Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии

М.Е.Чанга

Предел и непрерывность функции одной переменной

Рекомендовано
учебно-методическим объединением вузов
Российской Федерации по образованию
в области геодезии и фотограмметрии
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки
21.03.03 — Геодезия и дистанционное зондирование
с присвоением квалификации (степени) бакалавр;
21.05.01 — Прикладная геодезия с присвоением
квалификации инженер-геодезист

Москва
2015

УДК 517.1

Рецензенты:
профессор, доктор физ.-мат. наук **В.Г. Чирский** (МПГУ);
профессор, кандидат техн. наук **Н.К. Шавенько** (МИИГАиК)

Составитель: М.Е. Чанга
Предел и непрерывность функции одной переменной: Методические указания с заданиями для самостоятельного решения. — М.: МИИГАиК, 2015. — 15 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теории пределов и непрерывности функции одной переменной и примеры решения типовых расчетных задач по данной теме. Даны 30 вариантов индивидуальных расчетных заданий для самостоятельного решения.

Для студентов 1 курса, обучающихся по направлениям «Геодезия и дистанционное зондирование» (бакалавр) и «Прикладная геодезия» (специалист).

Электронная версия методических указаний размещена на сайте библиотеки МИИГАиК http://library.miigaik.ru

Теоретические сведения

Пусть a — некоторое вещественное число ($a \in \mathbb{R}$). Назовем ε-*окрестностью* точки а интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. Такую окрестность будем обозначать $O_\varepsilon(a)$. Исключая из этого интервала саму точку a, получим *проколотую* ε-*окрестность* точки a, которую будем обозначать $\dot{O}_\varepsilon(a)$. В дальнейшем будем предполагать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки а.

Определение 1. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что при любом $x \in \dot{O}_\delta(a)$ имеем $f(x) \in O_\varepsilon(A)$. Этот факт будем выражать краткой записью $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

В этом определении a или A могут принадлежать расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$, содержащей помимо вещественных чисел также и бесконечные элементы. При этом мы полагаем $O_\varepsilon(+\infty)=(\varepsilon,\ +\infty)$, $O_\varepsilon(-\infty)=(-\infty,\ -\varepsilon)$ и $O_\varepsilon(\infty)=(-\infty,\ -\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty)$. Например, имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \tag{1}$$

так как условия $x \in O_\delta(\infty)$ и $1/x \in O_\varepsilon(0)$ равносильны при $\delta = 1/\varepsilon$.

При вычислении пределов важную роль играют их арифметические свойства, позволяющие находить пределы суммы, разности, произведения и отношения двух функций, пределы которых известны.

Теорема 1. Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = A \pm B$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) g(x) = AB$, и в том случае, если $B \neq 0$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$.

Нередко удается свести вычисление предела к некоторым известным соотношениям, которые называют *замечательными пределами*. Первый замечательный предел есть

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{2}$$

второй замечательный предел имеет вид

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{3}$$

где e — основание натурального логарифма ($e = 2{,}71828\ldots$). Соотношения

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{5}$$

являются эквивалентными формулировками второго замечательного предела.

Если в определении 1 заменить $\dot{O}_{\varepsilon}(a)$ на $O_{\delta}^{+}(a) = (a, a+\delta)$, то получится определение предела функции при $x \to a$ *справа*, который мы будем обозначать $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Аналогично, используя $O_{\delta}^{-}(a) = (a-\delta, a)$, получим определение предела *слева* или $O_{\delta}^{-}(a) = (a-\delta, a)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если существует предел $f(x)$ при $x \to a$, равный значению этой функции в точке a, то есть $f(a)$.

Функции, полученные из степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций с помощью конечного числа арифметических действий и операций композиции, называются *элементарными*.

Теорема 2. Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Точку a, в которой функция $f(x)$ не является непрерывной, будем называть *точкой разрыва* функции $f(x)$. Если в точке a существуют конечные и равные между собой пределы функции $f(x)$ справа и слева, но они не совпадают с $f(a)$ или же последнее значение не определено, то a называется *точкой устранимого разрыва*. Если в точке a существуют конечные, но не равные между собой пределы функции $f(x)$ справа и слева, то a называется *точкой разрыва первого рода*. Наконец, если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует, то a называется *точкой разрыва второго рода*.

Решение типовых задач

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x + 3}$.

Числитель и знаменатель этой дроби суть многочлены второй степени, и с ростом x они стремятся к бесконечности. Итак, мы имеем здесь неопределенность вида ∞/∞. Чтобы раскрыть эту неопределенность, вынесем за скобки как в числителе, так и в знаменателе, старшую степень переменной x и затем сократим ее:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-5}{2x^2-x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3+2/x-5/x^2)}{x^2(2-1/x+3/x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+2/x-5/x^2}{2-1/x+3/x^2}.$$

Пользуясь равенством (1) и арифметическими свойствами предела, заключаем, что все слагаемые, содержащие переменную х, стремятся к нулю. Таким образом, числитель последней дроби стремится к трем, а знаменатель — к двум. В силу теоремы 1 искомый предел равен отношению этих чисел, то есть 3/2.

Ответ: 3/2.

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-3x+2}$.

Значение $x=2$ является корнем как многочлена в числителе, так и многочлена в знаменателе. Следовательно, при подстановке этого значения, и числитель и знаменатель обращаются в нуль, и мы имеем дело с *неопределенностью вида* $0/0$. Для раскрытия неопределенности нужно найти оставшиеся корни (вычисляя дискриминант или с помощью теоремы Виета), и разложить многочлены на линейные множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2\big(x-2\big)(x-0.5)}{\big(x-2\big)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-0.5)}{x-1}.$$

В силу теоремы 2 функция, стоящая под знаком предела после сокращения на $x-2$, является непрерывной в точке $x=2$. Следовательно, искомый предел равен значению этой функции в точке $x=2$, то есть 3.

Ответ: 3.

3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Снова имеем неопределенность вида $0/0$. Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение, то есть сумму стоящих в числителе радикалов, а именно $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$. Затем, используя формулу для разности квадратов, найдем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\big(1+x\big)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}.$$

После сокращения на х под знаком предела останется функция, непрерывная в точке $x=0$, следовательно, искомый предел равен ее значению в этой точке, то есть 1.

Ответ: 1.

4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x}$.

Для раскрытия неопределенности вида $\infty-\infty$ в этом случае нужно, аналогично предыдущему примеру, умножить и разделить на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-x\right)-(x^2+x)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}.$$

В результате мы получили неопределенность вида ∞/∞, которую раскроем аналогично первому примеру, вынося старшую степень x из-под радикала:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x(\sqrt{1-{}^1\!/_x}+\sqrt{1+{}^1\!/_x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-{}^1\!/_x}+\sqrt{1+{}^1\!/_x}}.$$

В силу равенства (1) и теоремы 1 оба выражения под радикалами стремятся к единице. Пользуясь непрерывностью функции $\sqrt{y}$ при $y=1$, заключаем, что каждый из радикалов также стремится к единице. Наконец, вновь прибегая к арифметическим свойствам пределов, получаем, что искомый предел равен –1.

Ответ: –1.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

Распространенным приемом при вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, является использование формулы двойного угла $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$. Применяя ее, получим:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}.$$

Существуют два способа дальнейшего раскрытия этой неопределенности вида $0/0$. Первый, более универсальный, состоит в том, чтобы свести вычисление данного предела к первому замечательному пределу (2), используя домножение числителя и знаменателя на подходящее выражение. Так, домножая на x^2, имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Используя равенство (2), получаем, что искомый предел равен $1/2$. Второй способ, более короткий, но не всегда применимый, состоит в использовании формулы двойного угла $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, что приводит нас к равенству:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Так как функция, стоящая под знаком предела, непрерывна в точке $x=0$, для нахождения предела достаточно просто вычислить значение этой функции при $x=0$. Итак, искомый предел равен $1/2$.

Ответ: $1/2$.

6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos 3x}$.

Здесь мы снова имеем дело с неопределенностью вида $0/0$. Для того, чтобы раскрыть ее, пользуясь первым замечательным пределом, сделаем замену переменной $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos 3x}$. Тогда при x, стремящемся к $\frac{\pi}{2}$, переменная y будет стремиться к нулю. Выражая x через y и подставляя в исходное выражение, получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos 3x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos 3\left(\frac{\pi}{2}-y\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi-2y)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3y\right)} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin 3y}.$$

В последнем равенстве мы использовали формулы приведения. Теперь, как и в предыдущем примере, сведем вычисление получившегося предела к первому замечательному пределу, домножая числитель и знаменатель на y. Имеем:

$$-\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin 3y} = -\frac{2}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{2y}\cdot\frac{3y}{\sin 3y}.$$

Наконец, пользуясь равенством (2), получим для искомого предела значение $-2/3$.

Ответ: $-2/3$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x-4}$.

Имеем неопределенность вида 1^{∞}, которую можно раскрыть, сводя данный предел ко второму замечательному пределу (3). Поскольку

$$\frac{2x+3}{2x-1}=1+\frac{4}{2x-1},$$

введем замену $y=\frac{1}{4}(2x-1)$. Тогда при x, стремящемся к бесконечности, y также стремится к бесконечности. Учитывая, что $x=2y+\frac{1}{2}$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x-4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3(2y+0.5)-4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{6y-2.5}.$$

Наконец, используя свойства степеней, придем к равенству:

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{6y-2.5}=\lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{6}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2.5},$$

откуда, используя соотношения (1) и (3), а также теорему 1, получим, что искомый предел равен $e^6\cdot 1$, то есть e^6.

Ответ: e^6.

8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-x^2}-e^{x^2+2x}}{x}$.

Для вычисления этого предела сведем его ко второму замечательному пределу в форме (4). Это можно сделать двумя способами. Первый способ основан на свойствах показательной функции. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-x^2}-e^{x^2+2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+2x}(e^{-2x^2-x}-1)}{x},$$

Откуда, домножая числитель и знаменатель на $-2x-1$ и пользуясь теоремой 1, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+2x}(e^{-2x^2-x}-1)}{x}=-\lim_{x\to 0}(2x+1)e^{x^2+2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2-x}-1}{-2x^2-x}.$$

Функция, стоящая под знаком первого предела, непрерывна в точке $x=1$, поэтому этот предел равен ее значению в точке, то есть 1. Второй предел есть в точности второй замечательный предел в форме соотношения (4), так как при x, стремящемся к нулю, выражение $-2x^2-x$ также стремится к нулю. Итак, искомый предел равен -1.

Второй способ вычисления состоит в том, чтобы добавить и вычесть единицу в числителе и разбить искомый предел в сумму двух пределов, каждый из которых легко вычисляется с помощью равенства (4). Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-x^2}-e^{x^2+2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2+2x}}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-x^2}-1}{x},$$

после чего с получившимися пределами поступим так же, как в предыдущем способе:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2+2x}}{x}=-\lim_{x\to 0}(x+2)\cdot\frac{e^{x^2+2x}-1}{x^2+2x}=-2\cdot 1=-2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}(1-x)\cdot\frac{e^{x-x^2}-1}{x-x^2}=1\cdot 1=1.$$

Таким образом, искомый предел равен $-2+1=-1$.

Ответ: -1.

9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+2)-\ln x\right)$.

Пользуясь свойствами логарифма, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+2)-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right).$$

Введем теперь замену переменной $y=2/x$, при этом $x=2/y$. Очевидно, при x, стремящемся к бесконечности, y стремится к нулю. Следовательно:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{2}{y}\ln(1+y),$$

откуда, используя равенство (5), получаем, что исковый предел равен 2.

Ответ: 2.

10. Найти и классифицировать точки разрыва функции $y=\dfrac{\operatorname{arctg} 1/x}{x+1}$.

Рассматриваемая функция определена для всех вещественных значений x, исключая $x=0$ и $x=-1$. Поскольку эта функция элементарна, согласно теореме 2 она непрерывна во всех точках своей области определения. Следовательно, ее точками разрыва могут являться лишь упомянутые точки $x=0$ и $x=-1$.

В точке $x=-1$ числитель и знаменатель рассматриваемой дроби суть непрерывные функции. Поэтому, пределы числителя и знаменателя при $x\to-1$ равны значениям соответствующих функций в точке $x=-1$, то есть $\pi/4$ и 0, соответственно. Таким образом, функция $y(x)$ не имеет конечных односторонних пределов в точке $x=-1$. Итак, точка $x=-1$ является точкой разрыва второго рода.

В точке $x=0$ предел знаменателя рассматриваемой дроби равен единице. Рассмотрим поведение числителя в окрестности точки $x=0$. Вводя замену переменной $t=1/x$ и пользуясь свойствами арктангенса, получим:

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}t=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{t\to-\infty}\operatorname{arctg}t=-\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, функция $y(x)$ имеет конечные и притом не совпадающие друг с другом односторонние пределы в точке $x=0$. Следовательно, в точке $x=0$ имеет место разрыв первого рода.

Ответ: функция имеет разрыв первого рода при $x=0$ и разрыв второго рода при $x=-1$.

11. Найти и классифицировать точки разрыва функции $y=\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{x-1}}$.

Как и в предыдущем примере мы видим, что достаточно исследовать точки $x=0$ и $x=1$, так как во всех остальных точках рассматриваемая элементарная функция определена и, следовательно, непрерывна.

Пользуясь первым замечательным пределом (2) для первого сомножителя $y(x)$ и непрерывностью второго сомножителя $y(x)$ в точке $x=0$, имеем:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{x-1}}=1\cdot e^{-1}=e^{-1}.$$

Итак, в точке $x=0$ функция $y(x)$ имеет конечные и равные между собой односторонние пределы (или, что то же самое, имеет конечный предел при x, стремящемся к нулю). Таким образом, точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва функции $y(x)$.

При x, стремящемся к единице, первый сомножитель $y(x)$ имеет конечный и ненулевой предел, равный $\sin 1$. Вычислим односторонние пределы второго сомножителя, вводя замену переменной $t=1/(x-1)$ и пользуясь свойствами показательной функции:

$$\lim_{x\to1+0}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to+\infty}e^{t}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1-0}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to-\infty}e^{t}=0.$$

Таким образом, предел $y(x)$ при x, стремящемся к единице справа, бесконечен. Следовательно, точка $x=1$ является точкой разрыва второго рода функции $y(x)$.

Ответ: функция имеет устранимый разрыв при $x=0$ и разрыв второго рода при $x=1$.

Задания для самостоятельного решения

В заданиях 1–4 вычислить пределы функций, в задании 5 найти и классифицировать точки разрыва функции.

Вариант 1. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-4}{2x^2-x+7}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x^2}}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x\sin^2 2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}$; 5. $y=\dfrac{2x+1}{2x^2-3x-2}$.

Вариант 2. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x+1}{\sin x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{\sin x}$; 5. $y=x\mathrm{ctg}2x$..

Вариант 3. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-4x-17}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-4x}-\sqrt{1+5x}}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^2\mathrm{tg}x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2+x)-\ln 3}{\sin\pi x}$; 5. $y=(\pi+2x)\mathrm{tg}x$.

Вариант 4. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 2x-1}{\cos x+1}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{3x+2}$; 5. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$.

Вариант 5. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x+2}{3x^2-x-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3-x+x^2}}{x-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x-\sin^2 x}{(x\sin 3x)^2}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^x}{\mathrm{tg}x}$; 5. $y=e^{-1/x^2}$.

Вариант 6. 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1-x)}{x}$; 5. $y=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$..

Вариант 7. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x-5}{x^2-5x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{9-x^2}}{x-2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin 2x(1-\cos x)}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{4x+7}$; 5. $y=\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^3+x^2}$.

Вариант 8. 1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2+x}$;

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$; 5. $y=\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Вариант 9. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x-3}{4x^2-6x+11}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x^2+x+2}}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(3+x^2\right)-\ln(3-x^2)}{1-\cos x}$; 5. $y=\dfrac{1}{1-e^x}$.

Вариант 10. 1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-3x-4}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+5}\right)^{3x+1}$; 5. $y=e^{\frac{x}{1-x^2}}$..

Вариант 11. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-7x-4}{3x^2+9x+7}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+6x}}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1-\cos 3x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}x}-1}{x}$; 5. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Вариант 12. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+7}$;

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$; 4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\ln\left(x+5\right)-\ln(x^2-7)}{x+3}$; 5. $y=\dfrac{x+1}{\mathrm{arctg}\,{}^1\!/_x}$.

Вариант 13. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x-4}{3x^2-x-5}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3+x-2x^2}}{x-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos 2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x+1}\right)^{4x-7}$; 5. $y=\dfrac{x}{\mathrm{arctg}x}$.

Вариант 14. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-x-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-7x}$;

3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{x}$; 5. $y=\dfrac{1}{1+e^{1/(x-1)}}$.

Вариант 15. 1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+3x-4}{5x^2-4x+8}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2+x^2}}{x-2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}7x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{7}$; 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x+1)-\ln(7-x^2)}{x}$; 5. $y=\dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$.

Вариант 16. 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}$;

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$; 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+6}{x-3}\right)^{4x-3}$; 5. $y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Вариант 17. 1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+3x+10}{3x^2+5x-6}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-2x+x^2}}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{9x}}{\sin 5x}$; 5. $y=\dfrac{1}{x}e^{-1/x^2}$.

Вариант 18. 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-x-6}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+5x}$;

3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{\sin x-\sin 5x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(3+x)-\ln 4}{\sin 3\pi x}$; 5. $y=\dfrac{1}{\ln(x-2)}$.

Вариант 19. 1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-6x+9}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x^2}}{x-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2\frac{x}{2}}$; 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x+5}\right)^{3x-4}$; 5. $y=\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

Вариант 20. 1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+2x-4}{3x^2+5x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+6x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e}{x^2}$; 5. $y=e^{1/\ln x}$.

Вариант 21. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-3}{x^2-x+2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+4x+x^2}}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin 2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x+2)-\ln(2x+1)}{x}$; 5. $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

Вариант 22. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-6x+5}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\mathrm{tg}^2\pi x}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-2}\right)^{4x-1}$; 5. $y=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Вариант 23. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+6}{3x^2-4x-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+9x}}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{x^4}$; 4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{x^2-2x}-e^x}{x-3}$; 5. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

Вариант 24. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-7x+10}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-7x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{c\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x}{2}}$; 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x+1)-\ln(2x-1)}{x}$; 5. $y=\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Вариант 25. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x-4}{3x^2-4x+7}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+1}}{4-x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{x^2+4x}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-2}\right)^{x-6}$; 5. $y=e^{\frac{x}{3-x}}$.

Вариант 26. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-9x+8}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+9x}-\sqrt{x^2-3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\sin^2\pi x}$; 4. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{e^{x^2+5x}-e^x}{x+4}$; 5. $y=\dfrac{\sin(x-x^2)}{2x}$.

Вариант 27. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+9x-5}{7x^2-8x+3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{2x^2+x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{1-\cos 4x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x+3)-\ln(x^2+1)}{x^2-2x}$; 5. $y=\dfrac{\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Вариант 28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^2-8x+15}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x^2+4x}$;

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\cos 5x-\cos 7x}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+8}{3x-5}\right)^{2x+7}$; 5. $y=x\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Вариант 29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-4}{4x^2-x+11}$; 2. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{13-x}-2\sqrt{1-x}}{x^2-9}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x}{x\sin 3x}$; 4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{4x+2}-e^{2x}}{x^2+x}$; 5. $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Вариант 30. 1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x+10}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{x^2-2x}$;

3. $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{(3\pi-2x)^2}$; 4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(x^2-2\right)-\ln(x+4)}{x-3}$; 5. $y=\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}$.

Список литературы

1. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. В 2-х т. — М.: Высшая школа, 1970.

2. *Шипачев В.С.* Высшая математика. — М.: Высшая школа, 1998.

3. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985.

4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. — М.: Высшая школа, 1986.

Содержание

Внутривузовское издание

Подписано в печать 29.10. 2015. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16 Бумага офсетная
Объем 1 усл. печ. л
Тираж 25 экз. Заказ № 162 Продаже не подлежит

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК