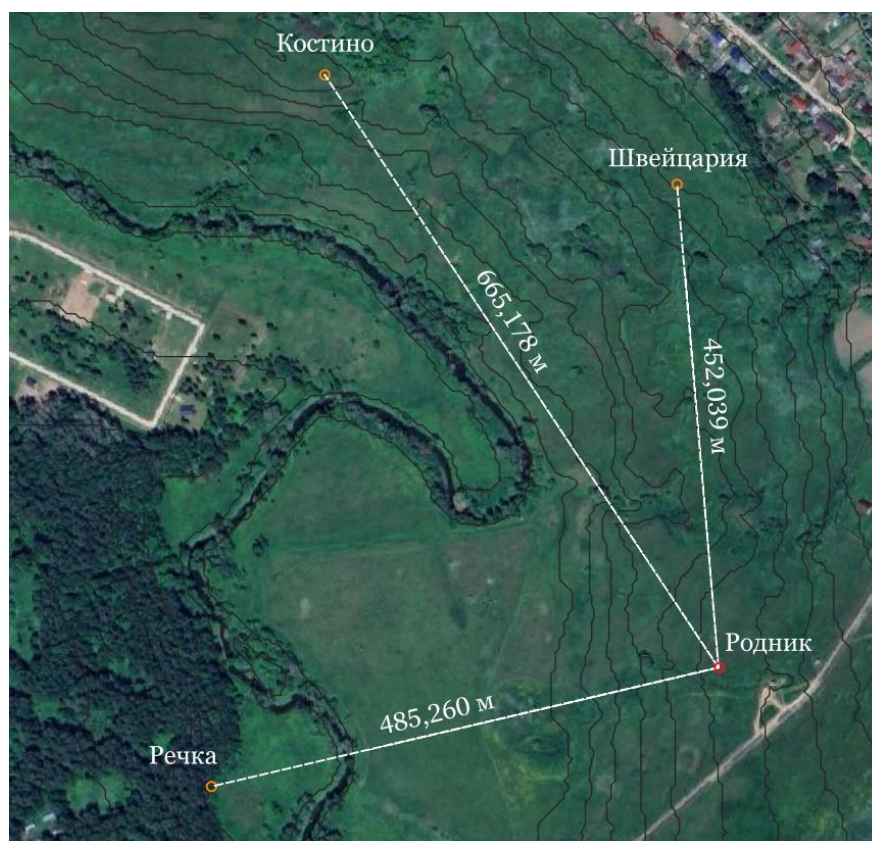


Рисунок 3.1 – Схема экспериментального полигона на территории Заокского района Тульской области

Исходный пункт Родник представляет собой столик принудительного центрирования, Костино – грунтовый репер, Речка и Швейцария – окопанные двухметровые куски арматуры. Внешний вид пунктов Родник и Костино представлен на рисунке 3.2.



Рисунок 3.2 – Внешний вид пунктов сети. Слева столик принудительного центрирования Родник, справа грунтовый репер Костино

Превышения $h_{\text{геом}}$, полученные из геометрического нивелирования III класса, и основные характеристики линий экспериментального полигона представлены в таблице 3.1. Во втором столбце таблицы 3.1 приведены измеренные горизонтальные проложения между пунктами S , в четвертом столбце указаны средневзвешенные высоты визирного луча $z_{\text{ср}}$ над ПП, вычисленные по данным цифровой модели рельефа территории экспериментального полигона.

Таблица 3.1 – Основные характеристики линий экспериментального полигона на территории Заокского района Тульской области

Линия	S , м	$h_{\text{геом}}$, м	$z_{\text{ср}}$, м	Характеристика ПП
1	2	3	4	5
Родник – Речка	485,260	-28,9425	11,679	Полевая растительность высотой до 0,5 м. В конце трасса пересекает р. Скнига
Родник – Костино	665,178	-3,3255	15,442	Полевая растительность высотой (1,0-1,5) м. В середине – скопление древесной растительности (значительно ниже визирного луча). Почти половина трассы проходит вдоль р.Скнига
Родник – Швейцария	452,039	7,6770	8,518	Полевая растительность высотой (1,0-1,5) м. В середине в непосредственной близости от визирной линии – лиственное дерево

В качестве визирной цели использовалась шашечная рейка с наклеенными светоотражательными марками, устойчивость рейки обеспечивал изготовленный из деревянных реек фиксированный «бипод». На пунктах Костино и Швейцария разность высот визирных целей устанавливалась согласно представленному в подразделе 2.3 предрасчету равной 0,5 метра, на пункте Речка – 0,7 метра (увеличение разности высот визирных целей обусловлено существенной высотой визирного луча на линии Родник - Речка). Высоты h_i визирных целей на рейках (расстояния от пятки рейки) измерялись рулеткой.

Продольные профили визирных линий представлены на рисунке 3.3.

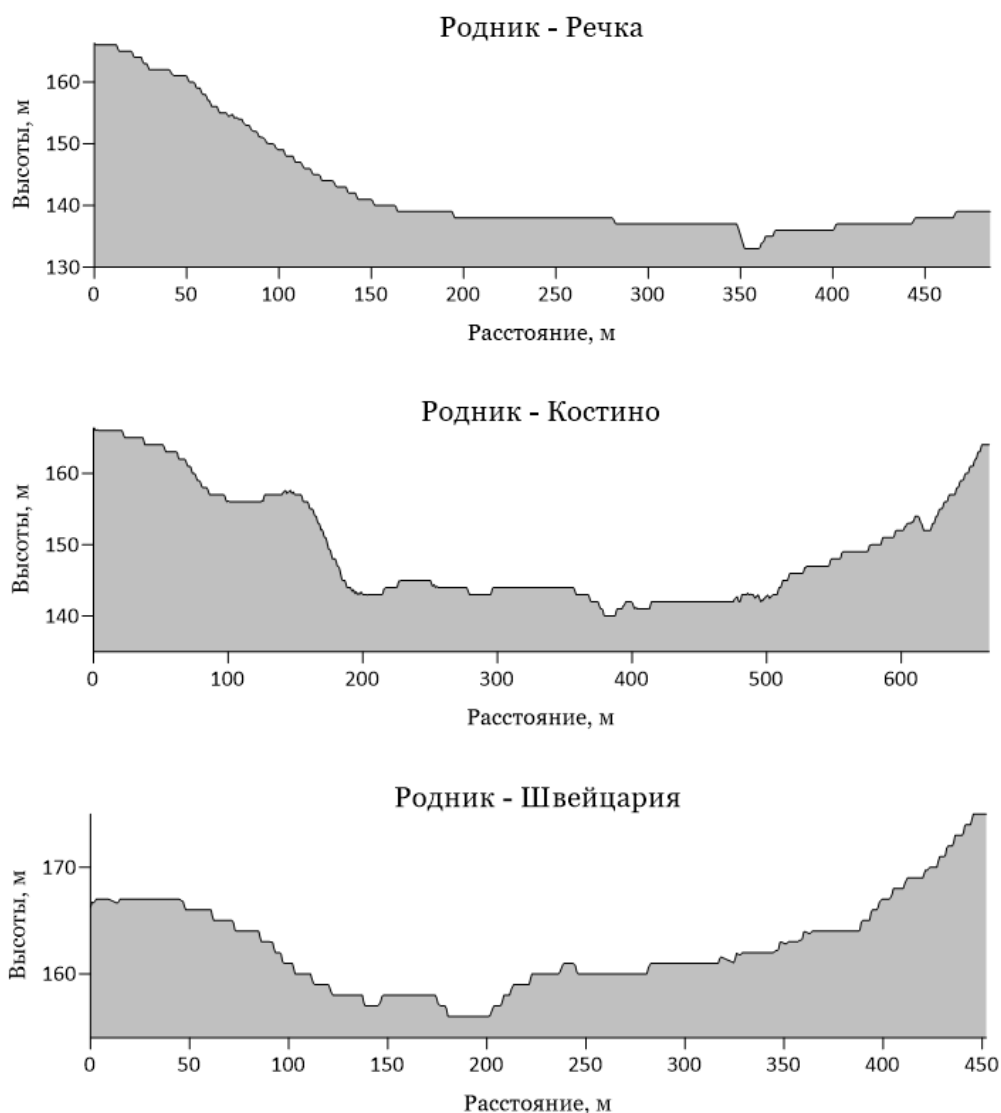


Рисунок 3.3 – Профили рельефа вдоль визирных линий на территории Заокского района Тульской области

Согласно предрасчету, представленному в подразделе 2.3, предлагаемая методика обеспечивает точность IV класса геометрического нивелирования при выполнении градиентных геодезических измерений электронным тахеометром с точностью измерения вертикального угла в 1" четырьмя полными приемами. Однако, было показано, что при увеличении количества измерительных уровней можно воспользоваться менее точными инструментами. На основании вышесказанного для измерений использовался электронный тахеометр SOUTH NTS-362R6 с точностью угловых измерений 2". Измерения на каждой визирной линии производились на пять измерительных уровней семью приемами по

описанной в подразделе 2.4 процедуре производства угловых измерений на нескольких уровнях. Поправка за рефракцию, автоматически вводимая электронным тахеометром, обнулялась.

Измеренные превышения были проанализированы на предмет соответствия точности IV класса. Далее в полученные превышения вводилась поправка за стандартный коэффициент рефракции (0,14) и повторно осуществлялся анализ точности, что позволило оценить эффективность использования стандартного коэффициента рефракции при одностороннем тригонометрическом нивелировании. После чего результаты градиентных геодезических измерений анализировались на предмет слоистости атмосферы, обусловленной наличием точек перелома вертикального профиля стратификации атмосферы. В случае обнаружения слоистости результаты измерений, содержащие ее влияние, по возможности исключались. Далее был реализован алгоритм определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям [95], при этом использовался как равноточный, так и неравноточный вариант оценки случайной выборки пар параметров b и $z_{экр}$. Полученные значения коэффициента рефракции сравнивались с истинным значением коэффициента рефракции, определенным по результатам геометрического нивелирования, на основании чего был сделан вывод о превосходстве одного из представленных вариантов оценки случайной выборки пар параметров b и $z_{экр}$. Смоделированные значения коэффициента рефракции использовались для введения поправки в превышения, измеренные на нижних измерительных уровнях. Превышения, исправленные за влияние вертикальной рефракции, анализировались на предмет соответствия точности геометрического нивелирования IV класса.

3.2.2 Результаты первого этапа полевых исследований

Время работы на станции колебалось в пределах от 16 до 19 минут, что подтвердило заявленную скорость реализации (оперативность) процедуры

производства градиентных геодезических измерений.

Превышения между исходным и определяемыми пунктами $h_{\text{измер}}$ вычислялись по формуле (3.1)

$$h_{\text{измер}} = \bar{D} \cdot \cos \bar{z} + i - V + \frac{\bar{D}^2}{2 \cdot R_{\text{ср}}}, \quad (3.1)$$

где $\bar{D}$ и $\bar{z}$ – средние для приема значения наклонной дальности и зенитного расстояния; i – высота инструмента; V – высота визирной цели над определяемым пунктом; $R_{\text{ср}}$ – средний радиус кривизны Земли. Последнее слагаемое в формуле (3.1) представляет собой поправку за кривизну Земли.

Согласно данным таблицы 3.2, на всех линиях, кроме Родник - Речка, истинные погрешности Δh измеренных превышений превысили допустимые для IV класса значения $\Delta h_{\text{пред}}$, равные удвоенным СКП (случайная СКП для IV класса – 10 мм/км [7]). Сравнительно малое влияние рефракции по линии Родник - Речка можно объяснить низкорослым растительным покровом и значительной высотой визирного луча вблизи прибора.

В превышения, полученные по формуле (3.1), вводилась поправка за стандартный коэффициент рефракции:

$$h_{k=0,14} = h_{\text{измер}} - 0,14 \frac{\bar{D}^2}{2 \cdot R_{\text{ср}}}. \quad (3.2)$$

Для каждой линии отмечено повышение точности за счет использования стандартного коэффициента рефракции (см. таблицу 3.2). Однако, только на линии Родник - Речка погрешность $\Delta h_{k=0,14}$ определения превышения, исправленного за стандартный коэффициент рефракции, удовлетворяет требованиям IV класса. На основании данных таблицы 3.2 можно сделать вывод о необходимости учета влияния вертикальной рефракции и низкой эффективности использования поправки за стандартный коэффициент рефракции.

Таблица 3.2 – Сравнение точности измеренных превышений и превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции, с допустимой погрешностью нивелирования IV класса

Линия	S , м	$\Delta h_{пред}$, мм	Δh , мм	$\Delta h_{k=0,14}$, мм
Родник - Речка	485,260	9,6	4,8	2,2
Родник - Костино	665,178	13,4	27,2	22,4
Родник - Швейцария	452,039	9,0	17,7	15,5

Для пяти измерительных уровней при наличии точек перелома из обработки можно исключить лишь крайние уровни – первый или пятый, исключение оставшихся уровней лишено смысла, т.к. изменение угла рефракции в расчетном слое воздуха должно быть однонаправленным.

Сделать вывод о наличии точек перелома и необходимости исключения из обработки первого или последнего уровня позволяет анализ тенденции изменения приращений угла рефракции с высотой. Значения измеренных приращений угла рефракции по каждой визирной линии представлены в таблице 3.3.

Согласно данным таблицы 3.3, на линии Родник - Речка общая тенденция уменьшения приращения рефракции с высотой несколько нарушается на четвертом измерительном уровне, как для $\delta r_{1 \rightarrow 4}$, так и для $\delta r_{2 \rightarrow 4}$. Однако, величина нарушения тенденции сопоставима с СКП измерения разности измеренных углов наклона. В связи с этим было принято решение об использовании полного набора градиентных измерений.

На линии Родник - Костино по величинам $\delta r_{1 \rightarrow 2}$ и $\delta r_{1 \rightarrow 3}$ обнаружен перелом атмосферной стратификации. При исключении первого уровня изменение знака приращения угла рефракции на остальных уровнях укладывается в тенденцию уменьшения приращения рефракции с высотой. На основании вышесказанного было принято решение об исключении из обработки первого уровня.

Таблица 3.3 – Измеренные приращения угла рефракции

Линия	Уровни	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{теор}}, ''$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{изм}}, ''$	$\delta r_{i \rightarrow j}, ''$
Родник - Речка	1-2	297,1	299,0	2,0
	1-3	594,4	594,1	-0,3
	1-4	891,5	890,0	-1,5
	1-5	1188,6	1187,5	-1,1
	2-3	297,3	295,1	-2,2
	2-4	594,4	591,0	-3,4
	2-5	891,6	888,5	-3,1
Родник - Костино	1-2	155,4	156,0	0,6
	1-3	310,1	312,9	2,8
	1-4	465,1	466,3	1,2
	1-5	620,5	620,6	0,1
	2-3	154,7	156,8	2,1
	2-4	309,7	310,3	0,6
	2-5	465,1	464,6	-0,5
Родник - Швейцария	1-2	228,3	227,5	-0,8
	1-3	456,2	459,0	2,8
	1-4	685,2	682,7	-2,5
	1-5	913,3	913,5	0,2
	2-3	227,9	231,5	-3,7
	2-4	456,9	455,2	1,6
	2-5	684,9	686,0	-1,1

На линии Родник - Швейцария обнаружено несколько изменений знака $\delta r_{i \rightarrow j}$. Указанные изменения однозначно свидетельствует о наличии слоистости, но исключение крайних уровней не приводит к улучшению результатов, так как существуют несколько точек перелома.

Таким образом, в данных условиях слоистость атмосферы была обнаружена на двух визирных линиях с наиболее развитым растительным покровом. Что подтверждает сформулированный выше вывод о влиянии растительного покрова на формирование слоистости атмосферной стратификации. Для подтверждения корректности исключения измерений, содержащих влияние слоистости атмосферы, решение задачи на каждой визирной линии выполнено для всех сочетаний измерительных уровней. Для этого по всем возможным наборам измерительных уровней было осуществлено определение коэффициента рефракции по алгоритму определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям [95], при этом использовался как равноточный, так и неравноточный вариант оценки случайной выборки пар параметров b и $z_{экв}$. Полученные значения коэффициентов рефракции сравнивались с истинными значениями коэффициентов рефракции, определенными по данным геометрического нивелирования. Результаты представлены в таблице 3.4.

В таблице 3.4 в третьем столбце указаны значения истинных коэффициентов рефракции $k_{ист}$, определенные по данным геометрического нивелирования; в четвертом и пятом столбцах – значения коэффициентов рефракции, определенные методом Монте-Карло, при использовании равноточного k [95] и неравноточного $k_{вес}$ [126] вариантов оценки случайной выборки пар параметров b и $z_{экв}$; в шестом и седьмом столбцах – истинные отклонения значений k и $k_{вес}$ от $k_{ист}$.

Анализируя таблицу 3.4 можно видеть, что использование неравноточного варианта оценки случайной выборки пар параметров b и $z_{экв}$ в подавляющем большинстве случаев обеспечивает превосходство в точности определения коэффициента рефракции в сравнении с равноточным вариантом. На основании чего можно сделать следующий вывод: учет весов отношений приращений угла рефракции позволяет повысить точность определения коэффициента рефракции.

Таблица 3.4 – Определение коэффициента рефракции по различным наборам результатов градиентных геодезических измерений

Визирная линия	Уровни	$k_{ист}$	k	$k_{вес}$	Δk	$\Delta k_{вес}$
Родник - Речка	1-5	0,25	0,27	0,23	0,02	-0,02
	2-5	0,60	0,58	0,58	-0,02	-0,02
	1-4	0,25	0,31	0,30	-0,06	-0,05
Родник - Костино	1-5	0,78	0,41	0,50	-0,37	-0,28
	2-5	0,84	0,71	0,73	-0,13	-0,11
	1-4	0,78	0,43	0,47	-0,35	-0,31
Родник - Швейцария	1-5	1,10	0,93	0,98	-0,17	-0,12
	2-5	1,00	1,00	1,02	0,00	0,02
	1-4	1,10	0,97	0,99	-0,13	-0,11

Исключение первого измерительного уровня на линии Родник - Костино позволило повысить точность опрвления коэффициента рефракции более, чем вдвое. На основании чего можно сделать вывод об эффективности использования тенденции изменения приращений угла рефракции с высотой в качестве объективного критерия обнаружения слоистости атмосферы в рабочем слое воздуха.

Далее, используя смоделированные значения коэффициентов рефракции, полученные при использовании неравноточного варианта оценки случайной выборки пар параметров b и $z_{эКВ}$ вводились поправки в результаты тригонометрического нивелирования по формуле (3.3)

$$h_k = h_{измер} - k \frac{\overline{D}^2}{2 \cdot R_{ср}}. \quad (3.3)$$

Сравнение исправленных за влияние вертикальной рефракции результатов одностороннего тригонометрического нивелирования h_k с допустимой погрешностью нивелирования IV класса приведено в таблице 3.5. В пятом столбце таблицы 3.5 жирным цветом обозначены решения по наборам с исключенной

слоистостью атмосферной стратификации. Таблица 3.5 дополнена последним столбцом, содержащим погрешности превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции.

Таблица 3.5 – Сравнение точности превышений, исправленных за определенный по разработанному алгоритму [95, 126] коэффициент рефракции, с допустимой погрешностью нивелирования IV класса

Линия	Уровни	S , м	$\Delta h_{\text{пред}}$, мм	Δh_k , мм	$\Delta h_{k=0,14}$, мм
Родник - Речка	1-5	485,260	9,6	0,5	2,2
	2-5	485,260		0,3	
	1-4	485,260		0,8	
Родник - Костино	1-5	665,178	13,4	9,9	22,4
	2-5	665,178		3,9	
	1-4	665,178		10,9	
Родник - Швейцария	1-5	452,039	9,0	2,0	15,5
	2-5	452,039		-0,3	
	1-4	452,039		1,8	

Данные таблицы 3.5 позволили сделать следующие выводы:

- во всех случаях использование значения коэффициента рефракции, смоделированного по разработанному автором алгоритму [95, 126], обеспечило точность одностороннего тригонометрического нивелирования, удовлетворяющую требованиям геометрического нивелирования IV класса;
- во всех случаях погрешность превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции, в несколько раз превышает погрешность, полученную при использовании предложенного автором подхода.

3.2.3 Выводы по результатам первого этапа полевых исследований

1. Разработанная процедура производства угловых измерений на нескольких уровнях обеспечивает оперативность и точность получения исходных данных, необходимых для определения коэффициента рефракции.
2. Выполненные полевые геодезические наблюдения и анализ полученных результатов доказали возможность использования тенденции изменения приращений угла рефракции с высотой в качестве объективного критерия обнаружения слоистости атмосферы в рабочем слое воздуха.
3. Учет весов отношений приращений рефракции при оценке случайной выборки пар параметров b и $z_{э\kappa\theta}$ позволяет повысить точность определения коэффициента рефракции.
4. Выполненная оценка точности превышений, исправленных за влияние рефракции с помощью разработанного автором алгоритма, показала соответствие полученных результатов требованиям геометрического нивелирования IV класса.
5. При реализации предлагаемой методики с точностью IV класса возможно использование электронных тахеометров, характеризующихся точностью измерения вертикального угла $2''$ при выполнении градиентных геодезических измерений на пяти и более измерительных уровнях семью полными приемами.
6. Использование поправки за стандартный коэффициент рефракции не обеспечивает производство тригонометрического нивелирования с точностью IV класса геометрического нивелирования и выше.

3.3 Второй этап полевых исследований

На втором этапе полевых исследований решены задачи 1 и 3 (применительно к требованиям точности III класса геометрического нивелирования), 4 и 7 [126].

3.3.1 Описание эксперимента на территории Чеховского района Московской области

Экспериментальный полигон, созданный на первом этапе полевых исследований, представлял собой пересеченную местность, поросшую травянистой растительностью, на всех трассах и измерительных уровнях средневзвешенная высота визирного луча была значительной (8,5 м и выше). Второй полевой эксперимент нацелен на оценку работоспособности разрабатываемой методики в различных условиях – над различными типами ПП и в другом диапазоне средних высот визирного луча.

На территории Чеховского района Московской области был создан экспериментальный полигон. Схема полигона представлена на рисунке 3.4.

Линия Б1–Б2 проходит над бетонной дорогой, линия О1–О2 над водной поверхностью, линия Р1–Р2 над растительностью вдоль обочины грунтовой дороги. Таким образом были охвачены основные типы ПП средней полосы России.

Предварительно по каждой визирной линии было выполнено геометрическое нивелирование по программе II класса, для чего использовался комплект оборудования, состоящий из цифрового нивелира Trimble Dini 22, характеризуемого точностью измерения превышения 0,7 миллиметров на километр двойного хода, и инварной рейки LD 12.

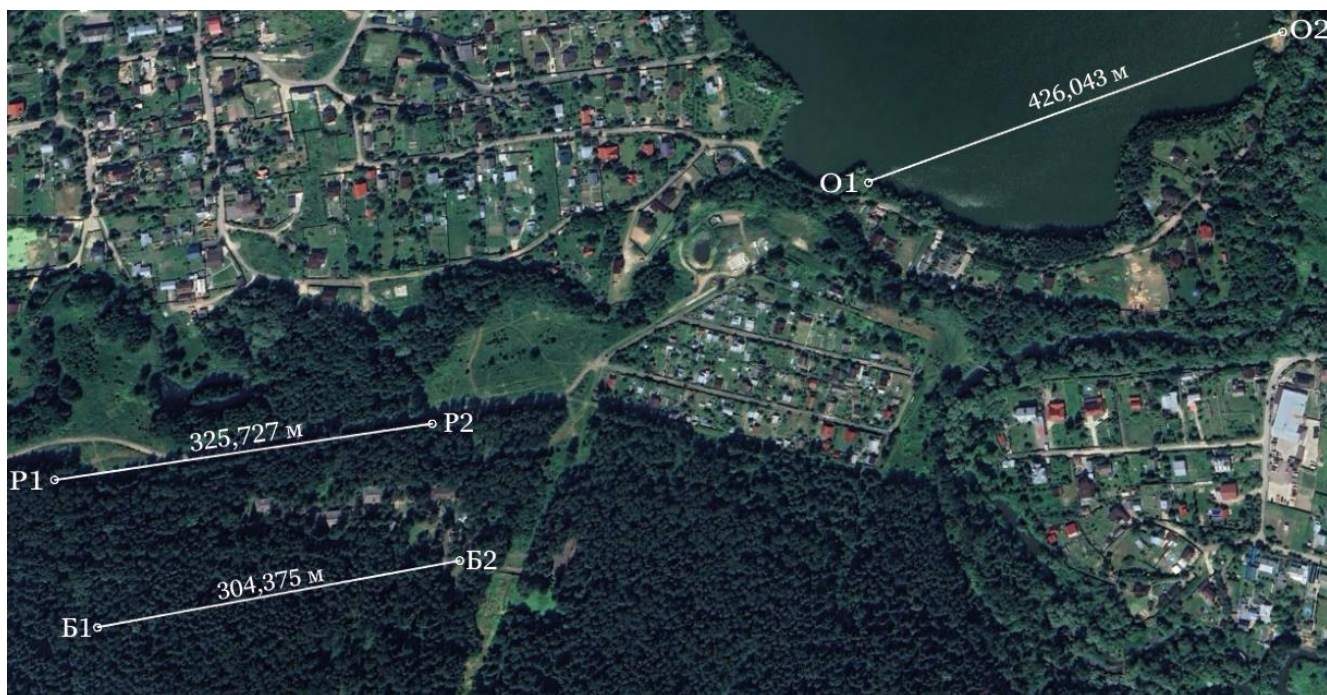


Рисунок 3.4 — Схема экспериментального полигона на территории Чеховского района Московской области

Характеристики визирных линий экспериментального полигона представлены в таблице 3.6. В таблице 3.6 во втором столбце указаны значения горизонтальных приложений, в третьем – результаты геометрического нивелирования II класса, в четвертом – средневзвешенная высота визирного луча над ПП на нижнем измерительном уровне, в пятом – характеристика ПП.

Согласно предрасчету, представленному в подразделе 2.3, предлагаемая методика обеспечивает точность III класса геометрического нивелирования при выполнении градиентных геодезических измерений электронным тахеометром с точностью измерения вертикального угла $0,5''$ четырьмя полными приемами. Однако, было показано, что при увеличении количества измерительных уровней можно воспользоваться менее точными инструментами. На основании вышесказанного для измерений использовался электронный тахеометр Leica geosystems tc1201, характеризуемый точностью измерения вертикального угла $1''$. Измерения производились восемью полными приемами на одиннадцати измерительных уровнях с разностью высот между ними $0,25$ метра по описанной в подразделе 2.4 процедуре производства угловых измерений на нескольких уровнях.

Использование малой разности высот между измерительными уровнями позволило получить детальную информацию об атмосферной стратификации в рабочем слое воздуха, а значительное количество избыточных измерительных уровней (семь) позволило выявить необходимое количество последних для получения точности геометрического нивелирования III класса.

Таблица 3.6 – Основные характеристики линий экспериментального полигона на территории Заокского района Тульской области.

Линия	S, м	$h_{\text{геом}}$, м	$z_{\text{ср}}$, м	Характеристика ПП
1	2	3	4	5
Б1–Б2	304,375	1,6799	0,776	Бетонная дорога. Вблизи наблюдаемой точки визирный луч проходит в непосредственной близости от ПП, минимальная высота визирного луча над ПП –17 см
О1–О2	426,043	-0,1328	4,113	Водная поверхность
Р1–Р2	325,727	-2,7696	1,507	Полевая растительность высотой около 1,0 м

На рисунке 3.5 представлены продольные профили рельефа по каждой визирной линии.

В качестве визирной цели использовалась вежа с наклеенными светоотражательными марками. Вежа закреплялась в рабочем положении с помощью трипода. Поправка за рефракцию, автоматически вводимая электронным тахеометром, обнулялась.

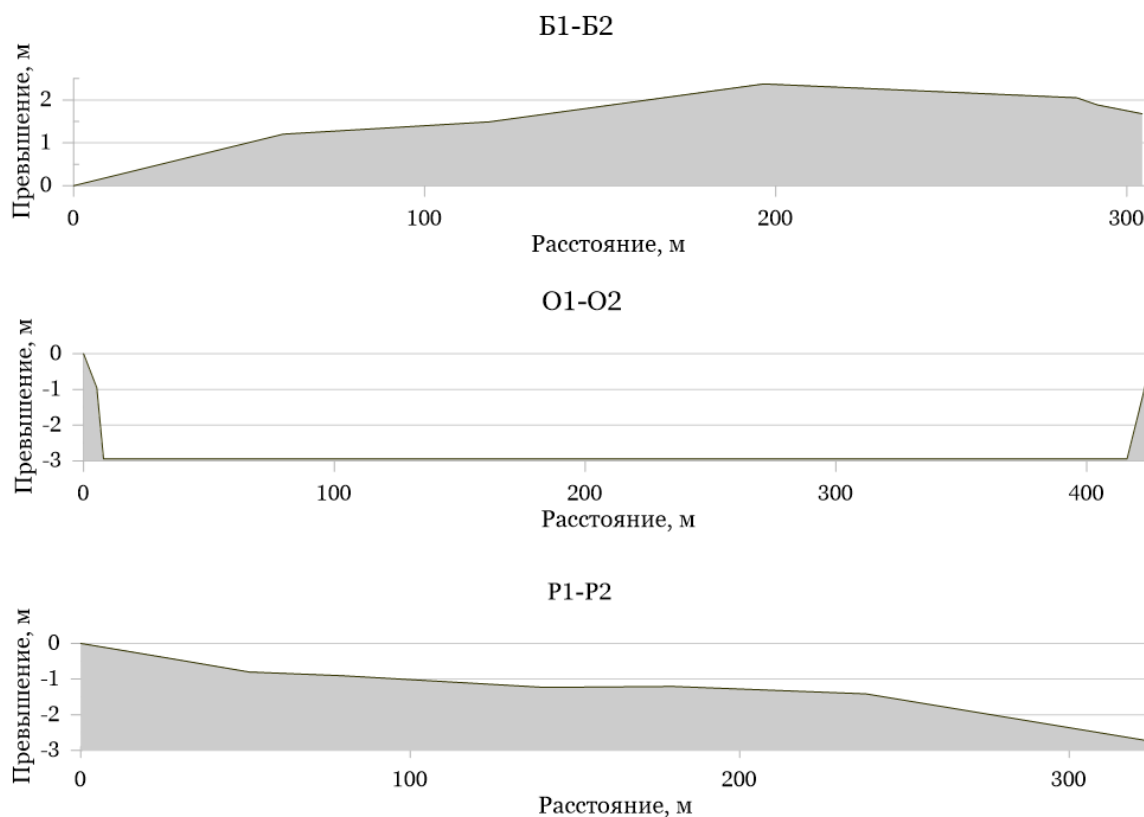


Рисунок 3.5 – Профили рельефа вдоль визирных линий на территории Чеховского района Московской области

Измеренные превышения были проанализированы на предмет соответствия точности III класса. Далее в полученные превышения вводилась поправка за стандартный коэффициент рефракции (0,14) и повторно осуществлялся анализ точности, что позволило оценить эффективность использования стандартного коэффициента рефракции при одностороннем тригонометрическом нивелировании в данных условиях. После чего результаты градиентных геодезических измерений анализировались на предмет слоистости атмосферы, обусловленной наличием точек перелома вертикального профиля стратификации атмосферы. В случае обнаружения слоистости результаты измерений, содержащие ее влияние, исключались. Далее был реализован алгоритм определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям [95, 126] для наборов измерительных уровней, не содержащих переломов атмосферной стратификации, и полных наборов измерительных уровней в трех комбинациях: нижние 7 уровней,

нижние 9 уровней и все 11 уровней. Последнее осуществлялось с целью определения достаточного количества избыточных измерительных уровней для компенсации влияния переломов атмосферной стратификации. Полученные значения коэффициента рефракции по всем рассматриваемым наборам измерительных уровней сравнивались с истинным значением коэффициента рефракции, определенным по результатам геометрического нивелирования. После чего осуществлялся анализ точности решения в зависимости от количества измерительных уровней и результирующего приращения рефракции (для наборов измерительных уровней, не содержащих переломов атмосферной стратификации). Смоделированные значения коэффициента рефракции использовались для введения поправки в превышения, измеренные на нижних в рассматриваемых наборах измерительных уровнях. Превышения, исправленные за влияние вертикальной рефракции, анализировались на предмет соответствия точности геометрического нивелирования III класса.

3.3.2 Результаты второго этапа полевых исследований

Время работы на станции колебалось в пределах от 26 до 31 минут, что подтвердило заявленную скорость реализации (оперативность) процедуры производства градиентных геодезических измерений. Увеличение временных затрат в сравнении с экспериментом, выполненным на первом этапе полевых исследований, обусловлено бóльшим количеством измерительных уровней (11 против 5) и полных приемов (8 против 7).

Превышения между исходными и определяемыми пунктами $h_{\text{измер}}$ вычислялись по формуле (3.1), ввод поправки за стандартный коэффициент рефракции выполнялся по формуле (3.2).

Результаты сравнения точности измеренных превышений и превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции, с допустимой погрешностью нивелирования III класса представлены в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Сравнение точности измеренных превышений и превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции, с допустимой погрешностью нивелирования III класса

Линия	S , м	$\Delta h_{\text{пред}}$, мм	Δh , мм	$\Delta h_{k=0,14}$, мм
Б1–Б2	304,375	5,5	11,5	10,5
О1–О2	426,043	6,5	3,4	1,4
Р1–Р2	325,727	5,7	10,9	9,8

Согласно таблице 3.7, на всех визирных линиях, кроме О1–О2, истинные отклонения измеренных превышений Δh превысили величину допустимой погрешности для III класса геометрического нивелирования $\Delta h_{\text{пред}}$. Получение большей точности на линии О1–О2 можно объяснить значительной высотой визирного луча над ПП (более 4 метров) и меньшим влиянием угловой рефракции, что характерно для линий, проходящих над водной поверхностью. Кроме того, следует отметить, что на линии О1–О2 высота визирного луча над ПП и тип ПП практически не менялись, т.е. на протяжении всей трассы визирный луч проходил в одинаковых условиях. Введение поправки за стандартный коэффициент рефракции во всех случаях привело к повышению точности тригонометрического нивелирования. Однако на линиях Б1–Б2 и Р1–Р2 истинные отклонения превышения, исправленного за стандартный коэффициент рефракции $\Delta h_{k=0,14}$, не укладываются в величину допустимой погрешности $\Delta h_{\text{пред}}$, на основании чего можно сделать вывод о низкой эффективности использования поправки за стандартный коэффициент рефракции.

Анализ слоистости осуществлялся путем последовательного исключения нижних визирных уровней. Каждая из рассматриваемых совокупностей измеренных приращений вертикальной рефракции проверялась на наличие набора из четырех, как минимум, последовательных, свободных от наличия переломов атмосферной стратификации уровней.

Результат анализа слоистости на каждой визирной линии представлен в таблицах 3.8-3.10. В таблицах 3.8-3.10 в третьем и четвертом столбцах показаны

измеренные и теоретические разности углов наклона ν , соответственно, в пятом столбце – вычисленные приращения угла рефракции δr . Для наглядности в пятом столбце стрелками показаны направления изменений значений δr с высотой – синим цветом обозначено увеличение значений δr с высотой, оранжевым – уменьшение значений δr с высотой.

Результат анализа слоистости на линии Б1–Б2 представлен в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Анализ атмосферной стратификации рабочего слоя воздуха на визирной линии Б1–Б2

Набор измерительных уровней	$i \rightarrow j$	$(\Delta \nu_{i \rightarrow j})_{\text{изм}}, ''$	$(\Delta \nu_{i \rightarrow j})_{\text{теор}}, ''$	$\delta r_{i \rightarrow j}, ''$
1-11	1-2	176,2	174,8	1,4
	1-3	360,9	359,2	1,7
	1-4	535,2	532,0	3,2
	1-5	702,0	705,4	-3,5
	1-6	878,2	874,8	3,4
	1-7	1044,1	1044,9	-0,8
	1-8	1216,0	1216,4	-0,4
	1-9	1384,9	1387,8	-2,9
	1-10	1558,8	1559,9	-1,1
	1-11	1732,0	1733,4	-1,3
2-11	2-3	184,7	184,3	0,4
	2-4	359,0	357,1	1,9
	2-5	525,8	530,6	-4,8
	2-6	702,0	700,0	2,0
	2-7	867,9	870,1	-2,2
	2-8	1039,8	1041,5	-1,7
	2-9	1208,7	1213,0	-4,2
	2-10	1382,6	1385,1	-2,5
	2-11	1555,8	1558,5	-2,7
3-11	3-4	174,3	172,8	1,5
	3-5	341,1	346,3	-5,2
	3-6	517,3	515,7	1,6
	3-7	683,3	685,8	-2,5
	3-8	855,1	857,2	-2,1
	3-9	1024,1	1028,6	-4,6
	3-10	1197,9	1200,8	-2,9
	3-11	1371,1	1374,2	-3,1

Продолжение таблицы 3.8

Набор измерительных уровней	$i \rightarrow j$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{изм}}, ''$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{теор}}, ''$	$\delta r_{i \rightarrow j}, ''$
4-11	4-5	166,8	173,5	-6,7
	4-6	343,0	342,9	0,2
	4-7	509,0	513,0	-4,0
	4-8	680,8	684,4	-3,6
	4-9	849,8	855,8	-6,1
	4-10	1023,6	1028,0	-4,4
	4-11	1196,9	1201,4	-4,6
5-11	5-6	176,2	169,4	6,8
	5-7	342,2	339,5	2,7
	5-8	514,0	510,9	3,1
	5-9	683,0	682,4	0,6
	5-10	856,8	854,5	2,3
	5-11	1030,1	1028,0	2,1
6-11	6-7	165,9	170,1	-4,2
	6-8	337,8	341,5	-3,8
	6-9	506,7	513,0	-6,2
	6-10	680,6	685,1	-4,5
	6-11	853,8	858,5	-4,7
7-11	7-8	171,8	171,4	0,4
	7-9	340,8	342,9	-2,1
	7-10	514,6	515,0	-0,4
	7-11	687,9	688,5	-0,6
8-11	8-9	169,0	171,4	-2,5
	8-10	342,8	343,6	-0,8
	8-11	516,1	517,0	-1,0

Анализируя таблицу 3.8 можно видеть, что полный набор измерительных уровней (1-11) содержит целый ряд переломов атмосферной стратификации на верхних измерительных уровнях (от четвертого и выше). Из полного набора измерительных уровней можно выделить набор 1-4, свободный от переломов атмосферной стратификации. Из наборов измерительных уровней 2-11, 3-11, 4-11 и 7-11 невозможно выделить набор, свободный от переломов атмосферной стратификации. Из наборов 5-11 и 6-11 возможно выделить наборы измерительных уровней 5-9 и 6-9, так как перелом между 7-м и 8-м уровнями можно проигнорировать, поскольку его величина (0,4'') сопоставима с погрешностью измерения δr . Использование набора 6-9 нерационально, так как набор 5-9 более полный и характеризуется наибольшим приращением δr с высотой (6,2''). Также

возможно использовать набор измерительных уровней 8-11, так как перелом между 10 и 11 уровнями можно проигнорировать, поскольку его величина (0,2") сопоставима с погрешностью измерения δr .

Таким образом, в результате анализа атмосферной стратификации рабочего слоя воздуха на линии Б1–Б2 рационально выделить три свободные от влияния слоистости набора измерительных уровней: 1-4 (приращение δr с высотой 1,8"), 5-9 (приращение δr с высотой 6,2"), 8-11 (приращение δr с высотой 1,5").

Результат анализа слоистости на линии О1–О2 представлен в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Анализ атмосферной стратификации рабочего слоя воздуха на визирной линии О1–О2

Набор измерительных уровней	$i \rightarrow j$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{изм}}, "$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{теор}}, "$	$\delta r_{i \rightarrow j}, "$
1-11	1-2	122,8	121,0	1,8
	1-3	245,2	242,1	3,2
	1-4	366,9	363,1	3,8
	1-5	518,9	518,0	0,9
	1-6	647,6	639,1	8,5
	1-7	761,9	760,1	1,8
	1-8	885,4	881,1	4,3
	1-9	1037,9	1036,1	1,8
	1-10	1165,1	1157,1	8,0
	1-11	1287,9	1278,1	9,8
2-11	2-3	122,4	121,0	1,3
	2-4	244,0	242,1	2,0
	2-5	396,1	397,0	-0,9
	2-6	524,8	518,0	6,7
	2-7	639,0	639,1	0,0
	2-8	762,6	760,1	2,5
	2-9	915,1	915,0	0,0
	2-10	1042,3	1036,1	6,2
	2-11	1165,1	1157,1	8,0
3-11	3-4	121,6	121,0	0,6
	3-5	273,7	276,0	-2,2
	3-6	402,4	397,0	5,4
	3-7	516,7	518,0	-1,4
	3-8	640,2	639,1	1,2
	3-9	792,7	794,0	-1,3
	3-10	919,9	915,0	4,8
	3-11	1042,7	1036,1	6,7

Продолжение таблицы 3.9

Набор измерительных уровней	$i \rightarrow j$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{изм}}, "$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{теор}}, "$	$\delta r_{i \rightarrow j}, "$
4-11	4-5	152,1	154,9	-2,9
	4-6	280,7	276,0	4,8
	4-7	395,0	397,0	-2,0
	4-8	518,6	518,0	0,5
	4-9	671,0	673,0	-1,9
	4-10	798,2	794,0	4,2
	4-11	921,1	915,0	6,0
5-11	5-6	128,7	121,0	7,6
	5-7	242,9	242,1	0,9
	5-8	366,5	363,1	3,4
	5-9	519,0	518,0	0,9
	5-10	646,1	639,1	7,1
	5-11	769,0	760,1	8,9
6-11	6-7	114,3	121,0	-6,8
	6-8	237,8	242,1	-4,2
	6-9	390,3	397,0	-6,7
	6-10	517,5	518,0	-0,5
	6-11	640,3	639,1	1,3
7-11	7-8	123,6	121,0	2,5
	7-9	276,0	276,0	0,1
	7-10	403,2	397,0	6,2
	7-11	526,1	518,0	8,0
8-11	8-9	152,5	154,9	-2,5
	8-10	279,7	276,0	3,7
	8-11	402,5	397,0	5,5

Анализируя таблицу 3.9 можно видеть, что полный набор измерительных уровней (1-11) содержит целый ряд переломов атмосферной стратификации на верхних измерительных уровнях (от четвертого и выше). Из полного набора измерительных уровней можно выделить только набор 1-4, свободный от переломов атмосферной стратификации. Из наборов измерительных уровней 2-11, 3-11, 4-11, 5-11, 6-11 и 7-11 невозможно выделить набор, свободный от переломов атмосферной стратификации. Набор измерительных уровней 8-11 не содержит переломов атмосферной стратификации, следовательно, его использование оправдано.

Таким образом, в результате анализа атмосферной стратификации рабочего слоя воздуха на линии О1–О2 возможно выделить два свободных от влияния

слоистости набора измерительных уровней: 1-4 (приращение δr с высотой 3,8") и 8-11 (приращение δr с высотой 8,0").

Результат анализа слоистости на линии P1–P2 представлен в таблицах 3.10.

Таблица 3.10 – Анализ атмосферной стратификации рабочего слоя воздуха на визирной линии P1–P2

Набор измерительных уровней	$i \rightarrow j$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{изм}}, "$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{теор}}, "$	$\delta r_{i \rightarrow j}, "$
1-11	1-2	159,1	158,3	0,8
	1-3	318,5	316,6	1,9
	1-4	476,1	474,9	1,2
	1-5	679,7	677,6	2,2
	1-6	841,6	835,9	5,8
	1-7	997,2	994,2	3,0
	1-8	1153,4	1152,5	0,9
	1-9	1358,3	1355,1	3,2
	1-10	1516,5	1513,4	3,1
	1-11	1678,8	1671,7	7,0
2-11	2-3	159,4	158,3	1,1
	2-4	317,0	316,6	0,4
	2-5	520,6	519,2	1,4
	2-6	682,5	677,6	5,0
	2-7	838,1	835,9	2,3
	2-8	994,3	994,2	0,1
	2-9	1199,2	1196,8	2,4
	2-10	1357,4	1355,1	2,3
	2-11	1519,7	1513,4	6,2
3-11	3-4	157,6	158,3	-0,7
	3-5	361,2	360,9	0,3
	3-6	523,1	519,3	3,9
	3-7	678,7	677,6	1,2
	3-8	834,9	835,9	-1,0
	3-9	1039,8	1038,5	1,3
	3-10	1198,0	1196,8	1,2
	3-11	1360,3	1355,1	5,1
4-11	4-5	203,6	202,6	1,0
	4-6	365,5	360,9	4,6
	4-7	521,1	519,3	1,9
	4-8	677,3	677,6	-0,3
	4-9	882,2	880,2	2,0
	4-10	1040,4	1038,5	1,9
	4-11	1202,7	1196,8	5,8

Продолжение таблицы 3.10

Набор измерительных уровней	$i \rightarrow j$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{изм}}, "$	$(\Delta v_{i \rightarrow j})_{\text{теор}}, "$	$\delta r_{i \rightarrow j}, "$
5-11	5-6	161,9	158,3	3,6
	5-7	317,5	316,6	0,9
	5-8	473,7	474,9	-1,3
	5-9	678,6	677,6	1,0
	5-10	836,8	835,9	0,9
	5-11	999,0	994,2	4,8
6-11	6-7	155,6	158,3	-2,7
	6-8	311,8	316,6	-4,9
	6-9	516,7	519,3	-2,6
	6-10	674,9	677,6	-2,7
	6-11	837,1	835,9	1,2
7-11	7-8	156,2	158,3	-2,1
	7-9	361,1	360,9	0,2
	7-10	519,3	519,3	0,0
	7-11	681,5	677,6	4,0
8-11	8-9	204,9	202,6	2,3
	8-10	363,1	360,9	2,2
	8-11	525,4	519,3	6,1

Анализируя таблицу 3.10 можно видеть, что из наборов 1-11, 2-11, 3-11 можно выделить наборы 1-6, 2-6 и 3-6, соответственно. Здесь возможно проигнорировать перелом между 3 и 4 уровнями, поскольку его величина (0,7") сопоставима с погрешностью измерения δr . Из выявленных вариантов, очевидно, следует использовать набор 1-6, как наиболее полный и обладающий наибольшим приращением δr с высотой (5,0"). Из наборов измерительных уровней 4-11 и 6-11 невозможно выделить набор, свободный от переломов атмосферной стратификации. Из набора 5-11 был выделен набор измерительных уровней 5-8, свободный от переломов атмосферной стратификации. Также допустимо использование наборов измерительных уровней 7-11 и 8-11. Здесь возможно проигнорировать перелом между 9-м и 10-м уровнями, поскольку его величина (0,2") сопоставима с погрешностью измерения δr . Из наборов 7-11 и 8-11, очевидно, следует использовать набор 7-11, как наиболее полный и обладающий наибольшим приращением δr с высотой (6,1").

Таким образом, в результате анализа атмосферной стратификации рабочего слоя воздуха на линии Р1–Р2 рационально выделить три свободных от влияния слоистости набора измерительных уровней: 1-6 (приращение δr с высотой 5,0"), 5-8 (приращение δr с высотой 4,9") и 7-11 (приращение δr с высотой 6,1").

Определение коэффициента рефракции было выполнено по всем выделенным наборам измерительных уровней, свободным от влияния переломов атмосферной стратификации, а также по трем более полным комбинациям измерительных уровней: нижние 7 уровней, нижние 9 уровней и все 11 уровней. Последние реализованы с целью определения достаточного количества избыточных измерительных уровней для компенсации влияния переломов атмосферной стратификации. Результат определения коэффициента рефракции по выделенным наборам градиентных геодезических измерений представлен в таблице 3.11. В таблице 3.11 во втором столбце представлены выделенные наборы измерительных уровней, на которых производились градиентные геодезические измерения; в третьем столбце – истинные значения коэффициентов рефракции на нижних уровнях рассматриваемых наборов $k_{ист}$, вычисленные по результатам геометрического нивелирования; в четвертом столбце – результаты моделирования коэффициента рефракции $k_{мод}$; в пятом столбце – истинные отклонения определенных коэффициентов рефракции от их истинных значений Δ_k .

Таблица 3.11 – Определение коэффициента рефракции на выделенных наборах измерительных уровней

Визирная линия	Наборы уровней	$k_{ист}$	$k_{мод}$	Δ_k
Б1–Б2	1-4	1,58	0,31	-1,27
	5-9	0,88	0,82	-0,06
	8-11	1,51	0,26	-1,25
	1-7	1,58	0,77	-0,81
	1-9	1,58	0,84	-0,74
	1-11	1,58	0,91	-0,67

Продолжение таблицы 3.11

Визирная линия	Наборы уровней	$k_{уст}$	$k_{мод}$	Δ_k
O1–O2	1-4	0,24	0,35	0,11
	8-11	0,86	0,51	-0,35
	1-7	0,24	0,34	0,10
	1-9	0,24	0,34	0,10
	1-11	0,24	0,32	0,08
P1–P2	1-6	1,31	0,66	-0,65
	5-8	1,73	0,44	-1,29
	7-11	1,89	0,37	-1,52
	1-7	1,31	0,73	-0,58
	1-9	1,31	0,74	-0,57
	1-11	1,31	0,84	-0,47

Анализируя таблицу 3.11, можно увидеть, что в подавляющем большинстве случаев точность решения по полным наборам измерительных уровней (1-7, 1-9, 1-11) превосходит точность решения по наборам измерительных уровней, свободным от влияния слоистости атмосферной стратификации, единственное исключение получено по набору измерительных уровней 5-9 на визирной линии B1–B2. Также можно видеть, что для наборов 1-7, 1-9, 1-11 с увеличением числа измерительных уровней точность определения коэффициента рефракции возрастает (на всех визирных линиях, без исключений). На основании вышесказанного был сделан вывод о возможности минимизации влияния слоистости атмосферной стратификации за счет увеличения количества избыточных измерительных уровней.

Далее в измеренные превышения вводилась поправка за полученные коэффициенты рефракции по формуле (3.3). Результаты сравнения истинных отклонений превышений, исправленных за коэффициент рефракции, определенный по представленному в подразделе 2.3 алгоритму Δh_k с допустимой погрешностью нивелирования III класса $\Delta h_{пред}$ представлены в таблице 3.12. Таблица 3.12 дополнена истинными отклонениями превышений, исправленных за

стандартный коэффициент рефракции $\Delta h_{k=0,14}$, что позволило оценить точность предлагаемой методики по сравнению с использованием поправки за стандартный коэффициент рефракции 0,14.

Таблица 3.12 – Оценка точности превышений, исправленных с использованием смоделированного коэффициента рефракции по всем выделенным наборам измерительных уровней

Линия	Уровни	S, м	$\Delta h_{\text{пред}}$, мм	Δh_k , мм	$\Delta h_{k=0,14}$, мм
Б1–Б2	1-4	304,375	5,5	9,3	10,5
	5-9			0,03	
	8-11			9,2	
	1-7			5,9	
	1-9			5,4	
	1-11			4,9	
О1–О2	1-4	426,043	6,5	-1,6	1,4
	8-11			5,0	
	1-7			-1,5	
	1-9			-1,5	
	1-11			-1,2	
Р1–Р2	1-6	325,727	5,7	5,4	9,8
	5-8			10,7	
	7-11			12,7	
	1-7			4,9	
	1-9			4,8	
	1-11			3,9	

Анализируя таблицу 3.12, можно увидеть, что точность решения по наборам измерительных уровней, свободным от слоистости атмосферной стратификации, в половине случаев не отвечает точности III класса геометрического нивелирования,

в частности, решения по наборам 1-4 и 8-11 на линии Б1-Б2 и наборам 5-8 и 7-11 на линии Р1-Р2; последнее объясняется отсутствием избыточных измерений и малой разностью высот в указанных наборах. В то же время, решение по наборам с максимальным количеством избыточных измерений 1-9 и 1-11 обеспечивает точность III класса геометрического нивелирования на всех визирных линиях. Также можно видеть, что точность превышений, исправленных за коэффициенты рефракции, определенные по полным наборам измерительных уровней (1-11), во всех случаях выше точности превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции.

Однако, необходимо сделать важное замечание: возможность использования набора из 9-11 измерительных уровней в полевых условиях присутствует далеко не всегда, в случае наличия древесной и/или травяной растительности, неровностей рельефа, элементов построек, частично перекрывающих видимость визирных целей, число измерительных уровней будет ограничено. В указанных условиях анализ атмосферной стратификации рабочего слоя воздуха является ключевой задачей, позволяющей существенно повысить точность определения значения коэффициента рефракции. Это подтверждается тем, что решение по каждому набору измерительных уровней, свободному от слоистости атмосферной стратификации, за исключение набора 7-11 на линии Р1-Р2 обеспечивает точность IV класса геометрического нивелирования, кроме того на каждой визирной линии удалось выявить как минимум один набор из 4-6 измерительных уровней, обеспечивающий точность III класса геометрического нивелирования.

В общем же случае, при невозможности обеспечения достаточного числа избыточных измерительных уровней (5-7) задача решается путем использования электронного тахеометра с точностью измерения вертикального угла в 0,5" при обязательном анализе атмосферной стратификации рабочего слоя воздуха.

Таким образом, на основании таблицы 3.12 можно сделать следующие выводы:

— Предложенная методика учета влияния ВР обеспечивает точность геометрического нивелирования III класса для всего представленного спектра

подстилающих поверхностей и диапазона высот при использовании наборов измерительных уровней 1-9 и 1-11.

- На всех визирных линиях точность повышается при увеличении количества измерительных уровней, взятых в обработку, что объясняется увеличением числа избыточных измерений.
- В случае невозможности обеспечения достаточного числа избыточных измерительных уровней (5-7) задача решается путем использования электронного тахеометра с точностью измерения вертикального угла в $0,5''$ при обязательном анализе слоистости атмосферной стратификации рабочего слоя воздуха, что позволит существенно повысить точность определения значения коэффициента рефракции.
- Во всех случаях СКП превышений, исправленных за коэффициенты рефракции, определенные по полным наборам измерительных уровней выше точности превышений, исправленных за стандартный коэффициент рефракции. На двух визирных линиях из трех превосходство в точности более чем вдвое.

3.3.3 Выводы по результатам второго этапа полевых исследований

1. Методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании обеспечивает точность геометрического нивелирования III класса для основных подстилающих поверхностей средней полосы России сезона массовых геодезических измерений.

2. При реализации предлагаемой методики с точностью III класса возможно использование электронных тахеометров, характеризующихся точностью измерения вертикального угла $1''$, при выполнении градиентных геодезических измерений на не менее чем девяти измерительных уровнях в восемь полных приемов.

3. Использование поправки за стандартный коэффициент рефракции не обеспечивает производство тригонометрического нивелирования с точностью III класса геометрического нивелирования и точнее.

3.4 Формирование требований к реализации методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании

Результаты представленных в диссертационной работе и в публикациях [95, 127, 126] аналитических и полевых исследований позволили сформировать методику учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании. Требования к реализации методики представлены в таблице 3.13.

Таблица 3.13 – Требования к реализации методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании

Параметр	Класс точности нивелирования			
	III		IV	
Точность измерения вертикального угла одним приемом, не ниже, "	0,5	1	1	2
Рекомендуемое предельное расстояние до визирной цели, не более, м	500	500	1000	1000
Количество полных приемов, не менее	4	8	4	7
Рекомендуемое превышение между соседними визирными целями, м	0,25-0,5	0,25-0,5	0,25-0,5	0,25-0,5
Рекомендуемое количество уровней, не менее	5	9	5	5
Точность измерения разности высот между измерительными уровнями, мм	1	1	1	1

Разработанная методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании обеспечивает:

- получение превышений методом одностороннего тригонометрического нивелирования с точностью геометрического нивелирования III и IV класса;
- производство измерений на одной визирной линии в течение 30 минут и менее, что много меньше времени, затрачиваемого на проложение хода геометрического нивелирования III и IV класса;
- минимизацию финансовых затрат за счет использования только стандартного геодезического оборудования;
- работоспособность для всего рассмотренного спектра подстилающих поверхностей и высот визирного луча;
- простоту освоения за счет применения более простого в сравнении с нелинейным методом наименьших квадратов, но не менее эффективного алгоритма решения исходной системы нелинейных алгебраических уравнений, основанного на математическом методе Монте-Карло.

Таким образом, разработанная методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании обеспечивает соответствие всем сформулированным критериям оценки эффективности методик учета и ослабления влияния вертикальной рефракции.

3.5 Выводы по главе 3

1. Выполнена апробация разработанной методики учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании на территории двух экспериментальных полигонов. В результате экспериментально подтверждено, что:

- разработанная процедура производства угловых измерений на нескольких уровнях обеспечивает оперативность и точность получения исходных данных, необходимых для определения коэффициента рефракции;

- использование тенденции изменения приращений угла рефракции с высотой в качестве объективного критерия обнаружения слоистости атмосферы в рабочем слое воздуха эффективно;
- учет весов отношений приращений рефракции при оценке случайной выборки пар параметров b и $z_{э\kappa\delta}$ позволяет повысить точность определения коэффициента рефракции;
- при увеличении количества измерительных уровней можно снизить требования к точности измерительных инструментов, так, при реализации предлагаемой методики с точностью III можно использовать электронный тахеометр с точностью измерения вертикальных углов 1" при выполнении градиентных геодезических измерений на девяти и более измерительных уровнях восемью полными приемами. Для обеспечения точности IV класса можно использовать электронные тахеометры с точностью измерения вертикальных углов 2" при выполнении градиентных геодезических измерений на пяти и более измерительных уровнях семью полными приемами.
- разработанная методика обеспечивает точность геометрического нивелирования III-IV класса для основных подстилающих поверхностей средней полосы России сезона массовых геодезических измерений.

2. В результате анализа данных, полученных при выполнении полевых экспериментов, сформированы условия реализации методики, обеспечивающие необходимую точность, включающие в себя требования к точности измерительных инструментов, предельное расстояние до визирной цели, количество полных приемов, рекомендуемое превышение между соседними визирными целями, рекомендуемое количество уровней, точность измерения разности высот между измерительными уровнями.

3. Полевые эксперименты и их результаты подтвердили соответствие разработанной методики всем заявленным критериям эффективности методик учета и ослабления влияния вертикальной рефракции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным **итогом** проведенного исследования является разработанная методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании, обладающая следующими преимуществами:

- определение превышений методом одностороннего тригонометрического нивелирования с точностью геометрического нивелирования III и IV класса;
- время производства измерений на станции не превышает 30 минут, что много меньше времени, затрачиваемого на проложение хода геометрического нивелирования III-го или IV-го класса;
- минимизация финансовых затрат за счет использования только стандартного геодезического оборудования;
- работоспособность для различных высот визирного луча и широкого спектра подстилающих поверхностей, характерных для средней полосы России;
- простота освоения за счет применения более простого в сравнении с методом наименьших квадратов, но не менее эффективного, алгоритма решения исходной системы нелинейных алгебраических уравнений, основанного на математическом методе Монте-Карло.

Итогами исследования так же являются следующие научные результаты:

- Предложены критерии эффективности существующих и разрабатываемых методик тригонометрического нивелирования с учетом влияния вертикальной рефракции, позволяющие выполнять их объективную оценку по признаку сбалансированности затрат на учет влияния вертикальной рефракции и соответствующего повышения точности.
- Выявлены факторы формирования вертикальной рефракции в рабочем слое воздуха, подлежащие учету при реализации одностороннего тригонометрического нивелирования: контроль точек перелома температурной стратификации; изменение типа подстилающей поверхности вдоль линии визирования; изменение высоты визирного луча над подстилающей поверхностью.

- Разработан алгоритм определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям, основанный на математическом методе Монте-Карло (weighted importance sampling), позволяющий надежно определять результирующие для трассы параметры атмосферы в рабочем слое воздуха.
- Теоретически и экспериментально обоснованно использование тенденции изменения приращений рефракции с высотой в качестве объективного критерия обнаружения слоистости атмосферы в рабочем слое воздуха.
- Разработана процедура производства угловых измерений на нескольких уровнях, обеспечивающая увеличение скорости производства угловых измерений за счет использования предложенной оригинальной конструкции визирной цели.

Результаты выполненного диссертационного исследования могут быть **рекомендованы** к внедрению в геодезическое производство в качестве основного способа выполнения высотных определений методом тригонометрического нивелирования с точностью геометрического нивелирования III-IV классов при создании высотных сетей сгущения и специальных сетей, а также некоторых других видах геодезических работ.

По мнению автора, **перспективы** дальнейшего развития предложенного подхода к учету влияния вертикальной рефракции заключаются во включении разработанного алгоритма в стандартное программное обеспечение электронных тахеометров; создании визирной цели (телескопической вехи или рейки) с возможностью закрепления отражателей на нескольких уровнях или с зафиксированными на разных уровнях визирными целями, что позволит свести к минимуму погрешности определения расстояния между измерительными уровнями и рационально организовать градиентные геодезические измерения; разработке рекомендаций по реализации предложенной методики при производстве специальных видов геодезических работ, таких как мониторинг бортов карьеров, передача отметки через препятствие, создание высотного обоснования строительства канатных дорог и т.п., что особенно актуально в современных условиях активного развития горных и других ранее не освоенных районов [96].

Список литературы

1. Учет атмосферных влияний на астрономо-геодезические измерения / Под ред. Островского А.Л. М.: Недра, 1990. 235 с.
2. Дементьев В.Е. Рефракция и миражи. М.: «Галлея –Принт», 2009. 391 с.
3. Алексеев А.В., Дробязко Д.Л., Кабанов М.В., Куштин И.Ф. Оптическая рефракция в земной атмосфере (рефракционные модели атмосферы). Новосибирск: «Наука», 1987. 104 стр.
4. Юношев Л.С. Боковая рефракция света при измерениях углов. М.: Недра, 1969. 96 с.
5. Батарчукова И.Р., Ирикова Л.А. Длины волн монохроматических источников света и показатели преломления в стандартном и нормальном воздухе. – М.: Изд-во комитета стандартов, 1968. 19 с.
6. Вшивкова О.В. Физика Земли и атмосферы. Влияние атмосферы на результаты геодезических измерений: учебное пособие. М.: МИИГАиК, 2017. 88 с.
7. Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов. М.: ЦНИИГАиК, 2003. 135 с.
8. Nikon NPL-632 [Электронный ресурс] – режим доступа: <https://plutongeo.ru/assets/files/manual/nikon-npl-632-ru.pdf> – 21.11.2023
9. Большаков В.Д., Голубев А.Н. Справочник геодезиста. М.: Недра, 1985.
10. Дрок М.К. К вопросу о поправке в превышения за совместное влияние кривизны Земли и вертикальной рефракции при геодезическом нивелировании на малые расстояния // Научные записки ЛПИ. 1962. № 7. С. 3–30.
11. Дрок М.К. Исследование точности определения превышений в ходах геодезического нивелирования на короткие расстояния в равнинной местности // Научные записки ЛПИ. 1961. № 6. С.183–199.
12. Дементьев В.Е. Современная геодезическая техника и ее применение. М.: Академический проект. 2008. С.592.

13. Иордан В., Эггерт О., Кнейсель М. Руководство по высшей геодезии. Прецизионное и тригонометрическое нивелирование. М.: Госгеолтехиздат, 1963. – 263 с.
14. Hübner E. Einfluss der terrestrischen Refraktion auf den Laserstrahl in bodennahen Luftschichten. Vermessungstechnik. 1977. 25(10), P 349 – 353.
15. Островский А.Л. Достижения и задачи рефрактометрии. // Геопрофи. 2008. № 1. С. 6–15.
16. Никонов А.В. К вопросу о влиянии вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования короткими лучами // Вестник Сибирской государственной геодезической академии. 2014. № 1(25). С. 12–26.
17. Алексеев А.В., Кабанов М.В., Куштин И.Ф. Оптическая рефракция в земной атмосфере (горизонтальные трассы). Новосибирск: «Наука», 1982.
18. Островская С.А. Геодезическая рефрактометрия для тригонометрического нивелирования с использованием эквивалентных высот. – Дисс. ... канд. тех. наук. Киев: Госуниверситет, 1985.
19. Оболенский Н.Н. Исследование и разработка пространственно-временных методов учета влияния вертикальной рефракции: специальность 05.24.01: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Москва, 1991. 24 с.
20. Батарчукова И.Р., Ирикова Л.А. Длины волн монохроматических источников света и показатели преломления в стандартном и нормальном воздухе. М.: Изд-во комитета стандартов, 1968. 19 с.
21. Прилепин М.Т., Голубев А.Н. Инструментальные методы геодезической рефрактометрии // Итоги науки и техники. Геодезия и аэрофотосъемка. 1979. Т.15. 91 с.
22. Розенберг Г.В. Об измерении атмосферной рефракции // Изв. АН СССР. География и геофизика. 1947. XII. № 5. С. 383–387.
23. Вшивкова О.В., Калугин В.Ф., Калугин И.В. Рефракционные измерения и исследования в атмосфере. Саратов: Саратов. госуд. техн. ун-т., 2003. 189 с. Деп. в ВИНТИ 10.04.2003, № 680-В2003.

24. Калугин В.Ф., Вшивкова О.В., Калугин И.В. Совершенствование углового геодезического рефрактометра // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2021. Т. 65, № 4. С. 388-394.
25. Сушков А.С., Исследование угловой нестабильности лазерного излучения // Всесоюзное совещание «Современные методы учета и исключения влияния рефракции световых волн при геодезических и астрономических измерениях». Львов. 1974.
26. Хвостиков И.А. Метод определения рефракции при точных геодезических измерениях // Доклады АН СССР. 1946. Т. 51. № 5. С. 343-346.
27. Голубев А.Н. К оценке влияния турбулентности атмосферы при двухволновом методе дальномерной полигонометрии. // Изв. Вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка» №6. 1981. С.16–24
28. Прилепин М.Т. К оценке формул рефракции, определяемой методом спектральных разностей // Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка». 1970. № 1. С. 23–32.
29. Bahnert G. Die gegen wartigenmoglich keiten der Refractionbestimmung mit Dispersometr. Vermessungstechnik. №51. 1983. P. 156–159.
30. Brein R. Determining atmospheric refraction from the dispersion of light // Verlag des Institutes für Angewandte Geodäsie. 1969. Ser. 1. № 23. P. 3–14.
31. Tengström E. Elimination of refraction at vertical angle measurements using lasers on different wavelengths // Österr. Z. Vermessungsw, 1967. 55. Sonderh. 25, pp. 292–303.
32. Bokem B. Development of a despersometer for the implementation into geodetic high-accuracy direction measurement systems // Mitt. Inst. Geod and Fotogram. Eidgenöss. Tech. Hochschule. Zurich. 2001. № 73. P. 1–38.
33. Михайлов В.С. Высокоточное определение дисперсионных углов // Тр. ЦНИИГАиК. 1973. Вып. 22. С. 16-18.
34. Flach P, Analysis of refraction influences in geodesy using image processing and turbulence models // Diss. ETH No 13844, 2000

35. Вшивков В.Ф. О компенсационном способе учета влияния рефракции при геодезических измерениях // Геодезия и картография. 1974. №10. С. 28-33.
36. Tengstrom E., Milewski J. Possibilities of increasing the accuracy in the determination of refractive angles with Tengstrom's IDM // Refract. influences Astronomy and Geod. Symp., Uppsala, 1978. Dordrecht e.a. 1979. P. 249-264. Discuss., P. 264-266 (РЖ 80.06–52.47).
37. Савиных В.П., Васютинский И.Ю., Дементьев Д.В. Вертикальная рефракция света в приземном слое атмосферы: традиционные проблемы определения рефракции и новые технические достижения // Успехи физических наук. 2022. Т. 192, № 8. С. 926-943.
38. Михайлов В.С. Дисперсионный угловой рефрактометр // Тезисы докл. Всесоюзного совещания Современные методы учета и исключения влияния рефракции световых волн при геодезических и астрономических измерениях. Львов. Политехнический институт. 1974. С. 34–35.
39. Вшивков В.Ф. О компенсационном способе учета влияния рефракции при геодезических измерениях // Геодезия и картография, 1974, №10
40. Калугин В.Ф., Вшивкова О. В., Калугин И.В. Совершенствование углового геодезического рефрактометра // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2021. Т. 65, № 4. С. 388-394. DOI 10.30533/0536-101X-2021-65-4-388-394.
41. Вшивкова О.В., Калугин В.Ф., Калугин И.В. О перспективах развития геодезической рефрактометрии // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2017. № 1. С. 14-17.
42. Монин А.С., Обухов А.М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в горизонтальном слое атмосферы // Труды геофизического института АН СССР. 1954. №24. С. 163–182.
43. Дементьев Д. В. Определение вертикальной рефракции в приземном слое атмосферы // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56, № 4. С. 482-488.

44. Дементьев Д.В. Анализ турбулентных методов определения рефракции // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2020. Т. 64, № 1. С. 5-14.
45. Изотов А.А. Соображения об исследованиях в области атмосферной рефракции // Геодезия и картография. 1975. №1. С. 12-16.
46. Дементьев В.Е. Рефракция в турбулентной атмосфере. М.: Академпроект, 2011. 398 с.
47. Дементьев В.Е. Об определении вертикальной рефракции // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 1973. № 5. С. 29–31.
48. Вритте Б., Деубен Д. Возможность применения цифровой камеры для определения вертикальной рефракции. // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2001. № 2. С. 130–139.
49. Brunner F.K. Geodetic Refraction: Effects of Electromagnetic Wave Propagation Trough the Atmosphere. Berlin. Springer, 1984. P. 216.
50. Bahnert G. Bildflimmern und terrestraishe refraction //Vermessungstechnik. 1985. № 4. P. 127–128.
51. Островский А.П., Суюнов А.С. Турбулентный метод учета вертикальной рефракции в условиях Средней Азии // Сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка». Львов. 1989. Вып. 49. С. 112–120.
52. Тартачинский Р.М. Об определении моментов минимальных рефракционных искажений углов в сетях триангуляции // Сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка». Львов. 1985. Вып. 41. С. 108–114.
53. Виноградов В.В., Сухов Г.Н., Медовиков А.С., Шарапов А.В. Определение рефракции при геодезическом нивелировании по размытию изображения регулярных структур // Изв. Вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 1985. №3. С. 15–18.
54. Островский Л.А., Власенко С.Г., Суюнов А.С. Опыт учета вертикальной рефракции при тригонометрическом нивелировании в условиях Средней Азии без вычисления коэффициентов или углов рефракции. – К., 1988. – Рукопись деп. В УкрНИИНТИ Ук. 88, № 1667.

55. Дементьев Д.В. Исследования возможности определения вертикальной рефракции турбулентным методом // Оптика атмосферы и океана. 2020. Т. 33, № 1. С. 41-44.
56. Савиных В. П., Васютинский И.Ю., Дементьев Д.В. Вертикальная рефракция света в приземном слое атмосферы: традиционные проблемы определения рефракции и новые технические достижения // Успехи физических наук. 2022. Т. 192, № 8. С. 926-943
57. Джуман Б.М. Зависимость амплитуды колебаний изображений от высоты визирного луча // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 38. С. 16–21.
58. Суюнов А.С. (Монография). Об учете вертикальной рефракции при геодезических измерениях в условиях Центральной Азии. – К., 1995, 75 с. Рукопись деп. В ГНТБ Украины, № 898 – Ук 95.
59. Изотов А.А., Пеллинен Л.П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. Труды ЦНИИГАиК. М.: Геодезиздат, 1955, 176 с.
60. Можухин О.А. Метеорологический аспект учета рефракции в тригонометрическом нивелировании. // Материалы IX научной конференции. Секция геофизики, геологии и разведки торфяных месторождений. Калинин. 1977.
61. Можухин О.А. Применение метода подобия для учета рефракции в нивелировании. // Геодезия и картография. 2003. № 7. С. 16–21.
62. Гордеевцев А.В., Можухин О.А. К учету рефракции в нивелировании // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2005. № 1. С. 34-38.
63. Гордеевцев А.В. Исследование способа учета рефракции в электронной тахеометрии // Геодезия и картография. 2007. № 4. С. 23-25.
64. Можухин О.А. К анализу путей развития проблемы учёта рефракции в нивелировании // Геодезия и картография. 2016. Т. 77. № 11. С. 16-19. DOI 10.22389/0016-7126-2016-917-11-16-19.

65. Мозжухин, О.А. Рефракция в двустороннем тригонометрическом нивелировании. Определение поправок // Геодезия и картография. 2018. Т. 79, № 4. С. 8-13. DOI 10.22389/0016-7126-2018-934-4-8-13.
66. Лазарев Е.Г. Тригонометрическое нивелирование и гравиметрические исследования в Антарктиде. М. Наука. 1970 г.
67. Вшивкова О.В. Маркузе Ю.И., Ямбаев Х.К. О точностных ограничениях одновременного двустороннего тригонометрического нивелирования // Естественные и технические науки. 2018. № 11(125). С. 234-239.
68. Островская С.А. Учет вертикальной рефракции на основании взаимных и эквивалентных высот луча // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1984. №3. С. 51–60.
69. Суюнов А.С. Учет вертикальной рефракции в двустороннем тригонометрическом нивелировании в условиях Средней Азии. // В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка. Львов. вып 50. 1989. С 96–99.
70. Менухов И.И. О метеорологическом и геодезическом коэффициенте рефракции в условиях снежного покрова местности // Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1980. №4. С. 36–40.
71. Менухов И.И. О точности учета вертикальной рефракции по одновременно измеренным метеоэлементам и зенитным расстояниям // Изв. Вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1983. №4. С. 48–52.
72. Оболенский Н.Н. Исследование точности нивелирования наклонным лучом с вертикальным базисом // Геодезия и фотограмметрия в горном деле. Свердловск. 1989.
73. Брынть М.Я., Лобанова Ю.В., Афонин Д.А. Об определении и учете коэффициента рефракции на строительной площадке // Вестник СГУГиТ. 2022. Т. 27, № 1. С. 6-14. DOI 10.33764/2411-1759-2022-27-1-6-14.
74. Лобанова Ю.В., Брынть М.Я., Афонин Д.А. Определение коэффициента рефракции на коротких расстояниях // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2019. Т. 16, № 4. С. 670-676. DOI 10.20295/1815-588X-2019-4-670-676.

75. Извеков М.М. К вопросу о тригонометрическом нивелировании в сетях триангуляции // Геодезия и картография. 1966. №12. С. 21–29.
76. Оболенский Н.Н. Об учете вертикальной рефракции в сетях триангуляции / ГИСИ. Горький. 1990. 9с. Деп. ВИНТИ № 3243–В90.
77. Оболенский Н.Н. Учет вертикальной рефракции в тригонометрическом нивелировании сетей триангуляции / Тезисы доклада на IX съезде ВАГО. Новосибирск. 1990. С.33.
78. Никольский Е.К. О сетях с рефракционными базисами // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1973. вып. 18.
79. Хижак Л.С. Связь между колебаниями изображений и ошибками углов рефракционного происхождения // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1964. Вып 1. С. 13–21.
80. Маслич Д.И. Некоторые общие закономерности влияния вертикальной рефракции на точность геодезического нивелирования // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. Львов. 1969. Вып 9. С. 33–41.
81. Tsoulis, D., S. Petrovic, and N. Kilian (2008), Theoretical and numerical aspects of the geodetic method for determining the atmospheric refraction coefficient using simultaneous and mutual zenith observations, J. Surv. Eng., 134(1), 3–12.
82. Al-Kherayef O., V. Valchinov, R. Grebenitcharsky, S. Valcheva, B. Al-Muslmani, U. Al-Rubaia Refraction coefficient determination and modelling for the territory of the Kingdom of Saudi Arabia. In Proceedings of the FIG Congress Embracing our smart world where the continents connect: Enhancing the geospatial maturity of societies, Istanbul, Turkey, 6-11 May 2018.
83. Kukkamaki T. Uber die nivellitische refraction. Finnish Geodetic Ins. Pub. No. 25. Helsinki. 1938. 48 pp.
84. Kukkamaki T. Formelen und Tabellen zur Berechnung der Nivellitischen Refraktion. Finnish Geodetic Institute Publication No. 27. Helsinki. 1939. 18 pp.
85. Кошелев В.А., Карлин К.С., Чахлова А.П. Особенности развития геодезической разбивочной основы в условиях горной местности // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2013. Т. 1, № 1. С. 87–92.

86. Кошелев В.А., Карлин К.С., Чахлова А. П. Инженерно-геодезическое сопровождение строительства канатных дорог / В. А. Кошелев, К. С. Карлин, А.П. Чахлова // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2014. Т. 1, № 1. С. 111–116.
87. Михалев А. В. Оценка возможности использования тригонометрического нивелирования для производства высокоточных измерений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Геология. Нефтегазовое и горное дело. 2013. Т. 12, № 8. С. 136–144.
88. Кудабаев М.Д., Ногойбаева К.Б., Райымбек Кызы Г. [и др.] Исследование возможностей высокоточного тригонометрического нивелирования из середины взамен технологии геометрического нивелирования для решения специальных задач в условиях Кыргызстана // Наука и инновационные технологии. 2018. № 3(8). С. 271–277.
89. Никонов А.В. Исследование точности тригонометрического нивелирования способом из середины при визировании над разными подстилающими поверхностями // Вестник Сибирской государственной геодезической академии. 2013. № 3(23). С. 28–33.
90. Никонов А.В. Технологические схемы при проложении ходов тригонометрического нивелирования // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2014. Т. 1. № 1. С. 77–83.
91. Никонов А.В., Скворцов А.А. Исследование влияния вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования короткими лучами в зимних условиях // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2014. Т.1. № 1. С. 70–77.
92. Никонов А. В. Исследование влияния вертикальной рефракции на результаты тригонометрического нивелирования короткими лучами способом из середины // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2014. № 1. С. 28–34.
93. Bahnert B. Möglichkeiten und Grenzen des trigonometrischen Höhenmessung und Kartenwesen der DDR. Band 24. Leipzig. 1970

94. Маслич Д.И. О точности геодезического нивелирования в горных условиях. Львов. ЛПИ. 1957.
95. Валов Г.Е., Вшивкова О.В. Алгоритм определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании // Грозненский естественнонаучный бюллетень. 2024. Т. 9, № 4 (38). С. 14-22. DOI 10.25744/genb.2024.28.99.002.
96. Вшивкова О.В., Васютинский И.Ю., Валов Г.Е. Особенности производства геодезических работ в горной местности // Геодезия и картография. 2023. Т. 84, № 11. С. 2-9. DOI 10.22389/0016-7126-2023-1001-11-2-9.
97. Оке Т.Г. Климаты пограничного слоя. Л.: ГИМИЗ, 1982.
98. Несмелова Е.И., Филиппова М.Г. Микроклиматология: учебное пособие. М.: МГУ, 2006. 186 с.
99. Гейгер Р. Климат приземного слоя воздуха. Пер. с англ. И.М. Шейниса; под ред. и с предисл. С.А. Сапожниковой. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 485 с.
100. Короткевич В.Н. Обзор работ по изучению микроклимата. Л.: ЦУЕГМС. Ленингр. отд., 1936. 82 с. (Тр. Гл. геофиз. обсерватории. Климатология / Центр. упр. единой гидрометеорол. службы СССР; Вып. 6, 2)
101. Лайтман Д.Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 341 с.
102. Вшивкова О.В., Калугин В.Ф., Калугин И.В. Рефракционные измерения и исследования в атмосфере // Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т. 2003. 189 с.: ил. 47. Библ. 131 назв. Рус. Деп. в ВИНТИ 10.04.2003, № 680-82003.
103. Вшивкова О.В. О комплексном подходе к решению рефракционной проблемы // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2005. № 4. С. 41-46.
104. Вшивкова О.В. О рабочей «геодезической» модели атмосферы // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2005. № 5. С. 22-29.
105. Вшивкова О.В. Косвенные определения вертикальной рефракции // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2006. № 1. С. 46-51.

106. Вшивкова О.В. Учет влияния приземного слоя атмосферы без знания высоты визирного луча // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2007. № 3. С. 17-22.
107. Вшивкова О.В. Рациональный учет рефракции с применением геодезического градиентометра // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2010. № 1. С. 3-6.
108. Вшивкова О.В. Учет влияния атмосферы в электронной тахеометрии с использованием геодезического градиентометра // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2010. № 3. С. 3-9.
109. Вшивкова О.В. Повышение качества планировочных работ посредством учета влияния атмосферы // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2010. № 5. С. 3-5.
110. Вшивкова О.В., Решетило С.Ю. Разработка методики производства комплексных градиентных измерений для целей учета влияния вертикальной рефракции // Естественные и технические науки. 2021. № 4(155). С. 185–192.
111. Вшивкова О.В., Решетило С.Ю. Разработка алгоритма реализации комбинированного способа учета влияния вертикальной рефракции в электронной тахеометрии // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2018. Т. 62, № 5. С. 489–494.
112. Вшивкова О.В., Маркузе Ю.М. Нейман Ю.М. Решетило С.Ю. Ямбаев Х.К. Апробация алгоритма реализации комбинированного способа учета влияния рефракции на результаты тригонометрического нивелирования // Естественные и технические науки. 2018. № 11(125). С. 228-233.
113. Вшивкова О.В., Решетило С.Ю. Комбинированный способ учёта влияния вертикальной рефракции в электронной тахеометрии // Геодезия и картография. 2019. Т. 80, № 11. С. 15–21.
114. Вшивкова О.В., Решетило С.Ю. Полевая апробация методики производства комплексных градиентных измерений для целей учета влияния вертикальной рефракции // Естественные и технические науки. 2021. № 4(155). С. 178–184.

115. Вшивкова О.В., Калугин И.В. Градиентометр. Патент РФ на изобретение № 2452983, опубл. 10.06.2012.
116. Холопов И.С., Лютков И.А. Сравнительный анализ двух методов нелинейной оптимизации в задаче калибровки трехосного MEMS-акселерометра // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. № 71. С. 15-22. DOI 10.21667/1995-4565-2020-71-15-22.
117. Азарнова Т.В., Баркалов С.А., Полухин П.В. Разработка гибридного алгоритма обучения структуры динамической байесовской сети на основе метода Левенберга - Марквардта // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2018. Т.18, №4. С. 16-24. DOI 10.14529/ctcr180402.
118. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. 3-е изд.: пер. с англ. – М.: Вильямс, 2007. – 912 с.
119. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. – М: Финансы и статистика, 1981, 302.
120. Каширкин А.Д. Новый ресурс нелинейного регрессионного моделирования - метод-Монте Карло // Мир современной науки. 2017. № 2(42). С. 20-38.
121. Широбоков М.Г. Лекции и задачи по численным методам в механике космического полета: учебное пособие / Москва: МФТИ, 2023. 112 с.
122. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Изд. 2-е. М.: Наука, 1975. 471 с.
123. Посметьев В.В. Эффективные математические методы для оптического распознавания и работы с 3D-моделями // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2017. Т. 5, № 7-2(33-2). С. 186-192.
124. Sbert M. Weighted Importance Sampling Techniques for Monte Carlo Radiosity // Eurographics. 2000. DOI:10.1007/978-3-7091-6303-0_4.
125. Joubert D.J., Marwala T. Monte Carlo dynamically weighted importance sampling for finite element model updating // In Topics in Modal Analysis and Testing 2015. pp 303–312. DOI:10.1007/978-3-319-30249-2_27.

126. Валов Г.Е., Вшивкова О.В. Методика учета влияния вертикальной рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2026. Т. 70, №. 3. С. 8–22. DOI:10.30533/GiA-2026-023.
127. Валов Г.Е., Вшивкова О.В. Полевая апробация алгоритма определения коэффициента рефракции по градиентным геодезическим измерениям при одностороннем тригонометрическом нивелировании // Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2025. Т. 69, № 6. С. 8–24. DOI:10.30533/GiA-2025-057.