Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии

М.А. Антоненко, А.В. Аристархова, Н.В. Деза

Элементы теории функций комплексного переменного

Учебное пособие по разделу дисциплины
«Математический анализ»
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
«Электронные и оптико-электронные приборы
и системы специального назначения»

Москва
2016

УДК 517.53

Рецензенты:
доцент, кандидат техн. наук **О.А. Баюк**
(Финансовый университетпри Правительстве РФ);
профессор, кандидат техн. наук **И.И. Лонский** (МИИГАиК)

Составители: М.А. Антоненко, А.В. Аристархова, Н.В. Деза
Элементы теории функций комплексного переменного: учебное пособие. — М.: МИИГАиК, 2016. — 72 с.

Содержит краткий теоретический материал, индивидуальные заданиядля самостоятельного решения и примеры решения типовых задач по разделу дисциплины «Математический анализ»: «Элементы теории функций комплексного переменного».Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Электронные и оптико-электронные приборыи системы специального назначения».

Электронная версия учебного пособия размещена на сайте библиотеки МИИГАиК http://library.miigaik.ru

ГЛАВА 1.
АЛГЕБРА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1.1. Краткие теоретические сведения

Рассмотрим два действительных числа x и y. Напомним, что упорядоченной парой чисел x и y называется двухэлементное множество, состоящее из чисел x и y, в котором фиксирован порядок расположения элементов. Обозначение: (x, y)

Определение 1.1.1. Множеством комплексных чисел называется множество упорядоченных пар действительных чисел,с определенными на нем операциями сложения $(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$ и умножения

$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)$$

для любых упорядоченных пар (x_1, y_1), (x_2, y_2). Каждый элемент данного множества называется комплексным числом (то есть комплексное число — это упорядоченная пара действительных чисел).

Обозначение: C, где $C=\left\{z \mid z=(x, y), \text{ где } x, y\in R\right\}$.

Множество C комплексных чисел удовлетворяет девяти аксиомам поля, поэтому его называют полем комплексных чисел.

Определение 1.1.2. Комплексное число (0, 1) называется мнимой единицей поля комплексных чисел. Обозначение: i, где $i=(0, 1)$.

Можно доказать, что комплексное число $(x, 0)$ отождествляется с числом (с точностью до соответствующего изоморфизма), поэтому пару частоназывают действительным числом x.

Обозначение: $x\cong(x, 0)$ или просто $x=(x, 0)$.

Учитывая последнее, получаем, что квадрат мнимой единицы равен минус единице, то есть $i^2=-1$. В самом деле, $i^2=i\cdot i=(0, 1)\cdot(0, 1)=(-1, 0)=-1$.

Три формы записи комплексных чисел и действия с ними.

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа.

Всякое комплексное число $z=(x, y)$ можно представить в виде:

$$z=(x, y)=(x, 0)+(0, y)=(x, 0)+(y, 0)\cdot(0, 1)=x+y\cdot i.$$

Определение 1.1.3. Представление комплексного числа $z=(x, y)$ в виде $x+yi$ называется его алгебраической формой записи (АФЗ). Число x называют действительной (вещественной) частью числа z и обозначают $\operatorname{Re} z$, а число y называют мнимой частью числа z и обозначают $\operatorname{Im} z$.

Комплексные числа, не являющиеся действительными, называются мнимыми. Числа вида bi, где $b \in R$, называются чисто мнимыми.

Определение 1.1.4. Два комплексных числа $z = x + yi$ и $\overline{z} = x - yi$ называются комплексно сопряженными.

Определение 1.1.5. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называются равными, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Комплексное число $z = x + yi$ называется равным нулю, если $x = y = 0$.

Основные действия над комплексными числами в АФЗ.

Для любых $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i \in C$ и любого $\alpha \in R$ имеем:

1. Умножение комплексных чисел на действительное число.

На практике умножение комплексных чисел на действительное число осуществляется непосредственным раскрытием скобок.

$$\alpha \cdot z = \alpha \cdot (x + yi) = \alpha x + \alpha yi.$$

2. Сложение (вычитание) комплексных чисел.

На практике сложение (вычитание) комплексных чисел осуществляется также раскрытием скобок.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i.$$

3. Умножение комплексных чисел.

На практике умножение комплексных чисел осуществляется раскрытием скобок, учитывая, что $i^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i.$$

4. Деление комплексных чисел.

На практике деление одного комплексного числа на другое, отличного от нуля, осуществляется путем умножения числителя и знаменателя на числокомплексно сопряженное знаменателю, учитывая, что $i^2 = -1$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i) \cdot (x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i,$$

где $z_2 \neq 0$.

Заметим, что для комплексных чисел в АФЗ верны все формулы сокращенного умножения.

2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Всякое комплексное число $z = x + yi$ можно изобразить точкой $M = (x, y)$ на координатной плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждой точке $M=(x,\ y)$ координатной плоскости Oxy можно поставить в соответствие комплексное число $z=x+yi$ (рис. 1).

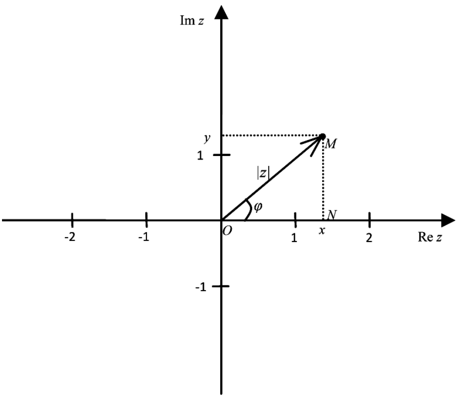

Рис. 1

Определение 1.1.6. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется действительной (вещественной) осью (на ней лежат числа $z=x+0\cdot i=x$). Ось ординат называется мнимой осью (на ней лежат числа $z=0+y\cdot i=yi$).

Определение 1.1.7. Закрепленный вектор $\overrightarrow{OM}=(x,y)$ называется радиус-вектором комплексного числа $z=x+yi$ (см. рис. 1).

Определение 1.1.8. Длина радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ комплексного числа $z=x+yi$, равная $\sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, называется модулем комплексного числа z (см. рис. 1).Обозначение: $|z|$, где $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Модуль комплексного числа обладает следующими свойствами:

1. модуль комплексного числа z равен квадратному корню из произведения комплексного числа z на число, комплексно сопряженное к нему, то есть $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$;

2. модуль произведения двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен произведению их модулей, то есть $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

Определение 1.1.9. Величина угла φ между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором комплексного числа $z=x+yi$ называется аргументом этого комплексного числа (см. рис. 1). Обозначение: Arg z или φ.

Если $z=0$, то Arg z не определен. Если же $z\neq 0$, то Arg z — величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$, где $k\in Z$, то есть имеет место соотношение:

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2\pi k,$$

где arg z — главное значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi;\ \pi]$. Иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0;\ 2\pi)$.

Аргумент комплексного числа обладает следующими свойствами:

1. аргумент произведения двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен сумме их аргументов, то есть $\text{Arg}\left(z_1 \cdot z_2\right) = \text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2$;

2. формулы связи модуля и аргумента комплексного числа $z=x+yi$ имеют вид $\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}, \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}$. Справедливость этих соотношений легко увидеть из прямоугольного треугольника OMN, изображенного на рис. 1. Кроме того, ясно, что $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{y}{x}$ для $x \neq 0$. Учитывая, что $-\pi < \arg z \le \pi$, получаем:

$$\arg z = \begin{cases} \text{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{для внутренних точек I и IV четвертей,} \\ \text{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ \text{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Если же точка $z=x+yi$ лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно. Так, если $z=x+yi$ лежит на действительной оси, то $\arg z=0$ для положительного направления $\arg z=\pi$ и для отрицательного направления этой оси. Если же $z=x+yi$ лежит на мнимой оси, то $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$ для положительного направления и $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$ для отрицательного направления этой оси, то есть $\arg z = \dfrac{\pi}{2}\text{sgn}\, y$.

Учитывая последние соотношения, комплексное число $z=x+yi$ можно представить в виде:

$$z = x + yi = |z|\cos\varphi + |z|\sin\varphi \cdot i = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Определение 1.1.10. Представление комплексного числа $z=x+yi$ в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}$ где называется его тригонометрической формой записи (ТФЗ).

Основные действия над комплексными числами в ТФЗ.

Для любых $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \in C$ имеем:

1. Умножение комплексных чисел.

При умножении комплексных чисел в ТФЗ их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

2. Деление комплексных чисел.

При делении комплексных чисел в ТФЗ их модули делятся, а аргументы вычитаются.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

3. Возведение в n-ю степень комплексного числа.

При возведении в n-ю степень комплексного числа его модуль возводится в указанную степень, а аргумент умножается на нее.

$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right), \text{ где } n \in Z.$$

Указанное соотношениеназывается формулой Муавра.

4. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа осуществляется по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \text{ где } k = \overline{0,(n-1)},\ z \neq 0.$$

Полагая в указанной формуле k=0, 1, 2, 3, ..., видим, что корень n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$ имеет ровно различных значений. Причем все n значений корня n-й степени из данного комплексного числа z геометрически изображаются точками комплексной плоскости, являющимися вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Заметим, что $\cos\varphi = \cos(\arg z + 2\pi k) = \cos(\arg z)$ и, аналогично, $\sin\varphi = \sin(\arg z)$. Таким образом, при переходе от алгебраической формы комплексного числа z к его тригонометрической форме достаточно определить лишь главное значение аргумента данного комплексного числа, то есть можно считать, что $\varphi = \arg z$.

3. Экспоненциальная форма записи комплексного числа.

Определение 1.1.11. Периодическая функция $e^{i\varphi}$ с основным периодом 2π, удовлетворяющая соотношению , называется функцией Эйлера. Указанное соотношение $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ называется формулой Эйлера.

Учитывая формулу Эйлера, комплексное число $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно представить в виде:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

Определение 1.1.12. Представление комплексного числа $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $|z|$ — модуль комплексного числа z, φ=Arg $z = \arg z + 2\pi k,\ k \in Z$, называется его экспоненциальной формой записи (ЭФЗ).

Основные действия над комплексными числами в ЭФЗ.

Для любых $z = |z|e^{i\varphi}$, $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2} \in C$ имеем:

1. Умножение комплексных чисел.

При умножении комплексных чисел в ЭФЗ их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

2. Деление комплексных чисел.

При делении комплексных чисел в ЭФЗ их модули делятся, а аргументы вычитаются.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

3. Возведение в n-ю степень комплексного числа.

При возведении вn-ую степень комплексного числа его модуль возводится в указанную степень, а аргумент умножается на нее.

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}.$$

4. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа осуществляется по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}, \text{ где } k = \overline{0,(n-1)},\ z \neq 0.$$

Напомним, так как $\cos\varphi = \cos(\arg z)$ и $\sin\varphi = \sin(\arg z)$, то при переходе от алгебраической формы комплексного числа z к его экспоненциальной форме достаточно определить лишь главное значение аргумента данного комплексного числа, то есть можно считать, что $\varphi = \arg z$.

1.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.2.1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 8i$, $z_3 = 1 - i$. Вычислите: а) $\dfrac{z_1 + 2z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $(z_3)^5$.

Решение:

а) Вычислим $\dfrac{z_1 + 2z_2}{z_3}$. В самом деле,

$$\frac{z_1 + 2z_2}{z_3} = \frac{(2+i) + 2(8i)}{1-i} = \frac{2+17i}{1-i} = \frac{(2+17i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} =$$

$$= \frac{2 + 2i + 17i + 17i^2}{1 - i^2} = \frac{-15 + 19i}{2} = -\frac{15}{2} + \frac{19}{2}i.$$

б) Вычислим $\sqrt[3]{z_2}$. Чтобы извлечь корень третьей степени из комплексного числа $z_2 = 8i = 0 + 8i$ нужно записать его в тригонометрической или экспоненциальной форме. Запишем z_2 в тригонометрической форме. Для этого найдем модуль и аргумент данного комплексного числа. В самом деле, имеем:

$$|z_2| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_2)^2 + (\operatorname{Im} z_2)^2} = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8.$$

Кроме того, $z_2 = 8i$ лежит на мнимой оси (положительное направление) комплексной плоскости, то есть $\arg z_2 = \frac{\pi}{2}$. Учитывая, что при переходе от алгебраической формы комплексного числа к его тригонометрической форме можно считать, что $\varphi_2 = \arg z_2$, получаем $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Итак, $z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Учитывая формулу извлечения корня n-й степени из комплексного числа в ТФЗ

$$\omega_k = \sqrt[n]{z_2} = \sqrt[n]{|z_2|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi_2 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi_2 + 2\pi k}{n}\right),\ \text{где } k = \overline{0,(n-1)},$$

имеем: $\omega_k = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right)$, где $k = 0, 1, 2.$

И, наконец, подставляя указанные значения k, получаем три различных корня:

Для $k=0$ имеем $\omega_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i.$

Для $k=1$ имеем $\omega_1 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i.$

Для $k=2$ имеем $\omega_2 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2\big(0 + i(-1)\big) = -2i.$

в) Вычислим $(z_3)^5$. Для того, чтобы возвести комплексное число $z_3 = 1 - i$ в пятую степень, нужно записать его в тригонометрической или экспоненциальной форме. Запишем z_3 в экспоненциальной форме. Для этого найдем модуль и аргумент данного комплексного числа. В самом деле, имеем:

$$|z_3| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_3)^2 + (\operatorname{Im} z_3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Кроме того, $z_3 = 1 - i$ лежит в IV четверти комплексной плоскости, то есть

$$\arg z_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z_3}{\operatorname{Re} z_3}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Учитывая, что при переходе от алгебраической формы комплексного числа к его экспоненциальной форме можно считать, что $\varphi_3 = \arg z_3$, получаем $\varphi_3 = -\frac{\pi}{4}$. Итак, $z_3 = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Учитывая формулу возведения в n-ю степень комплексного числа в ЭФЗ

$$(z_3)^n = |z_3|^n e^{in\varphi_3},$$

имеем: $$z_3{}^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 e^{i5\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -4 - 4i.$$

1.3. Индивидуальные домашние задания

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = -1,\ z_3 = 1 + i$.

   Вычислите: а) $\frac{2z_1 - z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) $(z_3)^4$.

2. Даны комплексные числа $z_1 = 2 - i,\ z_2 = -2i,\ z_3 = 1 + \sqrt{3}i$.

   Вычислите: а) $\frac{z_1 - z_2}{\sqrt{2}z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $(z_3)^3$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - 3i,\ z_2 = i,\ z_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

   Вычислите: а) $\frac{3z_1 + 2z_2}{\sqrt{2}z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $(z_3)^4$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -4 + i,\ z_2 = -16,\ z_3 = -2i$.

   Вычислите: а) $\frac{2z_1 - z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) $(z_3)^5$.

5. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 4i,\ z_2 = 4,\ z_3 = \sqrt{3} + i$.

Вычислите: а) $\dfrac{2z_1 - 3z_2}{\sqrt{3}z_3}$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^6$.

6. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + i,\ z_2 = -8i,\ z_3 = \sqrt{3} - i$.

Вычислите: а) $\dfrac{3z_1 - z_2}{2z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^3$.

7. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 2i,\ z_2 = -1 + i,\ z_3 = 1 - i$.

Вычислите: а) $\dfrac{z_1 - 3z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^4$.

8. Даны комплексные числа $z_1 = 3 - i,\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i,\ z_3 = -1 - i$.

Вычислите: а) $\dfrac{z_1 + 2z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^3$.

9. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 16,\ z_3 = -\sqrt{3} + i$.

Вычислите: а) $\dfrac{3z_1 - z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^3$.

10. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = -8,\ z_3 = -2 - 2i$.

Вычислите: а) $\dfrac{4z_1 + z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^3$.

11. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i,\ z_3 = 1 + i$.

Вычислите: а) $\dfrac{z_1 - 2z_2}{z_3}$; б) $\sqrt{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^6$.

12. Даны комплексные числа $z_1 = -2 - i,\ z_2 = 4i,\ z_3 = 1 - i$.

Вычислите: а) $\dfrac{3z_1 + z_2}{2z_3}$; б) $\sqrt{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^6$.

13. Даны комплексные числа $z_1 = -2i,\ z_2 = 27i,\ z_3 = 2i$.

Вычислите: а) $\dfrac{-5z_1 + z_2}{2z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $(z_3)^3$.

14. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = -4,\ z_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

Вычислите: а) $\dfrac{5z_1 + z_2}{3z_3}$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) $(z_3)^3$.

15. Даны комплексные числа $z_1 = -3 + i,\ z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i,\ z_3 = 1 + i$.

Вычислите: а) $\dfrac{z_1 + 2z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) $(z_3)^5$.

16. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -1 + \sqrt{3}i,\ z_3 = -1 + i$.

Вычислите: а) $\dfrac{2z_1 - z_2}{2z_3}$; б) $\sqrt{z_2}$; в) $(z_3)^4$.

17. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -27,\ z_3 = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Вычислите: а) $\dfrac{10z_1 + z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $(z_3)^3$.

18. Даны комплексные числа $z_1 = -3 - 2i,\ z_2 = -4 + 4i,\ z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Вычислите: а) $\dfrac{-2z_1 + z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $(z_3)^3$.

19. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 2\sqrt{3}i,\ z_2 = -1 - \sqrt{3}i,\ z_3 = 1 + \sqrt{3}i$.

Вычислите: а) $\dfrac{2z_1 + z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) $(z_3)^4$.

20. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + \sqrt{3}i,\ z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i,\ z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Вычислите: а) $\dfrac{3z_1 + z_2}{z_3}$; б) $\sqrt{z_2}$; в) $(z_3)^4$.

21. Даны комплексные числа $z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = -4i,\ z_3 = -1 + i$.

Вычислите: а) $\dfrac{2z_1 + z_2}{z_3}$; б) $\sqrt{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^3$.

22. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{2} + i,\ z_2 = 2\sqrt{2},\ z_3 = 1 - i$.

Вычислите: а) $\dfrac{2z_1 - z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^3$.

23. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = -i,\ z_3 = \sqrt{3} + i$.

Вычислите: а) $\dfrac{z_1 + 2z_2}{z_3}$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^4$.

24. Даны комплексные числа $z_1 = 3 - i,\ z_2 = -4,\ z_3 = -\sqrt{3} + i$.

Вычислите: а) $\dfrac{2z_1 + z_2}{z_3}$; б) $\sqrt{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^4$.

25. Даны комплексные числа $z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = 1,\ z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Вычислите: а) $\dfrac{z_1 - 3z_2}{\sqrt{2}z_3}$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) $\left(z_3\right)^6$.

ГЛАВА 2.
ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Краткие теоретические сведения

Пусть D и E — подмножества комплексной плоскости.

Определение 2.1.1. Отображение f из D в E, которое каждому комплексному числу $z = x + iy \in D$ сопоставляет одно комплексное число $\omega \in E$ называется однозначной функцией комплексного переменного. Обозначение: $f(z) = \omega$.

Определение 2.1.2. Если отображение f из D в E каждому комплексному числу $z = x + iy \in D$ сопоставляет несколько комплексных чисел $\omega_i \in E$, то такое отображение называется многозначной функцией комплексного переменного. Обозначение: $f(z) = \{\omega_i\}$.

Определение 2.1.3. Множество D называется областью определения функции $f(z)$, а множество всех значений $\tilde{E}$, которые функция $f(z)$ принимает на множестве E, называется областью значений этой функции.

Рассмотрим основные элементарные функции комплексного переменного $z = x + iy$.

1. Показательная функция e^z комплексного аргумента $z = x + iy$ определяется соотношением:

$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Показательная функция e^z обладает следующими свойствами:

1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ для любых $z_1, z_2 \in C$;

2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ для любых $z_1, z_2 \in C$;

3) $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$ для любых $z \in C$ и $n \in N$;

4) $e^z \neq 0$ для любого $z \in C$;

5) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ для любых $z \in C$ и $k \in Z$, то есть e^z является периодической функцией с основным периодом $2\pi i$.

2. Тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{ctg}\, z$ комплексного аргумента $z = x + iy$ определяются соотношениями:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ и } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \text{ и } \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}},$$

где $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ и $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$.

Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии, известныеиз школьного курса математики. Отметим также, что тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ в комплексной плоскости являются неограниченными.

3. Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ комплексного аргумента $z = x + iy$ определяются соотношениями:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ и } \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \text{ и } \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны следующими соотношениями:

$$\sin z = -i \cdot \operatorname{sh} iz \text{ и } \operatorname{sh} z = -i \cdot \sin iz,$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz \text{ и } \operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\operatorname{tg} z = -i \cdot \operatorname{th} iz \text{ и } \operatorname{th} z = -i \cdot \operatorname{tg} iz,$$

$$\operatorname{ctg} z = i \cdot \operatorname{cth} iz \text{ и } \operatorname{cth} z = i \cdot \operatorname{ctg} iz.$$

4. Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$ комплексного аргумента определяется соотношением:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i,$$

где $k \in Z$, $\operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z, $\arg z$ — главное значение $\operatorname{Arg} z$.

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$ обладает следующими свойствами:

1) $\operatorname{Ln} (z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ для любых $z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0 \in C$;

2) $\operatorname{Ln} \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$ для любых $z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0 \in C$;

3) $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ для любых $z \neq 0 \in C$ и $n \in N$;

4) $\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n} \operatorname{Ln} z$ для любых $z \neq 0 \in C$ и $n \in N$;

5) $\operatorname{Ln} z$ является многозначной функцией. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется то значение, которое получается при $k=0$. Главное значение $\operatorname{Ln} z$ обозначается через $\ln z = \ln|z| + i \arg z$. Ясно, что, $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$, где $k \in Z$.

5. Общая степенная функция $\omega = z^a$ комплексного аргумента $z = x + iy$ определяется соотношением $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$, где $a \in C \setminus \{0\}$ — комплексная

константа. Общая степенная функция z^a является многозначной функцией. Главным значением z^a называется значение, равное $e^{a\ln z}$.

6. Общая показательная функция $\omega = a^z$ комплексного аргумента $z = x + iy$ определяется соотношением $a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$, где $a \in C \setminus \{0\}$ — комплексная константа, отличная от нуля. Общая показательная функция a^z является многозначной функцией. Главным значением a^z называется значение, равное $e^{z\ln a}$.

2.2. Примеры решения типовых задач

Задача 2.2.1. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{i}}$; в) $\mathrm{th}\, i$.

Решение:

а) Вычислим $\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$. Для этого, вводя обозначение $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = $ $= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$, найдем модуль и аргумент комплексного числа z. В самом деле, имеем:

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Кроме того $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$, лежит в I четверти комплексной плоскости, то есть $\arg z = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}\right) = \mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$. Учитывая, что $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, получаем, что

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \text{ где } k \in Z.$$

б) Рассмотрим $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{i}}$. По определению общей степенной функции, имеем:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{i}} = e^{\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{i}}} = e^{\frac{1}{i}\cdot \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Вычислим $\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$. Для этого, вводя обозначение $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} =$, $= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$, найдем модуль и аргумент комплексного числа z. В самом деле, имеем:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Кроме того, $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$ лежит в IV четверти комплексной плоскости, то есть $\arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Учитывая, что $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, получаем, что $\operatorname{Ln} z = \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, где $k \in Z$. А значит,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{i}} = e^{\frac{1}{i} \cdot \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)} = e^{\frac{1}{i} \cdot \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{i} \cdot i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} = e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}, \text{ где } k \in Z$$

в) Вычислим $\operatorname{th} i$. По определению гиперболического тангенса комплексного аргумента, имеем: $\operatorname{th} i = \frac{e^i - e^{-i}}{e^i + e^{-i}}$. Замечая, что по определению показательной функции комплексного аргумента

$$e^i = e^{0+1\cdot i} = e^0 (\cos 1 + i \sin 1) = \cos 1 + i \sin 1,$$

$$e^{-i} = e^{0-1\cdot i} = e^0 (\cos(-1) + i \sin(-1)) = \cos 1 - i \sin 1,$$

получаем $\operatorname{th} i = \frac{e^i - e^{-i}}{e^i + e^{-i}} = \frac{(\cos 1 + i \sin 1) - (\cos 1 - i \sin 1)}{(\cos 1 + i \sin 1) + (\cos 1 - i \sin 1)} = \frac{2 i \sin 1}{2 \cos 1} = i \operatorname{tg} 1.$

2.3. Индивидуальные домашние задания

1. Вычислите: а) $\operatorname{Ln}(4-3i)$; б) $\cos(1-i)$; в) $(1-i)^i$.

2. Вычислите: а) $\operatorname{Ln}(-i)$; б) $\sin(2i)$; в) $\left(\sqrt{3}+i\right)^i$.

3. Вычислите: а) $\operatorname{Ln}(1-i)$; б) $\operatorname{tg} i$; в) $(1-i)^{1-i}$.

4. Вычислите: а) $\operatorname{Ln}(3+4i)$; б) $\cos i$; в) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{2i}$.

5. Вычислите: а) $\operatorname{Ln}(-8i)$ б) $\operatorname{sh} i$; в) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{-i}$.

6. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)$; б) $\mathrm{ch}(2i)$; в) 2^{i-1}.

7. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)$; б) $\sin(3i)$; в) e^{i+2}.

8. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(5+5\sqrt{3}i\right)$; б) $\cos(2i)$; в) $(2i)^{1+i}$.

9. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(-4)$; б) $\mathrm{tg}(-i)$; в) $(1-i)^{2i}$.

10. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(4-3i)$; б) $\mathrm{sh}(-1+i)$; в) i^{1-i}.

11. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}-i\right)$; б) $\mathrm{ch}(-2i)$; в) $(-1+i)^{1-i}$.

12. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}+i\right)$; б) $\mathrm{sh}(-i)$; в) 3^{1-2i}.

13. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$; б) $\cos(2+i)$; в) e^{i-3}.

14. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}i\right)$; б) $\sin(1+i)$; в) $(-2i)^{i}$.

15. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(-8i)$; б) $\mathrm{tg}(1+i)$; в) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2i}$.

16. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(-1-i)$; б) $\sin(1-i)$; в) e^{3i-1}.

17. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(1-\sqrt{3}i\right)$; б) $\cos(2+3i)$; в) i^{2i+1}.

18. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(-2)$; б) $\mathrm{ch}(3i)$; в) 2^{2i+1}.

19. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(1+3i)$; б) $\mathrm{sh}(2i)$; в) 3^{2-i}.

20. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(3-i)$; б) $\mathrm{sh}(1-i)$; в) $(1+i)^{i}$.

21. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(12-5i)$; б) $\sin(-1+i)$; в) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^{i}$.

22. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(-4i)$; б) $\cos(2-i)$; в) 2^{1+2i}.

23. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}(-2-2i)$; б) $\mathrm{tg}(3i)$; в) i^{1+i}.

24. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(4+3i\right)$; б) $\mathrm{sh}(2+i)$; в) 2^{i+1}.

25. Вычислите: а) $\mathrm{Ln}\left(2+i\right)$; б) $\mathrm{ch}(1+i)$; в) 3^{2+i}.

ГЛАВА 3.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

3.1. Краткие теоретические сведения

1. Решение квадратных и биквадратных уравнений с вещественными коэффициентами.

Определение 3.1.1. Квадратным уравнением комплексной переменной $z = x + iy$ с вещественными коэффициентами называется уравнение вида $az^2 + bz + c = 0$, где вещественные числа $a \neq 0$, b, c называются его коэффициентами.

В общем случае решение указанного уравнения сводится к вычислению его дискриминанта D по формуле $D = b^2 + 4ac$. Напомним, что:

1) если $D > 0$, то данное уравнение имеет два различных вещественных корня;

2) если $D = 0$, тоданное уравнение имеет два совпавших вещественных корня;

3) если $D < 0$, то уравнение имеет два комплексно сопряженных корня.

Корни уравнения вычисляются по формулам $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. Напомним также, что, если коэффициент b данного уравнения является четным, то имеет смысл вычислятьне дискриминант, а его четверть: $\dfrac{D}{4} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + ac$. В этом случае, корни уравнения вычисляются по формулам

$$z_1 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} \text{ и } z_1 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

Заметим, что квадратные уравнения комплексной переменной $z = x + iy$ с вещественными коэффициентами легко решить непосредственной подстановкой $z = x + iy$ в уравнение. В самом деле, $a(x + iy)^2 + b(x + iy) + c = 0$. Раскрывая скобки получаем:

$$ax^2 + 2axyi - ay^2 + bx + byi + c = 0$$

$$\text{или } \left(ax^2 - ay^2 + bx + c\right) + \left(2axy + by\right)i = 0 + 0i.$$

Учитывая определение равных комплексных чисел, переходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} ax^2 - ay^2 + bx + c = 0, \\ 2axy + by = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, легко находим значения x и y.

Определение 3.1.2. Биквадратным уравнением комплексной переменной $z = x + iy$ с вещественными коэффициентами называется уравнение вида $az^4 + bz^2 + c = 0$, где вещественные числа $a \neq 0$, b, c называются его коэффициентами.

Биквадратное уравнение решается методом замены переменной. Именно, полагая $z^2 = t$,данное уравнение легко сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$ комплексной переменной t с вещественными коэффициентами.

2. Решение кубических уравнений с вещественными коэффициентами.

Определение 3.1.3. Кубическим уравнением комплексной переменной $z = x + iy$ с вещественными коэффициентами называется уравнение вида $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, где вещественные числа называются его коэффициентами.

Кубическое уравнение имеет всегда три корня над полем комплексным чисел (из которых всегда хотя бы один — вещественный). Все возможные случаи состава корней легко определить с помощью знака дискриминанта кубического уравнения, вычисляемого по формуле $D = -4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 + 18abcd - 27a^2d^2$. Напомним, что:

1) если $D > 0$, то данное уравнение имеет три различных вещественных корня;

2) если $D = 0$, то данное уравнение имеет три вещественных корня, среди которых, по крайней мере, два — совпавшие;

3) если $D < 0$, то уравнение имеет два комплексно сопряженных корня и один вещественный корень.

На практике решение кубического уравнения сводится к разложению на множители его правой части $az^3 + bz^2 + cz + d$. Алгоритм такого разложенияимеет вид:

1. Определяем один вещественный корень z_1 многочлена $az^3 + bz^2 + cz + d$, используя теорему (или следствие из нее) о наличие рациональных корней у многочлена.

Напомним, теорему о наличие рациональных корней у многочлена: если многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами такими, что $a_n \neq 0$, имеет рациональный корень $x_0 = \dfrac{p}{q}$, то p — делитель свободного члена a_0, а q —делитель коэффициента a_n. Следствиеже из данной теоремы утверждает, что, если a_n=1, то целые корни многочлена $P(x)$ следует искать только среди делителей свободного члена.

2. Делим многочлен az^3+bz^2+cz+d на $z-z_1$ уголком.

По следствию из теоремы Безу, если z_1 корень az^3+bz^2+cz+d, то данный многочлен должен поделиться на $z-z_1$ без остатка.

3. Получаем уравнение $(z-z_1)(\tilde{a}z^2+\tilde{b}z+\tilde{c})=0$ и решаем его.

Заметим, что определить можно только рациональный корень многочлена az^3+bz^2+cz+d, и то, если коэффициенты подобраны удачным образом, так что, на самом деле, этот корень зачастую просто угадывается. В связи с этим существуют универсальные методы решения кубических уравнений, основанные на формуле Кардано или тригонометрической формуле Виета. В данном пособии указанные методы не будут рассматриваться.

3.2. Примеры решения типовых задач

Задача 3.2.1. Решите уравнение $z^4+17z^2+16=0$.

Решение:

а) Нам дано биквадратное уравнение, оно решается методом замены переменной. Именно, полагая $z^2=t$, данное уравнение легко сводится к квадратному уравнению $t^2+17t+16=0$. Вычисляя дискриминант $D=17^2-4\cdot 16=225=15^2$, получаем $\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{-17+15}{2}=-1, \\ t_2=\dfrac{-17-15}{2}=-16. \end{array}\right.$ Вспоминая, что $z^2=t$, имеем $z^2=-1$, $z^2=-16$. Учитывая, что $i^2=-1$, заключаем, что

$$\left[\begin{array}{l} z^2=i^2, \\ z^2=16i^2, \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} z_{1,2}=\pm i, \\ z_{3,4}=\pm 4i. \end{array}\right.$$

Задача 3.2.2. Решите уравнения: а) $z^3-5z^2+9z-5=0$; б) $\dfrac{z-3\overline{z}}{4}=1+i$.

Решение:

а) Нам дано кубическое уравнение. Сначала определим один вещественный корень многочлена z^3-5z^2+9z-5. Если он имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена. Свободный член нашего многочлена, равный (–5), имеет четыре целых делителя: ±1 и ±5. Перебором замечаем, что $z_1=1$ является корнем уравнения. Поделим многочлен z^3-5z^2+9z-5 на двучлен $z-1$ уголком. По следствию из теоремы Безу данный многочлен должен поделиться без остатка на $z-1$. В самом деле,

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{l} z^3-5z^2+9z-5 \\ z^3-z^2 \end{array}} & \begin{array}{l} z-1 \\ \hline z^2-4z+5 \end{array} \\
\underline{-\begin{array}{l} -4z^2+9z-5 \\ -4z^2+4z \end{array}} & \\
\underline{-\begin{array}{l} 5z-5 \\ 5z-5 \end{array}} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $z^3-5z^2+9z-5=(z-1)(z^2-4z+5)$. А значит, исходное уравнение можно переписать в виде $(z-1)(z^2-4z+5)=0$, то есть $\left[\begin{array}{l} z_1=1, \\ z^2-4z+5=0. \end{array}\right.$

Решим теперь квадратное уравнение $z^2-4z+5=0$. Вычисляя дискриминант $D=(-4)^2-4\cdot 5=-4=(2i)^2$, получаем $\left[\begin{array}{l} z_2=\dfrac{4+2i}{2}=2+i, \\ z_3=\dfrac{4-2i}{2}=2-i. \end{array}\right.$

б) Решим уравнение $\dfrac{z-3\overline{z}}{4}=1+i$. Его легко решить подстановкой $z=x+iy$, учитывая, что $\overline{z}=x-iy$. Итак, имеем: $\dfrac{x+iy-3(x-iy)}{4}=1+i$ или $-\dfrac{x}{2}+iy=1+i$.

Учитывая определение равных комплексных чисел, переходим к системе двух уравнений $\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{x}{2}=1, \\ y=1. \end{array}\right.$ Таким образом, $x=-2$, а $y=1$. А значит, $z=-2+i$.

3.3. Индивидуальные домашние задания

1. Решите уравнения: а) $z^3+7z^2+19z+13=0$; б) $\dfrac{2z-6\overline{z}}{2}=7+i$.

2. Решите уравнения: а) $z^3+3z^2+4z-8=0$; б) $\dfrac{2z-5\overline{z}}{3}=3-i$.

3. Решите уравнения: а) $z^3-2z^2+16=0$; б) $\dfrac{7z-2\overline{z}}{4}=1-5i$.

4. Решите уравнения: а) $z^3-4z^2+z+26=0$; б) $\dfrac{z-4\overline{z}}{5}=i$.

5. Решите уравнения: а) $z^3-z^2+2=0$; б) $\dfrac{6z+5\overline{z}}{5}=1-i$.

6. Решите уравнения: а) $z^3+3z^2+4z+2=0$; б) $\dfrac{5z-3\overline{z}}{6}=2+i$.

7. Решите уравнения: а) $z^3+z^2+3z-5=0$; б) $\dfrac{z+3\overline{z}}{2}=1+i$.

8. Решите уравнения: а) $z^3-3z^2+7z-5=0$; б) $\dfrac{2z-\overline{z}}{3}=1-i$.

9. Решите уравнения: а) $z^3+10z^2+33z+34=0$; б) $\dfrac{z-2\overline{z}}{4}=-6+i$.

10. Решите уравнения: а) $z^3-6z^2+z+34=0$; б) $\dfrac{2z+3\overline{z}}{2}=2+3i$.

11. Решите уравнения: а) $z^3+4z^2-2z-20=0$; б) $\dfrac{2z-3\overline{z}}{2}=1-3i$.

12. Решите уравнения: а) $z^3-8z^2+22z-20=0$; б) $\dfrac{3z-4\overline{z}}{3}=2+i$.

13. Решите уравнения: а) $4z^3-8z^2+13z+25=0$; б) $\dfrac{3z-\overline{z}}{2}=3-i$.

14. Решите уравнения: а) $4z^3+16z^2+37z+25=0$; б) $\dfrac{3z+\overline{z}}{4}=3-i$.

15. Решите уравнения: а) $z^4+13z^2+36=0$; б) $\frac{z-6\overline{z}}{2}=1-2i$.

16. Решите уравнения: а) $z^4+10z^2+9=0$; б) $\frac{2z+\overline{z}}{3}=-1+i$.

17. Решите уравнения: а) $z^4+5z^2+4=0$; б) $\frac{z-2\overline{z}}{4}=-1-i$.

18. Решите уравнения: а) $z^4+20z^2+64=0$; б) $\frac{z-7\overline{z}}{2}=-2+i$.

19. Решите уравнения: а) $z^4+26z^2+25=0$; б) $\frac{2z+6\overline{z}}{3}=2+i$.

20. Решите уравнения: а) $z^4+29z^2+100=0$; б) $\frac{3z-7\overline{z}}{4}=5+i$.

21. Решите уравнения: а) $z^4+52z^2+576=0$; б) $\frac{7z-4\overline{z}}{2}=-1+i$.

22. Решите уравнения: а) $z^3+z^2-z+15=0$; б) $\frac{3z-\overline{z}}{9}=1-i$.

23. Решите уравнения: а) $z^3-z^2-7z+15=0$; б) $\frac{5z+4\overline{z}}{7}=2-i$.

24. Решите уравнения: а) $z^3-5z^2+11z-15=0$; б) $\frac{z-3\overline{z}}{2}=3+i$.

25. Решите уравнения: а) $z^3-7z^2+17z-15=0$; б) $\frac{2z-7\overline{z}}{4}=1-i$.

ГЛАВА 4.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕКНА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

4.1. Примеры решения типовых задач

Задача 4.2.1. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|z| \le \operatorname{Im} z + 1$; б) $\frac{1}{4} z \cdot \overline{z} = 1$; в) $\operatorname{Re}(z+1) = |z|$.

Решение:

а) Известно, что $z = x + iy$, поэтому $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\operatorname{Im} z = y$. А значит, из условия $|z| \le \operatorname{Im} z + 1$ получаем, что $\sqrt{x^2 + y^2} \le y + 1$. Из школьного курса математики хорошо известно, что данное иррациональное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 0, \\ y + 1 \ge 0, \\ x^2 + y^2 \le (y+1)^2. \end{cases}$$

Учитывая, что неравенство $x^2 + y^2 \ge 0$ выполняется для всех x, $y \in R$, получаем систему $\begin{cases} y \ge -1, \\ x^2 + y^2 \le y^2 + 2y + 1, \end{cases}$ или систему $\begin{cases} y \ge -1, \\ y \ge \dfrac{x^2 - 1}{2}. \end{cases}$

Неравенство $y \ge -1$ определяет множество всех точек (x, y), расположенных на прямой $y = -1$, а также выше этой прямой. Множество точек, удовлетворяющих неравенству $y \ge \frac{x^2 - 1}{2}$, представляет собой параболу $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ и часть плоскости, расположенную внутри этой параболы (этому условию удовлетворяет, например, точка (0, 0), так как $0 \ge \frac{0^2 - 1}{2}$).

Легко видеть, что парабола, заданная уравнением $y = \frac{x^2 - 1}{2}$, имеет ветви, направленные вверх, пересекает вещественную ось в точках (1, 0), (–1, 0) и имеет вершину в точке (x_0, y_0), где $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 0$, $y_0 = y(x_0) = y(0) = -\frac{1}{2}$. А значит, парабола $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ расположена выше прямой $y=-1$. Следовательно, множество точек, удовлетворяющих системе $\begin{cases} y \ge -1, \\ y \ge \dfrac{x^2-1}{2}, \end{cases}$ представляет собой параболу $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ и часть плоскости, расположенную внутри этой параболы (рис. 2).

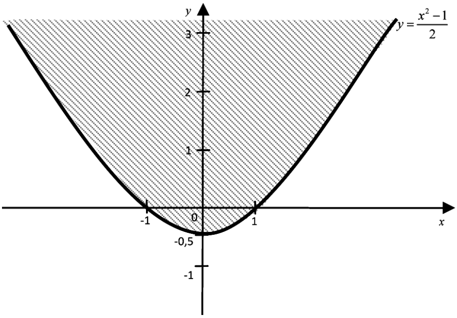

Рис. 2

б) Известно, что $z=x+iy$, поэтому $\overline{z}=x-iy$. А значит, из условия $\dfrac{1}{4}z\cdot\overline{z}=1$ получаем соотношение $(x+iy)(x-iy)=4$. Раскрывая скобки, имеем

$$x^2-i^2y^2=4.$$

Учитывая, что $i^2=-1$, получаем уравнение $x^2+y^2=4$.

Множество точек, удовлетворяющих условию $x^2+y^2=4$, представляет собой окружность радиуса $R=2$ с центром в начале координат (рис. 3).

в) Известно, что $z=x+iy$, поэтому $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, а $\mathrm{Re}(z+1)=x+1$. А значит, из условия $\mathrm{Re}(z+1)=|z|$ получаем, что $\sqrt{x^2+y^2}=x+1$. Из школьного курса математики хорошо известно, что данное иррациональное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1\ge 0, \\ x^2+y^2=(x+1)^2. \end{cases}$$

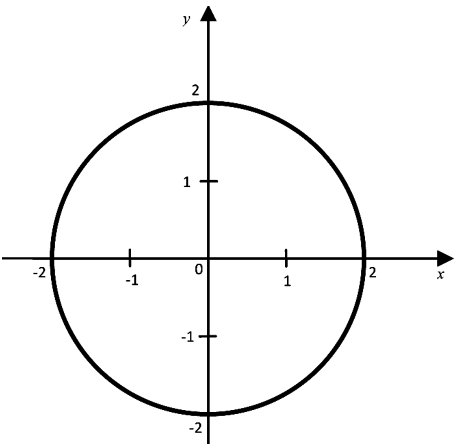

Рис. 3

Раскрывая скобки в уравнении системы получаем соотношение $x^2+y^2=x^2+2x+1$ или $x=\dfrac{y^2-1}{2}$. Окончательно имеем систему:

$$\begin{cases} x\ge -1, \\ x=\dfrac{y^2-1}{2}. \end{cases}$$

Неравенство $x\ge -1$ определяет множество всех точек (x, y), расположенных на прямой $x=-1$, а также правее этой прямой. Множество точек, удовлетворяющих уравнению $x=\dfrac{y^2-1}{2}$, представляет собой параболу, пересекающую мнимую ось в точках (0, 1), (0, –1), имеющую вершину в точке $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ и ветви, направленные вправо. А значит, парабола $x=\dfrac{y^2-1}{2}$ расположена правее прямой $x=-1$. Следовательно, множество точек, удовлетворяющих системе $\begin{cases} x \geq -1, \\ x=\dfrac{y^2-1}{2}, \end{cases}$ представляет собой параболу $x=\dfrac{y^2-1}{2}$ (рис. 4).

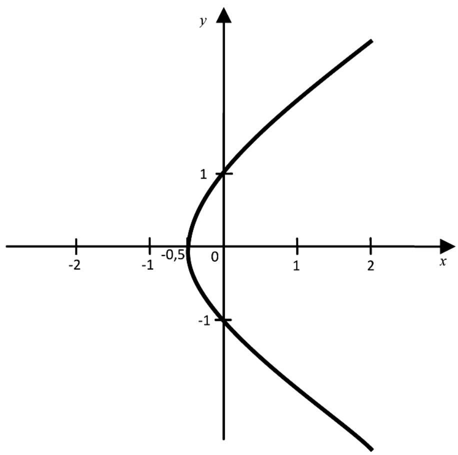

Рис. 4

4.2. Индивидуальные домашние задания

1. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z=x+iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $2<|z-1+2i|<4$; б) $\operatorname{Im}(1+z)=|z|$.

2. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z=x+iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $0<\operatorname{Im} z<1$; б) $\operatorname{Re} z+1=|z|$.

3. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z=x+iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\operatorname{Im} z^2=2$; б) $|z-2|<5$.

4. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $z^2 + \overline{z}^2 = 1$; б) $|z - 3| > 2$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\operatorname{Im}\big((1+i)z\big) = 0$; б) $|z - 2| < |1 - 2\overline{z}|$.

6. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\operatorname{Re} z^2 = 2$; б) $|z - i| > 1$.

7. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\arg(z - i) = \dfrac{\pi}{4}$; б) $|z - 3| \geq 1$.

8. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|z^2 - 1| = 4$; б) $\dfrac{\pi}{6} < \arg(z + 3i) < \dfrac{\pi}{2}$.

9. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $2z\overline{z} = 1$; б) $0 < \operatorname{Re} iz < 1$.

10. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|z| < 2 + \operatorname{Im} z$; б) $\operatorname{Re}\big(z^2 - \overline{z}\big) = 0$.

11. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|z - 2i| < 3$; б) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = 1$.

12. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)^2 < 1$; б) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.

13. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$; б) $\operatorname{Im}(1 + z) = |z|$.

14. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|2z - 1| < 3$; б) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4}$.

15. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|z - 2| < |1 - 3\overline{z}|$; б) $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$.

16. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|z+1+i|<1$; б) $-\frac{\pi}{4} < \arg(z+3i) < \frac{\pi}{6}$.

17. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; б) $|z| \geq 1$.

18. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|z|+1 = \operatorname{Im} z$; б) $|z-3+2i|<2$.

19. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $0 < \operatorname{Re} iz < 1$; б) $\operatorname{Re}(z+1) = |z|$.

20. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $4 \leq |z-1-i| \leq 8$; б) $\operatorname{Re} z < 1$.

21. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 2$; б) $|z-i|>1$.

22. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\operatorname{Re} z < -1$; б) $|z| - \operatorname{Im} z = 2$.

23. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\operatorname{Im}\frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$; б) $|z-1-i|<4$.

24. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $\operatorname{Im} z^2 < 1$; б) $\operatorname{Im}(1+3\bar{z}) = |z|$.

25. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих заданным условиям: а) $|z-2| < |1-\bar{z}|$; б) $2|z| - 2\operatorname{Re} z = 4$.

ГЛАВА 5.
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

5.1. Краткие теоретические сведения

Определение 5.1.1. ε — окрестностью точки z_0 комплексной плоскости называется внутренность круга радиуса ε с центром в точке z_0. Обозначение: $U_\varepsilon(z_0)$, где $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in C \big| |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Определение 5.1.2. Множество D точек комплексной плоскости будем называть областью, если множество D является открытым (то есть если для любой точки $z_0 \in D$ найдется ее ε — окрестность $U_\varepsilon(z_0)$ такая, что $U_\varepsilon(z_0) \subset D$ и связным (то есть если любые две разные точки $z_1,\ z_2 \in D$ можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в D).

Если однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z и существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z)$, то указанный предел называется производной функции $f(z)$ в точке z, а функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z.

Напомним, что если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где функции $u(x, y)$ и и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $z = (x, y)$, то для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись условия Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Определение 5.1.3. Однозначнуюфункцию $w = f(z)$ будем называть аналитической в точке z_0, если она дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности данной точки z_0. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в области D, если она однозначная и дифференцируемая в каждой точке этой области.

Из последнего определения ясно, что понятие аналитичности идифференцируемости в области совпадают, в то время как условие аналитичности в точке является более сильным, чем условие дифференцируемости в точке (так как условие аналитичности в точке требует, чтобы функция была дифференцируема не только в этой точке, но и в некоторой ее окрестности).

Рассмотрим две комплексные плоскости z (или Oxy) и w (или Ouv). Напомним, что с помощью однозначной аналитической функции $w = f(z)$ можно отобразить точку z_0 комплексной плоскости z в определенную точку $w_0 = f(z_0)$ комплексной плоскости w. Точку $w_0 = f(z_0)$ называют образом точки z_0, а z_0 — прообразом w_0. Кривая плоскости z с помощью функции

$w=f(z)$ отображается в кривую плоскости w. Первая кривая называется также прообразом, а вторая — образом. Ясно, что область плоскости z с помощью функции $w=f(z)$ отображается в область плоскости w. Первая область называется прообразом, а вторая — образом.

Отображение одной плоскости на другую называется конформным в точке z, если все бесконечно малые дуги, выходящие из этой точки, при отображении поворачиваются на один и тот же угол и получают одно и то же растяжение (сжатие). Иными словами, при конформном отображении сохраняется подобие в бесконечно малых частях. При этом отображение с помощью аналитической функции является конформным везде, кроме, быть может, точек, в которых производная данной аналитической функцииравна нулю.

Одной из основных задач теории конформных отображений является задача нахождения образа заданной кривой (или заданной области) при известной функции $w=f(z)$. Существует целый ряд функций, для которых известно решение упомянутой задачи. Но в данном пособии будет рассматриваться только задача нахождения образа заданной кривой при известной линейной функции $w=az+b$.

Отображение, осуществляемое линейной функцией $w=az+b$, где $a\neq 0$ и b — постоянные комплексные числа, является конформным на всей комплексной плоскости. Оно преобразует прямые в прямые (при этом, углы между прямыми сохраняются) и окружности в окружности.

5.2. Примеры решения типовых задач

Задача 5.2.1. Найдите образ кривой $x^2-3y-1=0$ при отображении $w=2-z$.

Решение:

Пусть $z=x+iy$. Тогда функция $w=2-z$ будет иметь вид

$$w=2-z=(2-x)+(-y)i$$

Учитывая, что задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных, то есть, что данную функцию можно записать в виде $w=u(x,y)+iv(x,y)$,

имеем $\begin{cases} u(x,y)=2-x, \\ v(x,y)=-y. \end{cases}$

Решим полученную систему совместно с уравнением заданной кривой, принимая во внимание, что $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$.

Итак, $\begin{cases} u = 2 - x, \\ v = -y, \\ x^2 - 3y - 1 = 0. \end{cases}$ Выражая u и v через x, y и подставляя полученное в третье уравнение системы, получаем $\begin{cases} x = 2 - u, \\ y = -v, \\ (2-u)^2 - 3(-v) - 1 = 0. \end{cases}$ Последнее уравнение указанной системы приобретает вид $4 - 4u + u^2 + 3v - 1 = 0$ или $u^2 - 4u + 3v + 3 = 0$.

Таким образом, соотношение $u^2 - 4u + 3v + 3 = 0$ задает кривую, являющуюся образом кривой $x^2 - 3y - 1 = 0$ при отображении $w=2-z$.

5.3. Индивидуальные домашние задания

1. Найдите образ кривой $2x + y^2 = 1$ при отображении $w = 2z + 3i$.
2. Найдите образ кривой $x^2 - 2y + 1 = 0$ при отображении $w = -2z + 3$.
3. Найдите образ кривой $x^2 - (y+2)^2 = 1$ при отображении $w = iz + 2$.
4. Найдите образ кривой $x^2 + y - 4 = 0$ при отображении $w = 2z - i$.
5. Найдите образ кривой $(x-1)^2 + y^2 = 2$ при отображении $w = 3z + i$.
6. Найдите образ кривой $x^2 + (y-1)^2 = 3$ при отображении $w = 5z - i$.
7. Найдите образ кривой $x^2 = y - 3$ при отображении $w = z + 3i$.
8. Найдите образ кривой $2x^2 + y^2 = 4$ при отображении $w = 2z - 1$.
9. Найдите образ кривой $y^2 = 3x + 1$ при отображении $w = 3z - 5$.
10. Найдите образ кривой $x = 3y^2 - 1$ при отображении $w = iz + 3$.
11. Найдите образ кривой $y = 3x^2 + 1$ при отображении $w = 5z + 2i$.
12. Найдите образ кривой $(x+1)^2 - y = 2$ при отображении $w = iz - 1$.
13. Найдите образ кривой $(x-2)^2 + y^2 = 1$ при отображении $w = 4z + 3$.
14. Найдите образ кривой $x^2 - 3y + 5 = 0$ при отображении $w = 2iz - 1$.
15. Найдите образ кривой $x + 3y^2 = 4$ при отображении $w = 3iz + 1$.
16. Найдите образ кривой $x^2 + (y+2)^2 = 5$ при отображении $w = 2z + i$.
17. Найдите образ кривой $x + 3y^2 - 7 = 0$ при отображении $w = z - 4i$.

18. Найдите образ кривой $x^2 - y^2 = 4$ при отображении $w = z + 5i$.

19. Найдите образ кривой $2x^2 - y + 5 = 0$ при отображении $w = z - 3i$.

20. Найдите образ кривой $3x^2 - y^2 + 1 = 0$ при отображении $w = 3z - i$.

21. Найдите образ кривой $(x-1)^2 2 + y - 3 = 0$ при отображении $w = 5z + 2$.

22. Найдите образ кривой $(x+2)^2 - y = 1$ при отображении $w = 3z - 1$.

23. Найдите образ кривой $x^2 + (y+3)^2 = 1$ при отображении $w = iz - 7$.

24. Найдите образ кривой $x^2 + (y-1)^2 = 2$ при отображении $w = 2iz + 3$.

25. Найдите образ кривой $x^2 + 5y - 1 = 0$ при отображении $w = 3iz - 1$.

ГЛАВА 6.
ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

6.1. Примеры решения типовых задач

Задача 6.1.1. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=2x-3y$, $f(0)=i$.

Решение:

Нам задана аналитическая функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где ее действительная часть $u(x, y)$ известна, а мнимая часть $v(x, y)$ — нет. Найдем $v(x, y)$, используя условия Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Учитывая, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(2x-3y)_x'=2$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, получаем, что $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2$. Интегрируя последнее соотношение по y, считая x постоянной, имеем:

$$v(x,y)=\int 2dy=2y+C(x),$$

где $C(x)$ произвольная дифференцируемая по x функция. Найдем теперь $C(x)$. Продифференцировав полученное соотношение по x, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(2y+C(x)\right)_x'=C'(x).$$

Учитывая условие $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$, заключаем, что $C'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ $=-(2x-3y)_y'=3$. Найдем $C(x)$, проинтегрировав полученное по x:

$$C(x)=\int 3dx=3x+C, \text{ где } C\in R.$$

Подставляя $C(x)=3x+C$ в соотношение $v(x,y)=2y+C(x)$, имеем

$$v(x,y)=2y+3x+C.$$

А значит, заданная функция $f(z)$ найдена с точностью до константы и имеет вид

$$f(z)=(2x-3y)+i(2y+3x+C).$$

Найдем конкретное значение константы C, используя начальное условие $f(0)=i$. В самом деле, подставляя указанное условие в найденную функцию $f(z)$, получаем соотношение $i=0+i(0+C)$, то есть $C=1$. Таким образом, функция $f(z)$ может быть переписана в виде $f(z)=(2x-3y)+i(2y+3x+1)$.

Группируя слагаемые, выразим результат через переменную z:

$$f(z)=2x+i2y+i3x-3y+i=2(x+iy)+3i(x+yi)+i=2z+3iz+i=z(2+3i)+i$$

Получена линейная функция переменной z.

6.2. Индивидуальные домашние задания

1. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}, f(2)=0.$

2. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=y^2-3x^2y\cdot$

3. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=-\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}.$

4. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}+2x.$

5. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y},\ x>0.$

6. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=3x^2y-y^3.$

7. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=e^x\sin y+1.$

8. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=e^x\cos y+1.$

9. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}, f(\pi)=\dfrac{1}{\pi}.$

10. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}, f(1)=1.$

11. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}, f(2)=0.$

12. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3, f(0)=0.$

13. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=\frac{x}{x^2+y^2}-y.$

14. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=2\cos x\cdot \operatorname{ch} y-x^2+y^2$, $f(0)=2.$

15. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=-2\sin 2x\cdot \operatorname{sh} 2y+y$, $f(0)=2.$

16. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=x^2-y^2+2x$, $f(i)=2i-1.$

17. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=2(\operatorname{ch} x\cdot \sin y-xy)$, $f(0)=0.$

18. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=\frac{x}{x^2+y^2}-2y.$

19. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=e^x(y\cdot \cos y+x\cdot \sin y).$

20. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=2\sin x\cdot \operatorname{ch} y-x$, $f(0)=0.$

21. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=2(x^2-y^2).$

22. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=y-\frac{x}{x^2+y^2}.$

23. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=e^x\cos 2y+x.$

24. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $v=y+e^x\sin 2y.$

25. Восстановите аналитическую функцию $f(z)=u+iv$, если $u=3(x^2-y^2).$

ГЛАВА 7.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПО ОТРЕЗКУ

7.1. Краткие теоретические сведения

Пусть $f(z)$ непрерывная функция в области D комплексной плоскости, а L — кривая, лежащая в области D с началом в точке z_0 и концом в точке z_n. Разобьем кривую L произвольным образом на n «элементарных дуг» $\overset{\frown}{z_0 z_1}, \overset{\frown}{z_1 z_2}, \ldots, \overset{\frown}{z_{n-1} z_n}$ точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. В каждой такой дуге $\overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$, где $k = \overline{1, n}$, выберем произвольную точку γ_k и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\gamma_k)\Delta z_k, \text{ где } \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Предел такой интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшей из элементарныхдуг, если он существует, называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой L и обозначается символом $\int\limits_L f(z)dz$.

Если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то вычисление указанного интеграла сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных, то есть имеет место соотношение:

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_L v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

7.2. Примеры решения типовых задач

Задача 7.2.1. Вычислите интеграл от функции $f(z) = x - iy$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 + 3i$.

Решение:

Нам известно, что если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_L v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

В нашем случае $u(x,y) = x$, а $v(x,y) = -y$. Составим уравнение прямой, проходящей через точки $z_1 = (1,\ 1)$ и $z_2 = (2,\ 3)$. Напомним, что канонические уравнения прямой на плоскости имеют вид: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

То есть прямая (z_1z_2) задается уравнением $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-1}{3-1}$ или $y=2x-1$. Учитывая, что $x\in[1;2]$, а $dy=2dx$, получаем

$$\int\limits_{[z_1z_2]} f(z)dz=\int\limits_{[z_1z_2]} xdx+ydy+i\int\limits_{[z_1z_2]}(-y)dx+xdy=$$

$$=\int_1^2\left(x+(2x-1)2\right)dx+i\int_1^2(-2x+1+2x)dx=$$

$$=\int_1^2(5x-2)dx+i\int_1^2 dx=\left(\frac{5x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^2+i\,x\Big|_1^2=$$

$$=\left(\frac{5\cdot2^2}{2}-2\cdot2\right)-\left(\frac{5\cdot1^2}{2}-2\cdot1\right)+i(2-1)=$$

$$=6-0,5+i=5,5+i.$$

Задача 7.2.2. Вычислите интеграл от функции $f(z)=x^2+2iy$ по отрезку прямой, соединяющей точки z_1=1 и z_2=1+3i.

Решение:

В этой задаче $u(x,y)=x^2$, а $v(x,y)=2y$. Составим уравнение прямой, проходящей через точки z_1=(1, 0) и z_2=(1, 3). В данном случае прямая (z_1 z_2) задается уравнением $\dfrac{x-1}{1-1}=\dfrac{y-0}{3-0}$ или x=1. Учитывая, что $y\in[0;3]$, а $dx=0$ получаем

$$\int\limits_{[z_1z_2]} f(z)dz=\int\limits_{[z_1z_2]} x^2\cdot0-2ydy+i\int\limits_{[z_1z_2]} 2y\cdot0+x^2dy=$$

$$=\int_0^3(-2y)dy+i\int_1^2 x^2dy=-2\int_0^3 ydy+i\int_1^2 dy=$$

$$=-y^2\Big|_0^3+i\,y\Big|_0^3=-(9-0)+i(3-0)=-9+3i.$$

7.3. Индивидуальные домашние задания

1. Вычислите интеграл от функции $f(z)=x^2+iy$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1=i$ и $z_2=1-i$.

2. Вычислите интеграл от функции $f(z)=x-iy^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1=1$ и $z_2=1+i$.

3. Вычислите интеграл от функции $f(z) = x - iy$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 + 3i$.

4. Вычислите интеграл от функции $f(z) = 3ix - y^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 3$ и $z_2 = 2 + i$.

5. Вычислите интеграл от функции $f(z) = x + y - 2i$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = -i$ и $z_2 = i$.

6. Вычислите интеграл от функции $f(z) = x^2 - 2iy$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 2$ и $z_2 = i$.

7. Вычислите интеграл от функции $f(z) = 3ix^2 + y$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = i - 1$ и $z_2 = 1$.

8. Вычислите интеграл от функции $f(z) = 2x - 3y^2 i$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = i$ и $z_2 = 2i + 3$.

9. Вычислите интеграл от функции $f(z) = x^2 + 3yi$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = i - 1$ и $z_2 = 2$.

10. Вычислите интеграл от функции $f(z) = 3x - y^2 i$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 2$ и $z_2 = i - 1$.

11. Вычислите интеграл от функции $f(z) = x^2 + 5iy + 1$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 3$ и $z_2 = 2 + i$.

12. Вычислите интеграл от функции $f(z) = x - 2 + iy^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = i$ и $z_2 = -1 + 2i$.

13. Вычислите интеграл от функции $f(z) = x + 2iy^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 2i$ и $z_2 = 1 - 3i$.

14. Вычислите интеграл от функции $f(z) = 3x^2 - iy$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 - i$.

15. Вычислите интеграл от функции $f(z) = 3x - 2iy^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 4 + i$ и $z_2 = 2i$.

16. Вычислите интеграл от функции $f(z) = 5x^2 - iy$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 3$ и $z_2 = 2 + i$.

17. Вычислите интеграл от функции $f(z) = 1 - x + iy^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = 5$ и $z_2 = 4 + i$.

18. Вычислите интеграл от функции $f(z) = 2 + y - ix^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = i$ и $z_2 = 1 + 2i$.

19. Вычислите интеграл от функции $f(z)=(3-i)x+1$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1=-i$ и $z_2=1-2i$.

20. Вычислите интеграл от функции $f(z)=2iy+x^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1=3$ и $z_2=1+i$.

21. Вычислите интеграл от функции $f(z)=x^2+i(y-1)$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1=2$ и $z_2=3i$.

22. Вычислите интеграл от функции $f(z)=ix-2+y^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1=2i$ и $z_2=1+i$.

23. Вычислите интеграл от функции $f(z)=(2+i)x-y^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1=3i$ и $z_2=1-i$.

24. Вычислите интеграл от функции $f(z)=i(x-1)+y^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1=1+2i$ и $z_2=1+i$.

25. Вычислите интеграл от функции $f(z)=3ix-5y^2$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1=i-2$ и $z_2=-i$.

ГЛАВА 8.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

8.1. Краткие теоретические сведения

Пусть $f(z)$ непрерывная функция в области D комплексной плоскости, а L — кривая, лежащая в области D с началом в точке и концом в точке Z.

Напомним, что $f(z)$ если функция является аналитической в односвязной области D (т.е. в области «без дыр»), то интеграл от нее не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки Z пути интегрирования. В таких случаях пользуются обозначением

$$\int_L f(z)dz = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz.$$

Если в указанной формуле зафиксировать точку z_0, а точку Z изменять, то $\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ будет являться функцией от Z. Обычно эту функцию обозначают через $F(z) = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz$. При этом, функция $F(z)$ называется первообразной для функции $f(z)$ в области D, если $F'(z) = f(z)$.

При указанных условиях интеграл $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.

Отметим, что интегралы от основных элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул иметодов интегрирования, что и в действительном анализе.

8.2. Примеры решения типовых задач

Задача 8.2.1. Вычислите интеграл $\int_i^1 (2z-3)^3\,dz$.

Решение: Для того чтобы вычислить данный интеграл воспользуемся методом подведения под знак дифференциала:

$$\int_i^1 (2z-3)^3\,dz = \left[d(2z-3) = 2dz\right] = \frac{1}{2}\int_i^1 (2z-3)^3\,2dz = \frac{1}{2}\int_i^1 (2z-3)^3\,d(2z-3) =$$

$$= \left.\frac{(2z-3)^4}{8}\right|_i^1 = \frac{(-1)^4 - (2i-3)^4}{8} = \frac{(i)^4 - \left((2i-3)^2\right)^2}{8} = \frac{1-\left(4i^2-12i+9\right)^2}{8} =$$

$$= \frac{1-(5-12i)^2}{8} = \frac{1-25+120i-144i^2}{8} = \frac{120+120i}{8} = 15+15i.$$

Задача 8.2.2. Вычислите интеграл $\int\limits_{i}^{1} 3ze^{z^2}\,dz$.

Решение:

Используя метод подведения под знак дифференциала, имеем:

$$\int\limits_{i}^{1} 3ze^{z^2}\,dz = \frac{3}{2}\int\limits_{i}^{1} e^{z^2}\,2zdz = \left[d\left(z^2\right) = 2zdz\right] = \frac{3}{2}\int\limits_{i}^{1} e^{z^2}\,d\left(z^2\right) = \frac{3}{2}e^{z^2}\Big|_{i}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(e^{1^2} - e^{i^2}\right) = \frac{3}{2}\left(e - e^{-1}\right) = 3\cdot \operatorname{sh}1.$$

8.3. Индивидуальные домашние задания

1.Вычислите интеграл $\int\limits_{1}^{i} e^{3z-1}dz$.

2.Вычислите интеграл $\int\limits_{1+i}^{3}\left(2z^3 - 1\right)dz$.

3.Вычислите интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{5}}^{\pi i}\sin\left(5z+1\right)dz$.

4.Вычислите интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 3z dz$.

5.Вычислите интеграл $\int\limits_{1}^{i} ze^{z^2}\,dz$.

6.Вычислите интеграл $\int\limits_{5}^{i}\left(z-3\right)^3 dz$.

7.Вычислите интеграл $\int\limits_{1}^{i}\frac{\ln\left(z+2\right)}{z+2}dz$.

8.Вычислите интеграл $\int\limits_{2}^{i}\left(z^2 - 2z + 3\right)dz$.

9.Вычислите интеграл $\int\limits_{i}^{-1} \sin(5z+1)\,dz$.

10.Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{1} \cos(z+i)\,dz$.

11.Вычислите интеграл $\int\limits_{\sqrt{3}}^{i} z^2 e^{z^3}\,dz$.

12.Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{1} (i-z)^2\,dz$.

13.Вычислите интеграл $\int\limits_{i}^{1} \frac{\ln(z-3)}{z-3}\,dz$.

14.Вычислите интеграл $\int\limits_{i+1}^{2} \left(2-z+z^2\right)dz$.

15.Вычислите интеграл $\int\limits_{i}^{2} z\cdot \sin z^2\,dz$.

16.Вычислите интеграл $\int\limits_{2}^{i} (z-1)e^{(z-1)^2}\,dz$.

17.Вычислите интеграл $\int\limits_{i}^{1} \frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}\,dz$.

18.Вычислите интеграл $\int\limits_{-i}^{1} (z+2)^2\, e^{(z+2)^3}\,dz$.

19.Вычислите интеграл $\int\limits_{1+i}^{i} (z-5)^3\,dz$.

20.Вычислите интеграл $\int\limits_{\frac{i}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(1-2z)\,dz$.

21.Вычислите интеграл $\int\limits_{-1}^{i}\cos(1+z)\,dz$.

22.Вычислите интеграл $\int\limits_{3}^{i}\frac{\ln(z-1)}{z-1}dz$.

23.Вычислите интеграл $\int\limits_{1+i}^{2}\left(2+z-z^2\right)dz$.

24.Вычислите интеграл $\int\limits_{1+i}^{1}z^2\cdot\sin z^3\,dz$.

25.Вычислите интеграл $\int\limits_{1}^{i}\cos(i-2z)\,dz$.

ГЛАВА 9.
ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

9.1. Краткие теоретические сведения

Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой односвязной (т.е. «без дыр») области D, ограниченной кривой L, то справедливаинтегральная формула Коши

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

или

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\cdot f(z_0).$$

где $z_0 \in D$ — произвольная точка внутри области D, а интегрирование по кривой L производится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки. Интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ называется интегралом Коши.

Интегральная формула Коши является одной из важнейших в теории функций комплексного переменного, так как она позволяет находить значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0, лежащей внутри области D через ее значения на границе данной области.

9.2. Примеры решения типовых задач

Задача 9.2.1. С помощью интегральной формулы Коши вычислите интеграл $\oint_L \frac{e^z}{z(z-2i)}dz$, если: а) $L=\{z\in C \,\|z-2i|=2\}$; б) $L=\{z\in C\,\|z|=1\}$.

Решение:

а) Перепишем данный интеграл в виде $\oint_L \frac{e^z}{z(z-2i)}dz = \oint_L \frac{\frac{e^z}{z}}{z-2i}dz.$

Нетрудно видеть, что функция $f(z)=\frac{e^z}{z}$ является аналитической всюду в области D, ограниченной замкнутой кривой $L=\{z\in C\,\|z-2i|=2\}$, а точка $z_0=2i=(0,\ 2)\in D$. Итак, учитывая интегральную формулу Коши, имеем:

$$\oint_L \frac{e^z}{z(z-2i)}dz = \oint_L \frac{\frac{e^z}{z}}{z-2i}dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z}\right)\Bigg|_{z=2i} = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi e^{2i} = \pi(\cos 2 + i \cdot \sin 2).$$

б) Перепишем данный интеграл в виде $\oint_L \frac{e^z}{z(z-2i)}dz = \oint_L \frac{\frac{e^z}{z-2i}}{z}dz.$

Нетрудно видеть, что функция $f(z) = \frac{e^z}{z-2i}$ является аналитической всюду в области D, ограниченной замкнутой кривой $L = \{z \in C \| z| = 1\}$, а точка $z_0 = 0 = (0,\ 0) \in D$. Итак, учитывая интегральную формулу Коши, имеем:

$$\oint_L \frac{e^z}{z(z-2i)}dz = \oint_L \frac{\frac{e^z}{z-2i}}{z}dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z-2i}\right)\Bigg|_{z=0} = 2\pi i \frac{e^0}{0-2i} = -\pi.$$

9.3. Индивидуальные домашние задания

С помощью интегральной формулы Коши вычислите интегралы:

1. $\oint_L \frac{\sin\pi(z-i)}{z^2-4z+3}dz$, если: а) $L = \{z \in C \| z| = 2\}$; б) $L = \{z \in C \| z+2i| = 1\}$.

2. $\oint_L \frac{e^{-zi}}{z^2-3z}dz$, если: а) $L = \{z \in C \| z-1| = 0{,}5\}$; б) $L = \{z \in C \| z| = 1\}$.

3. $\oint_L \frac{\sin z}{z^2-5z+6}dz$, если: а) $L = \{z \in C \| z-2| = 0{,}25\}$; б) $L = \{z \in C \| z-3| = 0{,}25\}$.

4. $\oint_L \frac{\sin z}{z^2-3z+2}dz$, если: а) $L = \{z \in C \| z| = 0{,}5\}$; б) $L = \{z \in C \| z| = 1{,}5\}$.

5. $\oint_L \frac{dz}{z(z-(1+i))}$, если: а) $L = \{z \in C \| z-(i+1)| = 1\}$; б) $L = \{z \in C \| z| = 0{,}5\}$.

6. $\oint_L \frac{e^{-zi}}{z^2+1}dz$, если: а) $L = \{z \in C \| z-i| = 0{,}5\}$; б) $L = \{z \in C \| z+i| = 1\}$.

7. $\oint_L \frac{\operatorname{ch} iz}{z(z-i)}dz$, если: а) $L = \{z \in C \| z-i| = 0{,}5\}$; б) $L = \{z \in C \| z| = 0{,}5\}$.

8. $\oint\limits_L \frac{\cos\pi z}{z(z-2)}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z-2|=1\}$.

9. $\oint\limits_L \frac{\cos\pi z}{z^2+3z+2}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z+1|=0{,}5\}$; б) $L=\{z\in C \| z+2|=0{,}5\}$.

10. $\oint\limits_L \frac{e^{-zi}}{z^2+1}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-i|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z|=0{,}5\}$.

11. $\oint\limits_L \frac{\sin\pi z}{(z-i)(z+3)}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z+3|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z-i|=0{,}5\}$.

12. $\oint\limits_L \frac{\sin\pi(z-1)}{z^2-4z+3}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-3|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z-1|=1\}$.

13. $\oint\limits_L \frac{e^{zi}}{z^2+1}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-i|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z+i|=1\}$.

14. $\oint\limits_L \frac{\operatorname{sh}(z+1)}{(z-1)(z-2)}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-1|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z-2|=1\}$.

15. $\oint\limits_L \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2-1}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-1|=0{,}5\}$; б) $L=\{z\in C \| z+1|=0{,}5\}$.

16. $\oint\limits_L \frac{e^{\pi z}}{z^2+2z}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z+2|=1\}$.

17. $\oint\limits_L \frac{e^{z^2}}{(z-i)(z+2i)}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-i|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z|=0{,}5\}$.

18. $\oint\limits_L \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z+i|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z-i|=1\}$.

19. $\oint\limits_L \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z-i)(z+2)}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-i|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z+2|=1\}$.

20. $\oint\limits_L \frac{dz}{z(z-(1-i))}$, если: а) $L=\{z\in C \| z-(1-i)|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z-2|=0{,}5\}$.

21. $\oint\limits_L \frac{e^{iz}}{z^2+4}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z+2i|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z-2i|=1\}$.

22. $\oint\limits_L \frac{\sin \pi z}{(z-1)(z-i)}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-1|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z-i|=1\}$.

23. $\oint\limits_L \frac{\operatorname{sh} iz}{(z-1)(z+i)}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-i|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z+i|=1\}$.

24. $\oint\limits_L \frac{\operatorname{ch} zi}{z^2-iz}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z-i|=1\}$.

25. $\oint\limits_L \frac{\sin(z-i)}{(z+i)(z-i)}dz$, если: а) $L=\{z\in C \| z-i|=1\}$; б) $L=\{z\in C \| z+i|=1\}$.

ГЛАВА 10.
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

10.1. Краткие теоретические сведения

Определение 10.1.1. Ряд вида $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$, членами которого являются комплексные числа, называется числовым рядом с комплексными членами. Общим членом указанного ряда называется комплексное число $z_n = a_n + ib_n$, где $a_n,\ b_n \in R$.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ с комплексными членами $z_n = a_n + ib_n$ можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + ib_n) = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots + (a_n + ib_n) + \ldots,$$

где $a_n,\ b_n \in R,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Определение 10.1.2. Сумма $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + ib_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k$ первых n членов ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ называется n-й частичной суммой данного ряда. Последовательность сумм $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$ называется последовательностью частичных сумм ряда. Если существует конечный предел S последовательности частичных сумм ряда такой, что $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ называется сходящимся, а S — суммой данного ряда. В противном случае ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ называется расходящимся.

Напомним, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ и с действительными членами. При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 — сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, а S_2 — сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. В противном случае ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ расходится.

При исследовании на сходимость ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ с комплексными членами нужно: 1) определить $\operatorname{Re} z_n = a_n$ и $\operatorname{Im} z_n = b_n$; 2) составить ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ и исследовать их на сходимость, как ряды с действительными членами. Для исследования можно использовать все известные нам из действительного анализа признаки сходимости рядов. Если оба указанных ряда сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ сходится. Если хотя бы один из рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ или $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ расходится.

Определение 10.1.3. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ с комплексными членами называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$, где $|z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ расходится, то данный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ называется условно сходящимся.

Чтобы исследовать ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ с комплексными членами на абсолютную сходимость нужно: 1) составить ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$, членами которого являются модули членов данного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$; 2) исследовать полученный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ на сходимость, как ряд с действительными положительными членами (для этого могут быть использованы все известные нам из действительного анализа признаки сходимости таких рядов). Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ сходится абсолютно. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ может быть либо расходящимся, либо сходящимся.

10.2. Примеры решения типовых задач

Задача 10.2.1. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin in}{3^n}$.

Решение:

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$, то есть ряд вида $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin in}{3^n}$. Учитывая, что $z_n = \frac{|\sin in|}{3^n}$ и $z_{n+1} = \frac{|\sin i(n+1)|}{3^{n+1}} = \frac{|\sin i(n+1)|}{3^n \cdot 3}$, применим к указанному ряду признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{|\sin i(n+1)|}{3^n \cdot 3}}{\dfrac{|\sin in|}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\sin i(n+1)|}{3|\sin in|}.$$

Так как $\operatorname{sh} z = -i \cdot \sin iz$ или $\sin iz = i \cdot \operatorname{sh} z$, имеем: $\sin in = i \cdot \operatorname{sh} n = = i \cdot \dfrac{e^n - e^{-n}}{2}$ и $\sin i(n+1) = i \cdot \operatorname{sh}\,(n+1) = i \cdot \dfrac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{2}$. А значит,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|i\cdot\dfrac{e^{n+1}-e^{-n-1}}{2}\right|}{3\left|i\cdot\dfrac{e^n-e^{-n}}{2}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|e^{n+1}-e^{-n-1}\right|}{3\left|e^n-e^{-n}\right|} = \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n+1}\left|1-\dfrac{1}{e^{2n+2}}\right|}{e^n\left|1-\dfrac{1}{e^{2n}}\right|} = \frac{e}{3} < 1.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ сходится, то есть исходный рядсходится абсолютно.

Задача 10.2.2. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(i)^n}{n}$.

Решение:

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|z_n|$, то есть ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{|i|^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$. Указанный ряд является гармоническим. А значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ расходится. Это означает, что исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z_n$ может быть либо расходящимся, либо сходящимся.

Выпишем члены данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(i)^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \frac{1}{8} + \frac{i}{9} - \frac{1}{10} - \ldots$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \ldots\right) + \left(i - \frac{i}{3} + \frac{i}{5} - \frac{i}{7} + \frac{i}{9} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n} + i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Итак, $\operatorname{Re} z_n = a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n}$, а $\operatorname{Im} z_n = b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Исследуем ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ на сходимость, как ряды с действительными членами.

Ряды $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ и $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ и сходятся по признаку Лейбница, так как $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)=0,$ $\lim_{n\to+\infty}|b_n|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\right)=0$ и последовательности абсолютных величин членов указанных рядов монотонно убывают. В самом деле,

$$|a_1|=\frac{1}{2}>|a_2|=\frac{1}{4}>\ldots>|a_n|=\frac{1}{2n}>\ldots$$

$$\text{и } |b_1|=1>|b_2|=\frac{1}{3}>\ldots>|b_n|=\frac{1}{2n-1}>\ldots .$$

Таким образом, исходный ряд сходится условно.

10.3. Индивидуальные домашние задания

1. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{n}+i\sin\sqrt{n}}{n^2}$.

2. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{i(2n+i)}{4n}\right)^n$.

3. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2+i)^n n}{2^n}$.

4. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3-i}{2}\right)^n$.

5. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}$.

6. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+i}{4n}\right)^n$.

7. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos in\pi}{2^n}$.

8. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos in}{3^n}$.

9. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$.

10. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt{n+in}}$.

11. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!(e-i)^n}$.

12. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$.

13. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2+i}{3}\right)^n$.

14. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3+2n}{5}\right)^n$.

15. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+3i}{4n+5}$.

16. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+i}{4}\right)^n$.

17. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{(n+i)^2}$.

18. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{i}{4}\right)^{n+2}$.

19. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i}{n^2}$.

20. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2i}{4}\right)^n$.

21.Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+i}{n^2}$.

22.Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3i}{4}\right)^{2n}$.

23.Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i \cdot \sin\sqrt{n}}{n^2}$.

24.Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$.

25.Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i \cdot \cos\sqrt{n}}{n^2}$.

ГЛАВА 11.
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

11.1. Краткие теоретические сведения

Определение 11.1.1. Ряд вида $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$, членами которого являются функции комплексногопеременного, называется функциональным рядом в комплекснойплоскости. Общим членом указанного ряда называется функция $f_n(z)$.

Для всякого комплексного числа z_0 ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$ будет являться числовым; если указанный ряд сходится и его сумма равна $S(z_0)$, то говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ сходится в точке z_0.

Определение 11.1.2. Область $D \subset C$ всех точек z, в которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$, называют областью сходимости этого ряда.

Для нахождения области сходимости функционального ряда, можно использовать известные признаки сходимости числовых рядов. Так, можно найти пределы $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} = |f(z)|$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = |f(z)|$. Согласно признакам Даламбера (в первом случае) и Коши (во втором случае) область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ образуют те точки z, для которых $|f(z)| < 1$.

11.2. Примеры решения типовых задач

Задача 11.2.1. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-2)^n}$.

Решение:

Для отыскания области абсолютной сходимости исходного ряда применим признак Коши. В самом деле, учитывая, что $|f_n(z)| = \frac{1}{|z-2|^n}$, имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|f_n(z)\right|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\left|z-2\right|^n}}=\frac{1}{\left|z-2\right|}.$$

Область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-2)^n}$ образуют те точки $z\in C$, для которых $\frac{1}{\left|z-2\right|}<1$, то есть $\left|z-2\right|>1$. Известно, что $z=x+iy$, поэтому $\left|z-2\right|=\left|(x-2)+iy\right|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$. А значит, из условия $\left|z-2\right|>1$ получаем, что $\sqrt{(x-2)^2+y^2}>1$. Из школьного курса математики хорошо известно, что данное иррациональное неравенство равносильно неравенству $(x-2)^2+y^2>1$. Итак, область абсолютной сходимости заданного ряда представляет собой внешность круга радиуса 1 с центром в точке $z_0=2=(2,\ 0)$ (рис. 5).

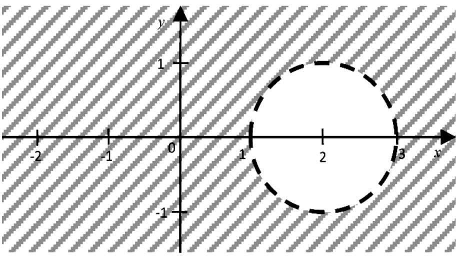

Рис. 5

Задача 11.2.2. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nz^2}}{n^2}$.

Решение:

Для отыскания области абсолютной сходимости исходного ряда применим признак Даламбера. Учитывая, что $\left|f_n(z)\right|=\frac{\left|e^{-nz^2}\right|}{n^2}$ и $\left|f_{n+1}(z)\right|=\frac{\left|e^{-(n+1)z^2}\right|}{(n+1)^2}$, имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|f_{n+1}(z)\right|}{\left|f_n(z)\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left|e^{-(n+1)z^2}\right|}{(n+1)^2\left|e^{-nz^2}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{e^{-nz^2-z^2}}{e^{-nz^2}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left|e^{-z^2}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left|e^{-z^2}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|e^{-z^2}\right|=\left|e^{-z^2}\right|=\frac{1}{\left|e^{z^2}\right|}.$$

Область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nz^2}}{n^2}$ образуют те точки $z \in C$, для которых $\frac{1}{\left|e^{z^2}\right|}<1$, то есть $\left|e^{z^2}\right|>1$. Известно, что $z=x+iy$, поэтому

$$e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2+2xyi-y^2}=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\cdot\sin 2xy).$$

А значит $\left|e^{z^2}\right|=e^{x^2-y^2}>1$ или $x^2-y^2>0$. Последнее неравенство можно переписать в виде $(x-y)(x+y)>0$.

Таким образом, область абсолютной сходимости заданного ряда представляет собой множество $D=\left\{z=(x,\, y)\left|\begin{cases}x>y,\\ x>-y,\end{cases}\right.\text{ или }\begin{cases}x<y,\\ x<-y.\end{cases}\right\}$ (рис. 6).

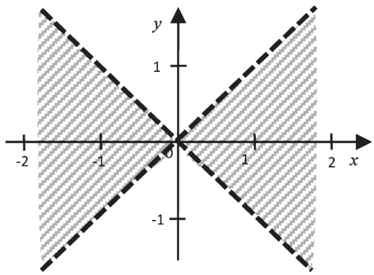

Рис. 6

11.3. Индивидуальные домашние задания

1. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n}{(z-3i)^{2n}}$.

2. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{z+2}\right)^n$.

3. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(z+1)^n}$.

4. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}e^{-zn}$.

5. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{nz}$.

6. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{-z}$.

7. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z-2}{1-2z} \right)^n$.

8. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

9. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$.

10. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n^2}$.

11. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(z+2)^n}$.

12. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}$.

13. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n n^2}$.

14. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{n2^n \sqrt{2n+1}}$.

15. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n}{(z-3i)^{2n}}$.

16. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z-i}{z+2} \right)^n$.

17. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n(2n+1)}{n!}$.

18. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n z^n$.

19. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z+2)^{2n}}{n}$.

20. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}(z-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

21. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(z-2)^{2n}}{n}$.

22. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-3)^{2n}}{(2n+1)3^n}$.

23. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}\sqrt{n}}$.

24. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(z+1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$.

25. Найдите область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-2i)^n}{n^3 3^n}$.

ГЛАВА 12.

РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

12.1. Краткие теоретические сведения

Напомним, что всякая однозначная аналитическая внутри круга $\left|z-z_0\right|<R$ функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ряд по степеням $z-z_0$ вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n=c_0+c_1\left(z-z_0\right)+c_2\left(z-z_0\right)^2+\ldots+c_n\left(z-z_0\right)^n+\ldots,$$

коэффициенты которого определяются формулой $c_n=\dfrac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!}$, где $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Указанный ряд называется рядом Тейлора для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0.

Для функций комплексного переменного справедливы все основные разложения по степеням z (при $z_0=0$), известные из действительного анализа:

$$1)\ e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!},\ z\in C.$$

$$2)\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z\in C.$$

$$3)\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z\in C.$$

$$4)\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\ |z|<1.$$

$$5)\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n,\ |z|<1.$$

$$6)\frac{1}{1+z}=1-z+z^2\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1.$$

$$7)\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4+\ldots+(-1)^n z^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n},\ |z|<1.$$

8) $(1+z)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\ldots,\ |z|<1.$

12.2. Примеры решения типовых задач

Задача 12.2.1. Разложите по степеням функцию $f(z)=\sqrt[3]{27-z}$.

Решение:

Перепишем данную функцию в виде

$$f(z)=\sqrt[3]{27-z}=\sqrt[3]{27\left(1-\frac{z}{27}\right)}=3\left(1+\left(-\frac{z}{27}\right)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Используя разложение 8, получим:

$$\sqrt[3]{27-z}=3\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}\left(-\frac{z}{27}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{z}{27}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(-\frac{z}{27}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}\left(-\frac{z}{27}\right)^4+\ldots\right)=$$

$$=3\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{z}{27}\right)-\frac{2}{2!3^2}\left(-\frac{z}{27}\right)^2+\frac{2\cdot5}{3!3^3}\left(-\frac{z}{27}\right)^3-\frac{2\cdot5\cdot8}{4!3^4}\left(-\frac{z}{27}\right)^4+\ldots\right)=$$

$$=3-\frac{z}{27}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{n!3^{4n-1}}z^n,\ |z|<27.$$

Задача 12.2.2. Разложите по степеням функцию $f(z)=\ln(z^2+3z+2)$.

Решение:

Перепишем данную функцию в виде

$$\ln(z^2+3z+2)=\ln(z+1)(z+2)=\ln(z+1)+\ln\left(2\left(\frac{z}{2}+1\right)\right)=$$

$$=\ln(z+1)+\ln\left(1+\frac{z}{2}\right)+\ln 2.$$

Используя разложение 4, получим:

$$\ln\left(z^2+3z+2\right)=\ln 2+\ln\left(1+z\right)+\ln\left(1+\frac{z}{2}\right)=$$

$$=\ln 2+\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\left(\frac{z}{2}\right)-\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^3}{3}+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n}+\ldots\right)=$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{z^n}{2^n n}=$$

$$==\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{z^n}{n},\ \ |z|<1.$$

Задача 12.2.3. Разложите по степеням $z-3i$ функцию $f\left(z\right)=\dfrac{1}{1-z}$.

Решение:

Перепишем данную функцию в виде

$$f\left(z\right)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z+3i-3i}=\frac{1}{1-\left(z-3i\right)-3i}=$$

$$=\frac{1}{1-3i-\left(z-3i\right)}=\frac{1}{\left(1-3i\right)\left(1-\dfrac{z-3i}{1-3i}\right)}.$$

Используя разложение 5,получим:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-3i}{1-3i}}=\frac{1}{1-3i}\left(1+\left(\frac{z-3i}{1-3i}\right)+\left(\frac{z-3i}{1-3i}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-3i}{1-3i}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-3i}{1-3i}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(z-3i\right)^n}{\left(1-3i\right)^{n+1}},\ \ |z-3i|<|1-3i|=\sqrt{10}.$$

Задача 12.2.4. Разложите по степеням $z-1$ функцию $f(z)=\sqrt[3]{z}$.

Решение:

Перепишем данную функцию в виде

$$f(z)=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{1+(z-1)}=\left(1+(z-1)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Используя разложение 8,получим:

$$\sqrt[3]{z}=1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}(z-1)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(z-1)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}(z-1)^3+\ldots=$$

Задача 12.2.5. Разложите функцию $f(z)=z^3-2z^2-5z-2$ по степеням $z+4$.

Решение:

По определению ряда Тейлора: $f(-4)=-78$,

$f'(-4)=\left(3z^2-4z-5\right)\Big|_{z=-4}=59$,

$f''(-4)=(6z-4)\Big|_{z=-4}=-28$, $f'''(-4)=6$. Тогда,

$$f(z)=-78+\frac{59}{1!}(z+4)+\frac{(-28)}{2!}(z+4)^2+\frac{6}{3!}(z+4)^3=$$

$$=-78+59(z+4)-14(z+4)^2+(z+4)^3.$$

12.3. Индивидуальные домашние задания

1.Разложите по степеням $z+3$ функцию $f(z)=\ln(2-5z)$.

2.Разложите по степеням z функцию $f(z)=\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$.

3.Разложите по степеням z функцию $f(z)=2^z$.

4.Разложите по степеням $z+1$ функцию $f(z)=\sin(2z+1)$.

5.Разложите по степеням $z+3$ функцию $f(z)=\ln(2-5z)$.

6.Разложите по степеням z функцию $f(z)=\frac{z}{3+4z}$.

7.Разложите по степеням z функцию $f(z)=\frac{z}{4+z^2}$.

8.Разложите по степеням z функцию $f(z)=\sin 2z\cdot\cos 2z$.

9.Разложите по степеням z функцию $f(z)=\ln\left(z^2+3z+2\right)$.

10.Разложите по степеням z функцию $f(z)=\ln(1+5z)$.

11.Разложите по степеням z функцию $f(z)=\frac{z\cos z-\sin z}{z^2}$.

12.Разложите по степеням $z-2$ функцию $f(z)=\frac{1}{1-\mathrm{z}}$.

13.Разложите по степеням $z+3$ функцию $f(z)=\ln(2-5z)$.

14.Разложите по степеням $z-i$ функцию $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$.

15.Разложите по степеням $z-2$ функцию $f(z)=e^{z^2-4z+1}$.

16.Разложите по степеням $z+1$ функцию $f(z)=ze^{2z-z^2}$.

17.Разложите по степеням $z+3$ функцию $f(z)=\ln(2-5z)$.

18.Разложите по степеням $z+2$ функцию $f(z)=\sin\left(z^2+4z\right)$.

19.Разложите по степеням $z-2$ функцию $f(z)=\frac{1}{z^2}$.

20.Разложите по степеням $z+3$ функцию $f(z)=\ln(2-5z)$.

21.Разложите по степеням z функцию $f(z)=\frac{1}{\sqrt{9+z^2}}$.

22.Разложите по степеням z функцию $f(z)=(1-z)e^{-2z}$.

23.Разложите по степеням z функцию $f(z)=\sin 2z+2z\cos 2z$.

24.Разложите по степеням $z-3$ функцию $f(z)=\frac{1}{z^2-6z+5}$.

25.Разложите по степеням $z-3i$ функцию $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$.

Список литературы

1. *Ароманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1965.

2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1989.

3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Сборник задач по высшей математике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

4. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2002.

5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.

6. *Лунгу К.Н. и др.* Сборник задач по высшей математике. 2 курс. — М.: Айрис-пресс, 2006.

7. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. — М.:, Айрис-пресс, 2007.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Алгебра комплексных чисел 3
1.1. Краткие теоретические сведения 3
1.2. Примеры решения типовых задач 8
1.3. Индивидуальные домашние задания 10

Глава 2. Основные элементарные функции комплексного переменного.. 14
2.1. Краткие теоретические сведения 14
2.2. Примеры решения типовых задач 16
2.3. Индивидуальные домашние задания 17

Глава 3. Решение уравнений над полем комплексных чисел 20
3.1. Краткие теоретические сведения 20
3.2. Примеры решения типовых задач 22
3.3. Индивидуальные домашние задания 24

Глава 4. Изображение геометрического места точек на комплексной плоскости 26
4.1. Примеры решения типовых задач 26
4.2. Индивидуальные домашние задания 28

Глава 5. Конформные отображения 31
5.1. Краткие теоретические сведения 31
5.2. Примеры решения типовых задач 32
5.3. Индивидуальные домашние задания 33

Глава 6. Восстановление аналитической функции 35
6.1. Примеры решения типовых задач 35
6.2. Индивидуальные домашние задания 36

Глава 7. Интегрирование функции комплексного переменного по отрезку 38
7.1. Краткие теоретические сведения 38
7.2. Примеры решения типовых задач 38
7.3. Индивидуальные домашние задания 39

Глава 8. Интегрирование аналитических функций 42
8.1. Краткие теоретические сведения 42
8.2. Примеры решения типовых задач 42
8.3. Индивидуальные домашние задания 43

Глава 9. Интегральная формула Коши 46
9.1. Краткие теоретические сведения 46
9.2. Примеры решения типовых задач 46
9.3. Индивидуальные домашние задания 47

Глава 10. Числовые ряды в комплексной плоскости 50
10.1. Краткие теоретические сведения 50
10.2. Примеры решения типовых задач 51
10.3. Индивидуальные домашние задания 53

Глава 11. Функциональные ряды в комплексной плоскости 56
11.1. Краткие теоретические сведения 56
11.2. Примеры решения типовых задач 56
11.3. Индивидуальные домашние задания 58

Глава 12. Разложение аналитических функций в ряд Тейлора 61
12.1. Краткие теоретические сведения 61
12.2. Примеры решения типовых задач 62
12.3. Индивидуальные домашние задания 64

Список литературы 66

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Внутривузовское издание

Подписано в печать **.**. 2016. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16 Бумага офсетная
Объем 4,5 усл. печ. л
Тираж 25 экз. Заказ № ** Продаже не подлежит

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК