

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Московский государственный университет геодезии и картографии
(МИИГАиК)

А.Е. Алтынов, В.С. Грузинов, И.В. Мишин

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Методическое пособие

Москва, 2015

УДК 621.391

Алтынов А.Е., Грузинов В.С., Мишин И.В.

Статистический анализ аэрокосмических изображений: Методическое пособие. М.: Изд-во МИИГАиК, 2015, 52 с.

Методическое пособие подготовлено в соответствии с ФГОС ВПО для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению 23.03.03 - «Геодезия и дистанционное зондирование» профилей «Исследование природных ресурсов методами дистанционного зондирования», «Аэрокосмические съёмки и фотограмметрия» и направлению 09.03.03 – «Информационные системы и технологии». Сведения, содержащиеся в пособии, могут быть полезны также для магистрантов и аспирантов соответствующих специальностей. Пособие содержит задание на проведение практической работы «Методы анализа изображений». Теоретические обоснования иллюстрируются примерами в системе Mathcad.

Библиогр. 11 назв.

Рецензенты:

д.т.н. М.Л. Белов, *профессор кафедры лазерных и оптико-электронных систем МГТУ им. Н.Э. Баумана*

д.т.н. В.И. Троицкий, *профессор, заведующий кафедрой физики МИИГАиК*

ВВЕДЕНИЕ

Аэрокосмические изображения земной поверхности регистрируются съемочной аппаратурой, установленной на самолетах и спутниках, и поступают в центры обработки аэрокосмических данных в цифровой форме по радиоканалу. В видимом диапазоне электромагнитного спектра изображения изначально регистрировались на пленке, с которой снимались значения оптической плотности. Далее производилась печать снимка на фотобумагу. В последнее время осуществляется переход к использованию цифровой съемки. К техническим характеристикам изображений, получаемых пассивными системами наблюдения, относятся высота съемки, захват на местности, пространственное и спектральное разрешение, число градаций яркостного сигнала, шаг дискретизации поля зрения. Шаг дискретизации необходимо согласовывать с разрешением входной оптики. При фотометрировании с помощью радиометров на ПЗС-матрицах шаг дискретизации определяется количеством датчиков на единицу площади. Для двумерных изображений приняты форматы с расширениями *.tif, *.bmp, *.bip, а также GeoTIFF, MrSID, HDF. Число бит (bit) информации на одну градацию спектральной яркости определяет радиометрическое разрешение изображения.

Трансформация полей яркости уходящего излучения в естественной среде и элементы съемочной системы вносят искажения в аэрокосмические изображения. Рассеяние и поглощение излучения газовыми и аэрозольными субстанциями атмосферы приводит к снижению контрастности изображений, вследствие чего пространственное разрешение снимков всегда ниже разрешения штатной аппаратуры. Коэффициенты яркости земной поверхности и передаточная функция атмосферы имеют спектральную зависимость, поэтому мощность светового сигнала на входе пассивной системы наблюдения зависит от положения и ширины спектрального канала. Наличие уклонов земной поверхности приводит к геометрическим искажениям в изображениях отдельных участков местности. Геометрические искажения могут возникать также из-за технических погрешностей регистрации. Рельеф местности в со-

четании с режимом освещения является причиной затенения одних элементов сюжета съемки другими. Искажения в изображение вносит также неоднородность увлажнения подстилающей поверхности. На снимках могут появляться тени от облаков. Съемочная аппаратура вносит радиометрические искажения, которые выражаются, в частности, в наличии муаровых полос и сбойных элементов на сканерных изображениях. Искажения могут вносить электростатические разряды, загрязнение входной оптики, посторонние предметы. Вибрация летательного аппарата и другие случайные факторы вызывают зашумление изображений. Кроме того, поскольку реальные приборы измеряют функционалы от истинных яркостей излучения, требуется, вообще говоря, привязка к абсолютным значениям яркости.

Чтобы устранить вышеперечисленные искажения, необходимо выполнить, так называемую, первичную обработку пригодных для использования данных. Она включает геометрическую, радиометрическую и радиационную коррекцию. Геометрическая коррекция состоит в восстановлении топологии объектов на изображении и преобразования снимка в заданную картографическую проекцию. Радиометрическая коррекция компенсирует влияние передаточной функции съемочной системы. Методика радиометрической коррекции обычно входит в документацию на аппаратуру. Например, для фотографической съемки радиометрическая коррекция сводится к процессу перевода плотностей почернения фотонегатива в значения оптических плотностей позитива. Радиационная коррекция включает абсолютную радиационную привязку и атмосферную коррекцию. Результатом последней является восстановление значений приземной яркости отраженного излучения. Частично первичная обработка данных измерений может осуществляться бортовыми системами.

Аэрокосмическая информация, прошедшая в том или ином объеме первичную обработку, используется для решения тематических задач. Анализ информации предполагает расчет числовых характеристик пространственной структуры изображений, который осуществляется с привлечением статистических методов исследования двумерных случайных полей. Эти методы как

средства анализа двумерных сигналов используются в вычислительных системах цифровой обработки данных. В настоящее время созданы профессиональные пакеты цифровой обработки изображений общего и специального назначения: ERDAS IMAGINE, IDRISI, MultiSpace, PhotoMODE, ScanEx Image Processor, INPHO и др.

Методическое пособие содержит три главы и задание на проведение практической работы. В первой главе рассматривается математический аппарат случайных функций применительно к моделированию двумерных полей яркости. Во второй главе представлены формулы для расчёта выборочных характеристик оцифрованного изображения. В третьей главе дано описание численных процедур статистического анализа изображений. Расчёты выполнены средствами MathCAD. В качестве исходных данных использованы данные высокого разрешения со спутника GeoEye (США) над территорией Истринского района Московской области. Спутник занимает полярную солнечно-синхронную орбиту на высоте 684 км. Пространственное разрешение изображений в мультиспектральном режиме составляет 1,65 м с точностью географической привязки 3 м. Такие данные используются, в частности, для инвентаризации и оценки состояния лесов сельскохозяйственных угодий, а также для создания планов землепользования. За отсутствием абсолютной радиационной привязки яркостей элементов изображений данные наблюдений представлены в относительных тоновых единицах.

В задании на проведение практической работы требуется исследовать эмпирические плотности распределения яркости элементов заданного изображения, их аналитические аппроксимации, а также двумерные корреляционные функции и кривые пространственного спектра.

Глава 1. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ ЯРКОСТИ

Применение статистических методов к анализу изображений предполагает, что исследуемое изображение принадлежит совокупности возможных реализаций двумерного яркостного поля с присущим ей вероятностным распределением значений оптической плотности. Такую совокупность называют также ансамблем реализаций случайного поля яркости или просто случайным полем. Реализации случайного поля отличны друг от друга в силу влияния тех или иных внешних факторов. В качестве примера случайного поля яркости можно привести набор изображений природного ландшафта, полученных при похожих условиях съемки в различные дни сезона или же над различными территориями одной и той же природной зоны в одно и то же время суток. В первом случае каждая точка изображения из данного набора соответствует определенному объекту. Во втором случае точки изображения соответствуют произвольным объектам похожих сюжетов местности.

Обозначим $B(\mathbf{r}) \equiv B(x, y)$ – яркость (оптическая плотность) изображения в точке $\mathbf{r} = (x, y)$; x, y – местные координаты. Яркость $B(\mathbf{r})$ считаем случайной величиной с функцией распределения вероятностей $F(u; \mathbf{r}) = P\{B(\mathbf{r}) \leq u\}$ и плотностью распределения $f(u; \mathbf{r}) = F'(u; \mathbf{r})$. Здесь $P\{B(\mathbf{r}) \leq u\}$ – вероятность события $B(\mathbf{r}) \leq u$. Полное описание случайного поля задается совместными функциями распределения $F(u_1, \dots, u_n; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = P\{B(\mathbf{r}_1) \leq u_1, \dots, B(\mathbf{r}_n) \leq u_n\}$ случайных величин $B_i \equiv B(\mathbf{r}_i)$, $i = \overline{1, n}$ для $n = 2, 3, \dots$. Плотностями указанных совместных распределений являются функции $f(u_1, \dots, u_n; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \partial^n F(u_1, \dots, u_n; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) / \partial u_1 \dots \partial u_n$. Плотность порядка $n - 1$ может быть получена интегрированием плотности порядка n по одной из переменных u_1, \dots, u_n . Практическое значение имеют плотности первого и второго порядков, причем плотность второго порядка является исчерпывающей характеристикой нормальных и Марковских полей.

Плотность распределения вероятностей однозначно определяется своими начальными моментами

$$\langle B^k(\mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^k f(u; \mathbf{r}) du, \quad (1.1)$$

$k = 1, 2, \dots$. Основное значение имеют первые четыре момента. Первый момент представляет собой среднее по ансамблю реализаций случайного поля

$$m(\mathbf{r}) \equiv \langle B(\mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u; \mathbf{r}) du. \quad (1.2)$$

Моменты центрированной случайной величины $\tilde{B}(\mathbf{r}) \equiv B(\mathbf{r}) - \langle B(\mathbf{r}) \rangle$

$$\langle \tilde{B}^k(\mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \langle B(\mathbf{r}) \rangle)^k f(u; \mathbf{r}) du, \quad (1.3)$$

$k = 2, 3, \dots$, называются центральными. Второй центральный момент

$$d(\mathbf{r}) = \langle \tilde{B}^2(\mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \langle B(\mathbf{r}) \rangle)^2 f(u; \mathbf{r}) du \quad (1.4)$$

называется дисперсией. Характеристикой разброса случайной величины B вокруг своего среднего значения, имеющей размерность яркости, является среднее квадратическое отклонение (СКО)

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sqrt{d(\mathbf{r})}. \quad (1.5)$$

Коэффициент вариации

$$\gamma_0(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})/m(\mathbf{r}) \quad (1.6)$$

является мерой контрастности изображения. Форму плотности $f(u; \mathbf{r})$ характеризуют коэффициенты асимметрии

$$\gamma_1(\mathbf{r}) = \langle \tilde{B}^3(\mathbf{r}) \rangle / \sigma^3(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

и эксцесса

$$\gamma_2(\mathbf{r}) = \langle \tilde{B}^4(\mathbf{r}) \rangle / \sigma^4(\mathbf{r}) - 3. \quad (1.8)$$

Коэффициент $\gamma_1(\mathbf{r})$ указывает на асимметрию плотности $f(u; \mathbf{r})$ относительно среднего значения случайной яркости $m(\mathbf{r})$. Коэффициент $\gamma_2(\mathbf{r})$ фиксирует увеличение или уменьшение максимума плотности. Для нормального распределения $\gamma_1(\mathbf{r}) = \gamma_2(\mathbf{r}) = 0$. Поэтому коэффициенты $\gamma_1(\mathbf{r})$, $\gamma_2(\mathbf{r})$ можно трактовать как характеристики отличия плотности распределения вероятностей с параметрами $m(\mathbf{r})$ и $\sigma(\mathbf{r})$ от нормальной плотности $\exp\{-[u - m(\mathbf{r})]^2 / 2\sigma(\mathbf{r})\} / \sqrt{2\pi\sigma(\mathbf{r})}$.

Количественной характеристикой статистической связи, или по-другому, корреляции реализацией случайного поля является второй центральный смешанный момент, называемый ковариационной функцией,

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle \tilde{B}(\mathbf{r})\tilde{B}(\mathbf{r}') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u - \langle B(\mathbf{r}) \rangle][u' - \langle B(\mathbf{r}') \rangle] f(u, u'; \mathbf{r}, \mathbf{r}') du du' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} uu' f(u, u'; \mathbf{r}, \mathbf{r}') du du' - \langle B(\mathbf{r}) \rangle \langle B(\mathbf{r}') \rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $f(u, u'; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ - совместная плотность распределения случайных полей $B(\mathbf{r})$ и $B(\mathbf{r}')$. Можно показать, что ковариационная функция неотрицательно определена и принимает максимальное значение при $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \langle \tilde{B}^2(\mathbf{r}) \rangle = \sigma^2(\mathbf{r}). \quad (1.10)$$

Очевидно, что она обладает свойством симметрии $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = K(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Если при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ величины $B(\mathbf{r})$ и $B(\mathbf{r}')$ никак между собой статистически не связаны, то поле является δ -коррелированным:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sigma^2(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.11)$$

Здесь $\delta(\mathbf{r})$ - δ -функция Дирака, равная ∞ при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ и 0 при $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, удовлетворяющая условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$, $d\mathbf{r} = dx dy$. Нормированную ковариационную функцию

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') / \sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}') \quad (1.12)$$

будем называть корреляционной функцией¹. Функция $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ позволяет оценить радиус корреляции - расстояние, на котором значения случайных яркостей начинают терять корреляционную связь. Для многих типов ландшафтов радиус корреляции имеет конечное значение.

Операции статистического усреднения требуют большого объема экспериментальных данных и численных расчетов. Однако, как правило, исследователь имеет дело только с одной реализацией случайного поля, так что выполнить усреднение по ансамблю реализаций не представляется возможным. Преодолеть эту трудность удаётся, если случайное поле обладает свойством пространственной эргодичности. Случайное поле называется *эргодическим*, если его числовые характеристики, полученные усреднением по ансамблю, равны соответствующим характеристикам, полученным усреднением по любой достаточно протяженной реализации поля.

Справедлива эргодическая теорема. Пусть L_x, L_y - линейные размеры, $S = L_x \times L_y$ - площадь изображения, $L = \min(L_x, L_y)$. Предел

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{1}{S} \iint_S \tilde{B}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)^2 \right\rangle = 0 \quad (1.13)$$

существует тогда и только тогда, когда

¹ В данном определении корреляционной функции участвуют два экземпляра одной и той же реализации случайного поля (изображения). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в литературе часто используют термин *автокорреляционная функция*.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{S^2} \iint_S \iint_S K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = 0. \quad (1.14)$$

Если объем корреляции случайного поля $\frac{1}{S^2} \iint_S \iint_S K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$ конечен, то предел (1.14) всегда имеет место. Из (1.13) следует равенство

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \iint_S B(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \iint_S m(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1.15)$$

т.е. среднее по реализации при достаточно большой площади усреднения можно считать с исчезающе малой погрешностью равным среднему по ансамблю, усредненному по той же площади. Здесь подинтегральной функцией может быть любая реализация случайного поля. При $m(\mathbf{r}) \equiv m = const$ из (1.15) получаем

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \iint_S B(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = m. \quad (1.16)$$

Поле, удовлетворяющее условию (1.16), является эргодическим по отношению к среднему. Для выполнения (1.16) достаточным является условие

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (1.17)$$

Эргодичность по отношению к дисперсии означает

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{S} \iint_S [B(\mathbf{r}) - m]^2 d\mathbf{r} \right\rangle = \sigma^2 = const \quad (1.18)$$

или

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{S} \iint_S [\tilde{B}(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r} - \sigma^2 \right\rangle = 0. \quad (1.19)$$

Равенство (1.15) и, тем более (1.16), можно рассматривать как проявление статистической однородности случайного поля. То же относится и к

(1.18). Поле называется *статистически однородным*, если его плотности распределения вероятностей всех порядков не меняются в результате сдвига аргументов $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ на $\Delta\mathbf{r}$: $f(u_1, \dots, u_n; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = f(u_1, \dots, u_n; \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}_n + \Delta\mathbf{r})$, $n = 1, 2, \dots$. Это понятие является естественным обобщением понятия стационарности случайного процесса, протекающего во времени. Плотность первого порядка статистически однородного случайного поля не зависит от \mathbf{r} : $f(u; \mathbf{r}) = f(u; \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})|_{\Delta\mathbf{r}=-\mathbf{r}} = f(u; \mathbf{0}) \equiv f(u)$. Поэтому все моменты и производные от них величины постоянны. Плотность второго порядка зависит от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$: $f(u, u'; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(u, u'; \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{r}' + \Delta\mathbf{r})|_{\Delta\mathbf{r}=-\mathbf{r}} = f(u, u'; \mathbf{0}, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv f(u, u'; \mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Как следствие, ковариационная функция зависит от разности $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y) = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, и, в силу симметрии $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = K(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$, появляется четность по обоим аргументам $K(\boldsymbol{\tau}) \equiv K(\tau_x, \tau_y) = K(-\tau_x, -\tau_y)$. При $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ имеем $K(\mathbf{0}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u - m)(u' - m) f(u, u'; \mathbf{0}) du du' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u - m)(u' - m) f(u) \delta(u - u') du du' = \int_{-\infty}^{\infty} (u - m)^2 f(u) du = \sigma^2$. Пола-

гая, что поле эргодично относительно ковариационной функции, получаем формулу

$$K(\boldsymbol{\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(\mathbf{r}) \tilde{B}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\tau}) d\mathbf{r}. \quad (1.20)$$

Дальнейшие рассуждения относятся только к статистически однородным (стационарным) случайным полям яркости (изображениям). Спектральная плотность изображения² определяется как преобразование Фурье ковариационной функции

$$W(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\boldsymbol{\tau}) e^{i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau})} d\boldsymbol{\tau}. \quad (1.21)$$

² В литературе встречается другое название: *энергетический спектр*.

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y)$ – двумерная пространственная частота, $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) = \omega_x \tau_x + \omega_y \tau_y$, $d\boldsymbol{\tau} = d\tau_x d\tau_y$. Обратнo³,

$$K(\boldsymbol{\tau}) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\boldsymbol{\omega}) e^{-i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau})} d\boldsymbol{\omega}, \quad (1.22)$$

где $d\boldsymbol{\omega} = d\omega_x d\omega_y$. Поскольку функции $K(\boldsymbol{\tau})$ и $W(\boldsymbol{\omega})$ действительны, прямое и обратное преобразование Фурье можно использовать в форме

$$W(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\boldsymbol{\tau}) \cos(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}, \quad K(\boldsymbol{\tau}) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\boldsymbol{\omega}) \cos(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\omega}.$$

Ясно также, что $W(\boldsymbol{\omega})$ является четной функцией по своим аргументам: $W(\boldsymbol{\omega}) \equiv W(\omega_x, \omega_y) = W(-\omega_x, -\omega_y)$. При $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ из (1.22) получаем выражение для дисперсии

$$\sigma^2 = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}, \quad (1.23)$$

которое показывает, что дисперсия пропорциональна энергии двумерного яркостного сигнала $B(\mathbf{r})$. При $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ из (1.21) находим

$$W(\mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}. \quad (1.24)$$

Если случайное поле δ -коррелировано с ковариационной функцией $K(\boldsymbol{\tau}) = \sigma^2 \delta(\boldsymbol{\tau})$, то его спектральная плотность не зависит от частоты: $W(\boldsymbol{\omega}) \equiv \sigma^2$.

Корреляционная функция

³ Выбор нормировки в преобразовании Фурье – вопрос соглашения. Здесь в прямом преобразовании интеграл Фурье умножается на 1, а в обратном преобразовании на $(2\pi)^{-2}$. Изменение нормировки в прямом преобразовании приводит к изменению нормировки и в обратном.

$$R(\boldsymbol{\tau}) \equiv R(\tau_x, \tau_y) = \sigma^{-2} K(\boldsymbol{\tau}) = \sigma^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(\mathbf{r}) \tilde{B}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\tau}) d\mathbf{r} \quad (1.25)$$

и нормированная спектральная плотность

$$F(\boldsymbol{\omega}) \equiv F(\omega_x, \omega_y) = W(\boldsymbol{\omega}) / \sigma^2 \quad (1.26)$$

также связаны, как следует из (1.21) и (1.22), прямым и обратным преобразованием Фурье

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\boldsymbol{\tau}) e^{i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau})} d\boldsymbol{\tau}; \quad (1.27)$$

$$R(\boldsymbol{\tau}) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{\omega}) e^{-i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau})} d\boldsymbol{\omega}. \quad (1.28)$$

Отметим также формулу

$$F(\mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = W(\mathbf{0}) / \sigma^2. \quad (1.29)$$

Аналитическое представление корреляционной функции реальных изображений дает следующая аппроксимация:

$$R(\tau_x, \tau_y) = e^{-\sqrt{\alpha_x^2 \tau_x^2 + \alpha_y^2 \tau_y^2}} \cos(\sqrt{\beta_x^2 \tau_x^2 + \beta_y^2 \tau_y^2}). \quad (1.30)$$

Для изотропных полей $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$, $\beta_x = \beta_y = \beta$ и приближение (1.30) приобретает вид

$$R(r) = e^{-\alpha r} \cos \beta r, \quad (1.31)$$

где $r = |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$. Подставляя (1.31) в (1.27), переходя к цилиндрическим координатам $\tau_x = r \cos \phi$, $\tau_y = r \sin \phi$ и интегрируя по $d\phi$, получаем

$$F(q) = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\alpha r} J_0(qr) \cos \beta r dr, \quad (1.32)$$

где $q = |\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$, $J_0(u) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos \phi} d\phi$ - функция Бесселя нулевого

порядка. При $q = 0$ имеем

$$\begin{aligned} F(0) &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\alpha r} \cos \beta r dr = \\ &= 2\pi \frac{\cos(2 \operatorname{arctg}(\beta/\alpha))}{\alpha^2 + \beta^2} = 2\pi \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Из последней формулы видно, что при $\alpha < \beta$ значение $F(0)$ отрицательно. Это противоречит физическому смыслу и является ограничением для применения данной аппроксимации. Таким образом, при малых q спектральная плотность (1.32) может быть физически не реализуемой.

В случае $\beta_x = \beta_y = 0$ приближение (1.30) вырождается в экспоненту

$$R(\tau_x, \tau_y) = e^{-\sqrt{\alpha_x^2 \tau_x^2 + \alpha_y^2 \tau_y^2}}. \quad (1.34)$$

Корреляционная функция (1.34) свойственна Марковским полям. Подставляя (1.34) в (1.27), переходя к цилиндрическим координатам $\tau_x = r \cos \phi$, $\tau_y = r \sin \phi$ и интегрируя по $d\phi$, а затем по dr , получаем

$$F(\omega_x, \omega_y) = \frac{2\pi}{\alpha_x \alpha_y \left(\sqrt{1 + \omega_x^2/\alpha_x^2 + \omega_y^2/\alpha_y^2} \right)^3}. \quad (1.35)$$

Для изотропного поля $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ из (1.34), (1.35) следуют формулы

$$R(r) = e^{-\alpha r} \quad (1.36)$$

и

$$F(q) = 2\pi \alpha / \left(\sqrt{\alpha^2 + q^2} \right)^3. \quad (1.37)$$

При $q = 0$ из (1.37) имеем

$$F(0) = 2\pi/\alpha^2. \quad (1.38)$$

Аппроксимации (1.36), (1.37) имеют радиальную симметрию, отвечающую свойству изотропии случайного поля яркости.

Более простую, но менее реалистичную аппроксимацию корреляционной функции можно получить, разделяя зависимость по каждому из аргументов,

$$R(\tau_x, \tau_y) = e^{-\alpha_x|\tau_x| - \alpha_y|\tau_y|} \cos(\beta_x \tau_x) \cos(\beta_y \tau_y). \quad (1.39)$$

В этом случае зависимость спектральной плотности от пространственных частот также разделяется:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \left[\frac{\alpha_x}{\alpha_x^2 + (\beta_x + \omega_x)^2} + \frac{\alpha_x}{\alpha_x^2 + (\beta_x - \omega_x)^2} \right] \cdot \left[\frac{\alpha_y}{\alpha_y^2 + (\beta_y + \omega_y)^2} + \frac{\alpha_y}{\alpha_y^2 + (\beta_y - \omega_y)^2} \right]. \quad (1.40)$$

и

$$F(0,0) = \frac{4\alpha_x \alpha_y}{(\alpha_x^2 + \beta_x^2)(\alpha_y^2 + \beta_y^2)}. \quad (1.41)$$

При $\beta_x = \beta_y = 0$ имеем

$$F(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\alpha_x \alpha_y}{(\alpha_x^2 + \omega_x^2)(\alpha_y^2 + \omega_y^2)} \quad (1.42)$$

и

$$F(0,0) = 4/\alpha_x \alpha_y. \quad (1.43)$$

Корреляционная функция и спектральная плотность двумерного статистически однородного случайного поля являются поверхностями в трехмерном пространстве. Обычно оперируют с разрезами этих поверхностей. Рассмотрим разрез $R(\tau_x, 0)$ поверхности (1.30), который отвечает яркостному

разрезу $B(x,0)$. При $\tau_y = 0$ аппроксимация (1.30) вырождается в следующую одномерную зависимость

$$R(\tau_x, 0) = e^{-\alpha_x |\tau_x|} \cos(\beta_x \tau_x). \quad (1.44)$$

Соответствующий разрез спектральной плотности, исходя из (1.32), при $\omega_y = 0$ имеет вид

$$F(\omega_x, 0) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} r e^{-\alpha_x r} J_0(\omega_x r) \cos \beta_x r dr, \quad (1.45)$$

причем

$$F(0, 0) = 2 \frac{\alpha_x^2 - \beta_x^2}{(\alpha_x^2 + \beta_x^2)^2}. \quad (1.46)$$

При $\beta_x = 0$ получаем

$$R(\tau_x, 0) = e^{-\alpha_x |\tau_x|}. \quad (1.47)$$

Соответствующий разрез спектральной плотности, исходя из (1.35), при $\omega_y = 0$ имеет вид

$$F(\omega_x, 0) = 2\pi / \alpha_x \alpha_y \left(\sqrt{1 + \omega_x^2 / \alpha_x^2} \right)^3. \quad (1.48)$$

причем

$$F(0) = 2\pi / \alpha_x \alpha_y. \quad (1.49)$$

Аналогичные формулы можно получить, рассматривая разрез при $\tau_x = 0$ и соответствующий разрез в частотной области при $\omega_x = 0$.

Определим площадь корреляции двумерного яркостного поля как

$$S_p = \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} R(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}, \quad (1.50)$$

предполагая, что данная площадь имеет форму круга $S_\rho = \pi\rho^2$. Отсюда радиус корреляции определяем следующим образом:

$$\rho = \sqrt{S_\rho/\pi}. \quad (1.51)$$

Для экспоненциальной аппроксимации (1.36) из (1.51) с учетом соотношений (1.50), (1.29), (1.38) получаем

$$\rho = \sqrt{2}/\alpha. \quad (1.52)$$

Замечание. Для аппроксимации с разделением переменных (1.39) при $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$, $\beta_x = \beta_y = 0$ площадь корреляции считаем квадратной с диагональю 2ρ по осям: $S_\rho = \rho^2/2$, откуда $\rho = \sqrt{2}/\alpha$.

Имеет место, так называемое, соотношение неопределенностей: полуширина корреляционной функции обратно пропорциональна полуширине спектральной кривой.

Радиус корреляции можно определить, исходя из иных соображений. Под радиусом корреляции вдоль оси x можно понимать значение $r_{0,x}$, удовлетворяющее уравнению

$$R(r_{0,x}, 0) = c, \quad (1.53)$$

где значение константы c полагается в пределах $0.2 \leq c \leq 0.5$. Аналогично радиус корреляции $r_{0,y}$ вдоль оси y выбирается из условия

$$R(0, r_{0,y}) = c. \quad (1.54)$$

В случае радиальной симметрии $r_{0,x} = r_{0,y} = r_0$. Величину r_0 используем в качестве радиуса корреляции наряду с ρ .

Глава 2. ВЫБОРОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В численных расчетах приходится оперировать с дискретным представлением случайного поля яркости. Оцифрованное изображение получается в результате процедуры дискретизации двумерного аналогового сигнала по пространству и оптической плотности. Плоскость изображения покрывается прямоугольной сеткой с N ячейками по строкам и M ячейками по столбцам. Каждая ячейка обозначает элемент изображения, размеры которого должны быть согласованы с разрешением съемочной аппаратуры. Яркостной диапазон, обеспечиваемый съемочной аппаратурой, разбивается на 2^Ω уровней квантования, где Ω - число бит (разрядов), отведённых для кодирования. Дискретизация по оптической плотности, называемая также квантованием, может быть нелинейной. В результате, оцифрованное изображение представляется матрицей с элементами $B_{i,j}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$. Каждая дискретная случайная величина $B_{i,j}$ получена осреднением поля $B(\mathbf{r})$ по площади элемента изображения с индексами (i, j) с последующим выбором ближайшего уровня квантования. Таким образом, яркость любого элемента изображения $B_{i,j}$ принадлежит множеству уровней квантования.

Совокупность всех значений яркости элементов изображений, которые могут встретиться в эксперименте, будем называть генеральной совокупностью. Оцифрованное изображение является естественной выборкой из генеральной совокупности. Отсюда возникает задача построения распределения вероятностей случайного поля по выборочным данным. Точность решения этой задачи зависит от представительности (репрезентативности) выборочной реализации. Заметим, что при цифровой обработке данных в компьютере нумерация элементов векторов и матриц ведется по умолчанию от нуля. Пока же сохраним нумерацию от единицы.

Расположим выборочные данные $B_{i,j}$ в порядке возрастания: $B^{(1)} \leq B^{(2)} \leq \dots \leq B^{(n)}$, $n = N \cdot M$. Последовательность $\{B^{(k)}\}_{1,n}$ называется ва-

риационным рядом. Символом B далее обозначаем дискретную случайную величину со значениями $B_{i,j} \in \{B^{(k)}\}_{1,n}$. Выборочной функцией распределения вероятностей дискретной случайной яркости называется кусочно-постоянная функция

$$\hat{F}_n(u) = \hat{P}\{B \leq u\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta(u - B^{(k)}), \quad (2.1)$$

где $\hat{P}\{B \leq u\}$ - частота события $B \leq u$, $\theta(u)$ - функция единичного скачка, равная 1 при $u \geq 0$ и 0 при $u < 0$. При $n \rightarrow \infty$ функция $\hat{F}_n(u)$ сходится по вероятности к функции распределения генеральной совокупности $F(u)$. В (2.1) множитель $1/n$ есть вероятность, с которой из генеральной совокупности извлечено каждое из значений $\{B^{(k)}\}_{1,n}$. Функция $\hat{F}_n(u)$ непрерывна справа, и справедливы равенства $\hat{F}_n(0) = 0$ и $\hat{F}_n(\infty) = 1$.

Дифференцируя (2.1), находим выборочную плотность распределения

$$\hat{f}_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(u - B^{(k)}). \quad (2.2)$$

Выборочная плотность указывает расположение элементов вариационного ряда на оси x . Чтобы изобразить выборочную плотность в более привычном виде, нужно отобразить плотность распределения значений $\{B^{(k)}\}_{1,n}$ на ось y . Пусть B_{min} и B_{max} - границы яркостного диапазона изображения. Полагая, что изображение квантовано линейно, δB - шаг квантования, $D = (B_{max} - B_{min})/\delta B + 1$ - число уровней квантования, присутствующих в изображении. Разделим отрезок $D \cdot \delta B$ на K интервалов $\{\Delta_l = [B_{l-1}, B_l)\}_{1,K}$ шириной $\Delta B = D \cdot \delta B / K = (B_{max} - B_{min} + 1)/K$, где $\{B_l\}_{0,K}$ - границы интервалов. Интегрируя (2.2) на каждом Δ_l , получаем $\int_{\Delta_l} \hat{f}_n(u) du = n_l/n$, где

n_l - число элементов выборки, попавших в интервал Δ_l , n_l/n - частота попадания элементов выборки в l -й интервал, $\sum_{l=1}^K n_l = n$. Кусочно-постоянная функция

$$\hat{h}_K(u) = \hat{P}\{B \in [B_{l-1}, B_l)\} = \frac{1}{\Delta B} \sum_{l=1}^K \frac{n_l}{n} [\theta(u - B_{l-1}) - \theta(u - B_l)], \quad (2.3)$$

отображает плотность распределения значений $\{B^{(k)}\}_{1,n}$ на ось u . По-другому: $\hat{h}_K(u) = n_l/n$ при $u \in [B_{l-1}, B_l)$, $l = \overline{1, K}$, и $\hat{h}_K(u) = 0$ при $u \notin [B_{l-1}, B_l)$. Поскольку величины $B^{(k)}$ являются случайными, величина $\hat{h}_K(u)$ при каждом u также случайна. Очевидно, что $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_K(u) du = 1$. Реализация функции $\hat{h}_K(u)$ называется гистограммой¹. Гистограмма является простейшей аппроксимацией плотности распределения генеральной совокупности. Форма гистограммы является одним из отличительных признаков изображения. Например, узкая гистограмма связана с низким контрастом сюжетом съемки, бимодальная гистограмма указывает на наличие областей разной яркости. Выборочной плотности в форме (2.3) соответствует эмпирическая функция распределения вида²

$$\hat{H}_K(u) = \sum_{l=1}^K \frac{n_l}{n} \theta(u - B_l). \quad (2.4)$$

В ином выражении: $\hat{H}_K(x) = \sum_{l'=1}^l n_{l'}/n$ при $x \in [B_{l-1}, B_l)$, $l = \overline{1, K}$; $\hat{H}_K(x) = 0$ при $x < B_0$ и $\hat{H}_K(x) = 1$ при $x \geq B_K$.

Гистограмму, построенную по выборочным данным, можно сравнить с известными аналитическими выражениями плотностей распределения или их комбинациями. Чтобы идентифицировать гистограмму как плотность некоторого известного распределения, применяется критерий хи-квадрат (Пирсо-

¹ В литературе существует разночтение: гистограммой называют как случайную величину (2.3), так и её реализации.

² Другое название: *кумулятивная гистограмма*.

на). Пусть $F_0(u)$, $f_0(u)$ - функция и плотность гипотетического распределения, с которым сравнивается эмпирическое распределение, представленное эмпирической функцией распределения и гистограммой. Положим $p_l = F_0(B_l) - F_0(B_{l-1})$. Тогда статистика³

$$\rho_F = \sum_{l=1}^K \frac{n}{p_l} \left(\frac{n_l}{n} - p_l \right)^2 \quad (2.5)$$

имеет при $n \rightarrow \infty$ распределение хи-квадрат с $K - 1$ степенью свободы. Если предварительно оцениваются s параметров плотности $f_0(u)$, то количество степеней свободы сокращается до $K - s - 1$. Величина ρ_F служит мерой отклонения гистограммы $\hat{h}_K(u)$ от гипотетической плотности. Обозначим $\chi_{1-\alpha, K-s-1}^2$ - квантиль распределения хи-квадрат с уровнем значимости α и $K - s - 1$ степенями свободы. Гипотеза о том, что генеральная совокупность имеет функцию распределения $F_0(u)$, принимается, если выполнено неравенство $\rho_F < \chi_{1-\alpha, K-s-1}^2$. Иначе гипотеза отвергается.

Обратимся к вычислению выборочных моментов плотности первого порядка. Начальные выборочные моменты определяются как среднее арифметическое значений $B_{i,j}^k$:

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{i,j}^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

В предположении статистической однородности изображения $\langle B_{i,j}^k \rangle \equiv \langle B^k \rangle$ статистическое усреднение $\langle \hat{\mu}_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle B_{i,j}^k \rangle = \langle B^k \rangle$ показывает, что выборочный момент в результате статистического усреднения совпадает с истинным моментом. При $k = 1$ имеем выборочное среднее

³ Статистикой называется функция выборки.

$$\hat{m} \equiv \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{i,j}. \quad (2.7)$$

Выборочные центральные моменты имеют вид

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (B_{i,j} - \hat{m})^k, \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

Выборочные дисперсия, СКО, коэффициент вариации, коэффициенты асимметрии и эксцесса соответственно определяются формулами

$$\hat{d} \equiv \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (B_{i,j} - \hat{m})^2; \quad (2.9)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{d}}; \quad (2.10)$$

$$\hat{\gamma}_0 = \hat{\sigma} / \hat{m}; \quad (2.11)$$

$$\hat{\gamma}_1 = \langle \hat{\mu}_3 \rangle / \hat{\sigma}^3; \quad (2.12)$$

$$\hat{\gamma}_2 = \langle \hat{\mu}_4 \rangle / \hat{\sigma}^4 - 3. \quad (2.13)$$

Рассмотрим двумерные выборочные характеристики. Эмпирическую функцию совместного распределения двух одинаково распределённых дискретных случайных величин B определяем следующим образом

$$\begin{aligned} F_{n^2}(u, u') &= \hat{P}\{B \leq u; B \leq u'\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta(u - B^{(i)}) \right\} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \theta(u' - B^{(j)}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Функция (2.14) монотонна и выполняются равенства $F_{n^2}(\infty, u) = F_{n^2}(u, \infty) = F_n(u)$, $F_{n^2}(0, 0) = 0$ и $F_{n^2}(\infty, \infty) = 1$.

Двумерная гистограмма представляет собой распределение частот попадания пар $(B^{(i)}, B^{(j)})$ в клетки $[B_{l-1}, B_l) \cdot [B_{l'-1}, B_{l'})$ и имеет вид кусочно-постоянной поверхности

$$\begin{aligned} \hat{h}_K(u, u') &= \hat{P}\{B \in [B_{l-1}, B_l), B \in [B_{l'-1}, B_{l'})\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{l=1}^K n_l [\theta(u - B_{l-1}) - \theta(u - B_l)] \right\} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{l'=1}^K n_{l'} [\theta(u' - B_{l'-1}) - \theta(u' - B_{l'})] \right\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\sum_{l=1}^K n_l \sum_{l'=1}^K n_{l'} = n^2$, значения n_l были определены при построении одномерной гистограммы.

Определим теперь дискретный аналог корреляционной функции (1.25). Интегрирование по бесконечным пределам заменяем суммированием по строкам и столбцам оцифрованного изображения. Поместим начало координат в центр элемента изображения с индексами (i_0, j_0) . Оси координат пройдут по элементам строки с номером i_0 и элементам столбца с номером j_0 . Для того, чтобы пределы суммирования были наибольшими, возьмем $i_0 = [N/2]$ и $j_0 = [M/2]$. При этом пределы суммирования нужно выбрать так, чтобы нумерация элементов массива значений корреляционной функции не выходила за его границы. Поэтому суммируем по строкам от $i_0 - I$ до $i_0 + I$ и по столбцам от $j_0 - J$ до $j_0 + J$, где $I \leq [N/4]$, $J \leq [M/4]$. Таким образом, суммирование производится в окне с $G = (2I + 1)(2J + 1)$ элементами с центром (i_0, j_0) . В соответствии с (1.25) последовательно вычисляем

$$\hat{m}_G = \frac{1}{G} \sum_{i=i_0-I}^{i_0+I} \sum_{j=j_0-J}^{j_0+J} B_{i,j} = \frac{1}{G} \sum_{i=-I}^I \sum_{j=-J}^J B_{i_0+i, j_0+j}, \quad (2.16)$$

$$\hat{\sigma}_G^2 = \frac{1}{G} \sum_{i=-I}^I \sum_{j=-J}^J (B_{i_0+i, j_0+j} - \hat{m}_G)^2 \quad (2.17)$$

и

$$\hat{R}_{k,m} = \frac{1}{G\hat{\sigma}_G^2} \sum_{i=-I}^I \sum_{j=-J}^J (B_{i_0+i, j_0+j} - \hat{m}_G)(B_{i_0+i+k, j_0+j+m} - \hat{m}_G). \quad (2.18)$$

Индексы k, m отвечают сдвигам аргументов τ_x, τ_y соответственно.

Глава 3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Ниже используем четыре сюжета местности, типичные для сельского ландшафта: лес (рис.1-а), вырубка (рис.1-б), луг (рис.1-в) и поселок (рис.1-г).



Рис. 1-а. Лес (Forest)



Рис. 1-б. Вырубка (Cutting area)



Рис. 1-в. Луг (Meadow)

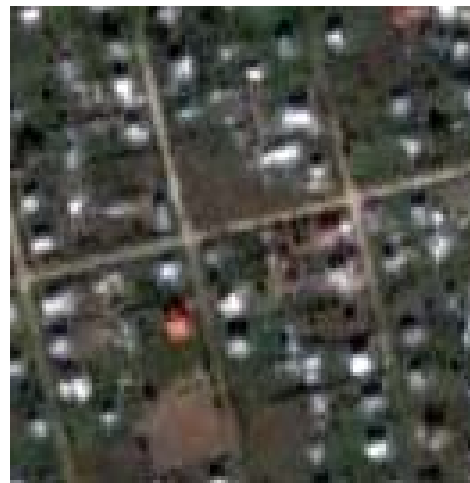


Рис. 1-г. Поселок (Settlement)

Число элементов по строке и столбцу колеблется около 128. Линейный размер элемента на местности составляет $pix = 1.65$ м. Размер каждого фрагмента порядка 200 м (128×1.65 м = 211 м). Расчеты содержатся в Док.1 MathCAD. Градация относительной яркости равна единице: $\delta B = 1$. Во всех документах нумерация элементов векторов и матриц принимается по умолчанию от нуля.

Это обстоятельство нужно учитывать при перенесении полученных в Гл. 1, Гл. 2 формул в документы MathCAD.

В Док.1 использован фрагмент изображения лесного массива. В разделе Док.1 «Считывание матрицы оптических плотностей» этот фрагмент считывается оператором READBMP из файла «Forest_1.65_128.bmp», где данные записаны в формате *.bmp, в матрицу B . Элементами матрицы B являются положительные целые числа $B_{i,j}$. На рис.2 матрица B представлена в виде двумерного распределения уровней яркости, аппроксимирующей значения $B_{i,j}$. Поверхность построена в графическом редакторе MathCAD, который вызывается быстрыми клавишами [Ctrl,@]. По горизонтальным осям откладываются значения индексов i и j элементов матрицы. Чтобы перейти к реальным расстояниям на плоскости, нужно умножить значения индексов на значение pix .

В разделе Док.1 «Гистограмма» на рис.3 показано приближение эмпирической плотности нормированной гистограммой. Функция $hist(x, B)$ по заданному вектору x , содержащему границы интервалов $\{B_l\}_{0,K}$, и массиву B возвращает вектор $\{n_l\}_{0,K-1}$. Чтобы перейти от ненормированной гистограммы к нормированной эмпирической плотности, нужно умножить $hist(x, B)$ на нормирующий множитель $1/n$ и разделить на ширину интервалов $\Delta B = [max(B) - min(B) + 1]/K$. Здесь $max(B)$ и $min(B)$ - максимальный и минимальный элементы матрицы B . На рис.4 приводится соответствующая данной гистограмме эмпирическая функция распределения $\hat{H}(x)$. В соответствии с определением (2.4) эта функция непрерывна справа.

В разделе Док.1 «Выборочные моменты» вычислены выборочные среднее, дисперсия, третий и четвертый центральные моменты, СКО, коэффициенты вариации, асимметрии и эксцесса по формулам, указанным в Гл. 2. Для сравнения приводятся значения, которые возвращают функции $mean(B)$ – среднее, $var(B)$ - дисперсия, $stdev(B)$ - СКО, $skew(B)$ - коэффициент асимметрии, $kurt(B)$ - коэффициент эксцесса.

В разделе Док.1 «Функции гипотетических распределений вероятностей» гистограмма сравнивается с плотностями нормального и гамма-распределений. Оба распределения двухпараметрические. Параметрами нормального распределения являются m - среднее и σ - СКО. Нормальная плотность при известных значениях параметров m и σ задается функцией $f(x) = dnorm(x, m, \sigma)$. Параметры гамма-распределения λ и ν выражаются через m и σ следующим образом: $\lambda = m/\sigma^2$ - масштабный параметр, $\nu = m^2/\sigma^2$ - параметр формы. Гамма-плотность при $\lambda = 1$ и известном значении параметра ν задается функцией $g(x) = dgamma(x, \nu)$. При $\lambda \neq 1$ плотность задается как $g(x) = \lambda dgamma(\lambda x, \nu)$. Соответствующие функции распределения имеют вид $F(x) = pnorm(x, m, \sigma)$ и $G(x) = pgamma(\lambda x, \nu)$. На рис.5 эмпирическая плотность сравнивается с нормальной и гамма-аппроксимациями. Вместо m , σ подставлены значения \hat{m} и $\hat{\sigma}$.

В разделе Док.1 «Критерий Пирсона» проверяется гипотеза о виде распределения. В соответствии с процедурой, изложенной в Гл. 2, вычисляются вероятности $p_l = F(B_l) - F(B_{l-1})$ и $q_l = G(B_l) - G(B_{l-1})$, $l = \overline{0, K-1}$. Далее вычисляются значения статистик ρ_F и ρ_G . При этом учитывается, что частоты n_l/n в формуле (2.5) являются составляющими вектора $hist(x, B)/n$. Квантиль распределения хи-квадрат с уровнем значимости α (мерой доверия $1 - \alpha$) с $K - 3$ степенями свободы вычисляет функция $qchisq(1 - \alpha, K - 3)$. Из расчетов следует, что $\rho_F \gg \chi_{1-\alpha, K-3}^2$, т.е. гистограмма далека от нормальной и гамма-плотности. Из рис.5 видно, что некоторые градации яркости значительно отклоняются от гипотетических значений.

Для сравнения в Док.2 критерий хи-квадрат применяется для идентификации распределения яркости имитированного изображения. Каждый столбец матрицы яркостей представлен взвешенной суммой вектор-столбца с одинаково нормально распределёнными независимыми компонентами и вектор-столбца с одинаково равномерно распределёнными независимыми

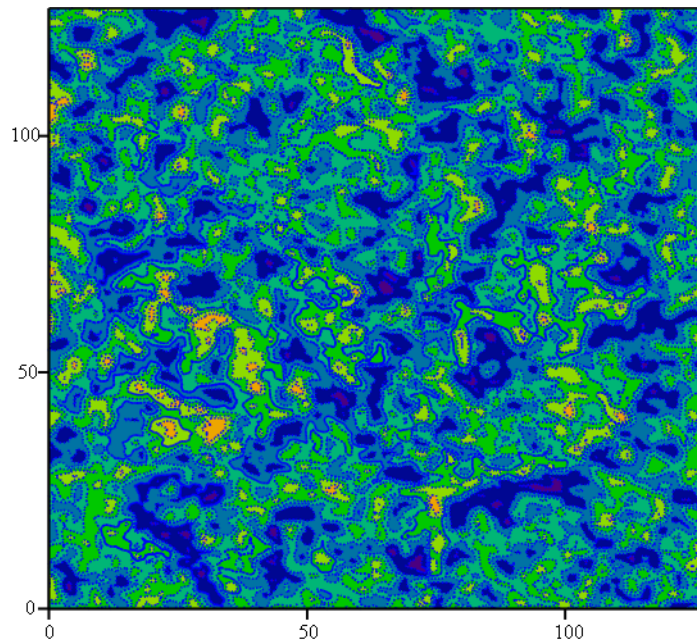
Распределение яркости изображения

Считывание матрицы оптических плотностей

$B := \text{READBMP}(\text{"Forest_1.65_128.bmp"})$

Число элементов изображения по строкам $nr := \text{rows}(B) = 128$

по столбцам $nc := \text{cols}(B) = 128$ всего $n := nr \cdot nc = 16384$



B

Рис. 2. Распределение яркости.

Гистограмма

Максимальный и минимальный элементы матрицы B $\min(B) = 22$ $\max(B) = 91$

Количество градаций яркости в яркостном диапазоне $D := \max(B) - \min(B) + 1 = 70$

Количество интервалов $K := 25$ Ширина интервалов $\Delta B := D \cdot K^{-1} = 2.8$

Границы интервалов $l := 0..K$ $u_l := \min(B) + l \cdot \Delta B$

Гистограмма $h := \text{hist}(u, B) \cdot n^{-1}$

$\text{length}(h) = 25$ Проверка $\sum_{i=0}^{K-1} h_i = 1$

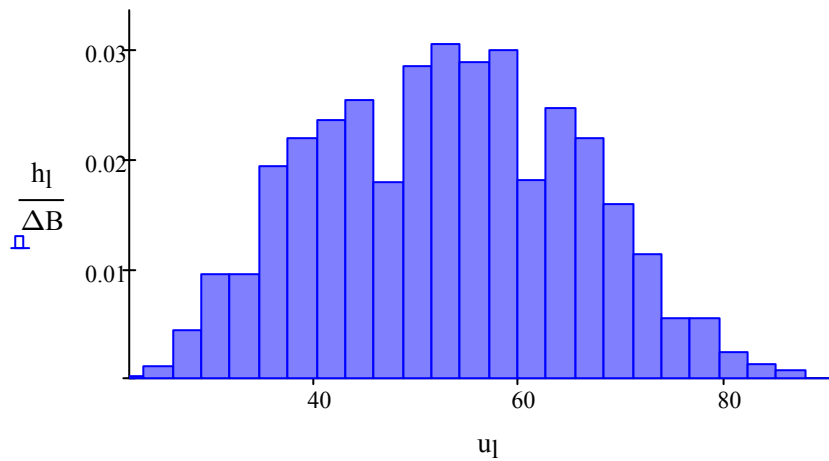


Рис. 3. Приближение эмпирической плотности гистограммой.

Эмпирическая функция распределения, соответствующая гистограмме

$$H(x) := \sum_{l=0}^{K-1} (h_l \cdot \Phi(x - u_l))$$

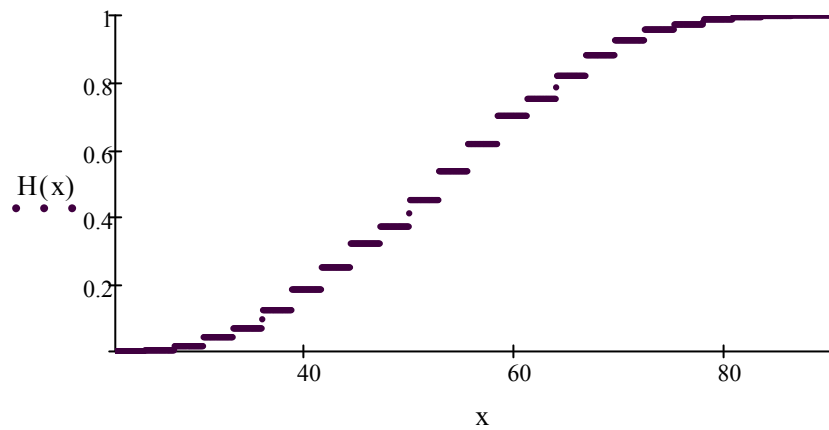


Рис. 4. Эмпирическая функция распределения (кумулятивная гистограмма).

Выборочные моменты

$$i := 0..nr - 1 \quad j := 0..nc - 1 \quad \bar{m} := n^{-1} \cdot \sum_j \left(\sum_i B_{i,j} \right) \quad d := n^{-1} \cdot \sum_j \left[\sum_i (B_{i,j} - m)^2 \right]$$

$$\mu_3 := n^{-1} \cdot \sum_j \left[\sum_i (B_{i,j} - m)^3 \right] \quad \mu_4 := n^{-1} \cdot \sum_j \left[\sum_i (B_{i,j} - m)^4 \right]$$

Среднее $m = 54.2$ $\text{mean}(B) = 54.2$ Дисперсия $d = 156$ $\text{var}(B) = 156$

СКО $\sigma := \sqrt{d} = 12.49$ $\text{stdev}(B) = 12.49$ Коэффициент вариации $\gamma_0 := \sigma \cdot m^{-1} = 0.23$

Коэффициент асимметрии $\gamma_1 := \mu_3 \cdot \sigma^{-3} = 0.06$ $\text{skew}(B) = 0.06$

Коэффициент эксцесса $\gamma_2 := \mu_4 \cdot \sigma^{-4} - 3 = -0.67$ $\text{kurt}(B) = -0.67$

Функции гипотетических распределений вероятностей

Нормальное распределение

Функция распределения $F(x) := \text{pnorm}(x, m, \sigma)$ Плотность $f(x) := \text{dnorm}(x, m, \sigma)$

Гамма-распределение

Оценки параметров $\lambda := m \cdot \sigma^{-2} = 0.35$ $\nu := m^2 \cdot \sigma^{-2} = 18.82$

Функция распределения $G(x) := \text{pgamma}(\lambda \cdot x, \nu)$ Плотность $g(x) := \lambda \cdot \text{dgamma}(\lambda \cdot x, \nu)$

Проверка $\int_0^{150} f(x) dx = 1$ $\int_0^{150} g(x) dx = 1$ $x := 0, 1..100$

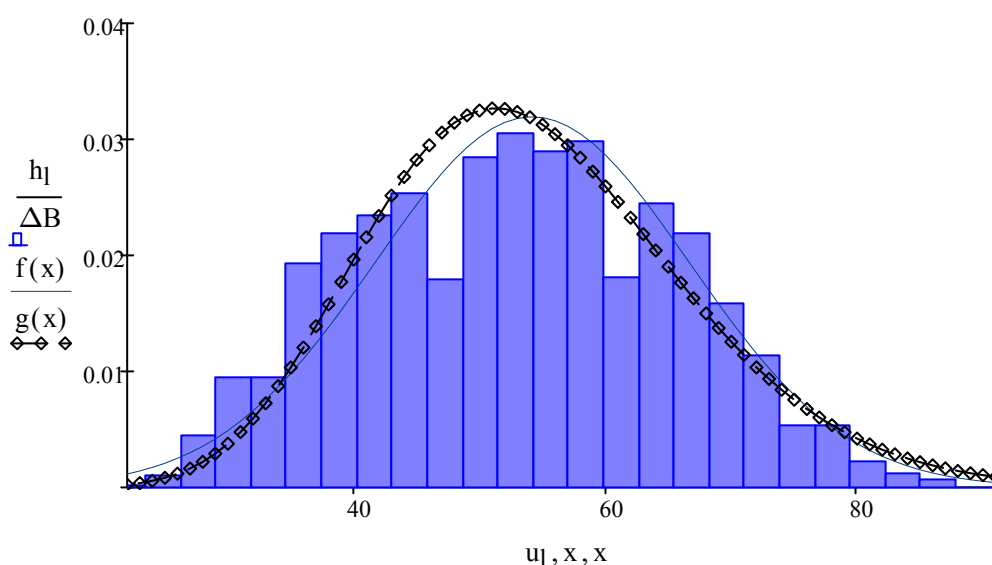


Рис. 5. Аналитическая аппроксимация эмпирической плотности.

Критерий Пирсона

Квантиль распределения хи-квадрат $qchisq(0.95, K - 3) = 33.924$

Вычисление вероятностей $p_0 := F(u_1)$ $q_0 := G(u_1)$ $l := 1..K - 2$

$p_l := F(u_{l+1}) - F(u_l)$ $q_l := G(u_{l+1}) - G(u_l)$ $p_{K-1} := 1 - F(u_{K-1})$ $q_{K-1} := 1 - G(u_{K-1})$

Проверка $\sum_{l=0}^{K-1} p_l = 1$ $\sum_{l=0}^{K-1} q_l = 1$

Значение критерия $\rho_F := \left[n \cdot \sum_1 \left[(p_l)^{-1} \cdot (h_l - p_l)^2 \right] \right]$ $\rho_G := \left[n \cdot \sum_1 \left[(q_l)^{-1} \cdot (h_l - q_l)^2 \right] \right]$

$\rho_F = 798.2$

$\rho_G = 1051.2$

компонентами. Используются следующие датчики случайных чисел¹: $rnorm(n, m, \sigma)$ возвращает случайную последовательность n чисел, распределенных нормально с параметрами m и σ , $runif(n, a, b)$ возвращает случайную последовательность n чисел, распределенных равномерно в интервале $[a, b]$. Реализация случайного поля яркости приводится на рис.6. Гистограмма и нормальная аппроксимация показаны на рис.7. Критерий Пирсона идентифицирует распределение поля яркости как нормальное с параметрами \hat{m} и $\hat{\sigma}$.

В Док.3 построены двумерные гистограммы, которые являются приближенными эмпирическими плотностями второго порядка для фрагмента изображения леса и имитированного изображения с нормальным распределением оптической плотности. При построении двумерных гистограмм в соответствии с (2.15) используются одномерные гистограммы, представленные на рис.8-а,б. Двумерные гистограммы изображены на рис.9-а и рис.9-б. Сравнение гистограмм на рис.9-а и рис.9-б показывает, что плотность распределения оптической плотности пар элементов у имитированного изображения значительно уже, чем у реального изображения с теми же значениями среднего и СКО.

В Док.4 в разделе «Двумерная корреляционная функция» вычисляется корреляционная функция фрагмента изображения леса. Сдвиг ее аргумента отсчитывается от центра снимка. Расчеты выполнены по формулам (2.16) - (2.18). Центр снимка (i_0, j_0) определен пересечением центральной строки и центрального столбца. Пределы суммирования в (2.16) - (2.18) приняты равными четверти линейного размера фрагмента. Изображения корреляционной функции и карты линий уровня показаны на рис.10.

В разделе Док.4 «Одномерные корреляционные функции по разрезам» рассматриваются корреляционные функции по центральным вертикальному и горизонтальному разрезам изображения. Изменение яркости вдоль разрезов (сплошная) и ее среднее значение (штрих-пунктир) показаны на рис.11 и

¹ Эти числа точнее называть псевдослучайными.

Моделирование случайного поля

Имитация поля яркости

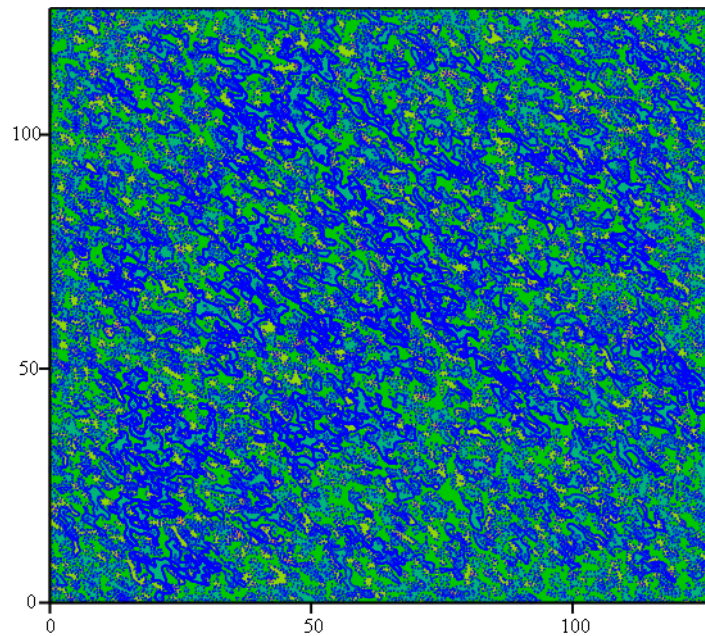
Число строк и столбцов $r := 128$ Всего элементов $n := r^2 = 16384$

Среднее и СКО нормальной составляющей $\underline{m} := 54$ $\sigma := 12$

Границы отрезка изменения равномерной составляющей $a := 20$ $b := 80$

Вес нормальной составляющей $\alpha := 0.7$

Столбцы матрицы данных $i := 0..r-1$ $B^{(i)} := \alpha \cdot \text{norm}(r, m, \sigma) + (1 - \alpha) \cdot \text{runif}(r, a, b)$



B

Рис. 6. Реализация поля яркости.

Гистограмма и ее аппроксимация

Количество интервалов $\underline{K} := 25$ Ширина интервалов $\Delta B := \frac{\max(B) - \min(B) + 1}{K} = 2.93$

Границы интервалов $\underline{l} := 0..K$ $u_l := \min(B) + l \cdot \Delta B$ Гистограмма $h := \frac{\text{hist}(u, B)}{n}$

Выборочное среднее $m_B := \text{mean}(B) = 52.8$ Выборочное СКО $\sigma_B := \text{stdev}(B) = 9.9$

Функция и плотность нормального распределения

$$F(x) := \text{pnorm}(x, m_B, \sigma_B) \quad f(x) := \text{dnorm}(x, m_B, \sigma_B)$$

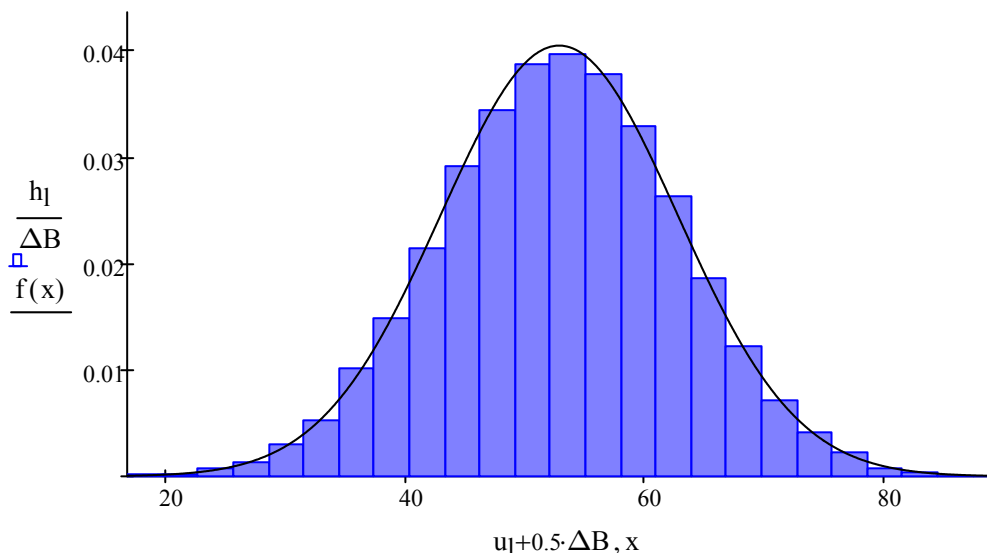


Рис. 7. Аналитическая аппроксимация эмпирической плотности.

Проверка гипотезы

Нормирование и центрирование случайной величины $x_l := \frac{u_l - m_B}{\sigma_B}$

Вычисление вероятностей

$$p_0 := \text{snorm}(x_1) \quad l := 1..K - 2 \quad p_l := \text{snorm}(x_{l+1}) - \text{snorm}(x_l)$$

$$p_{K-1} := 1 - \text{snorm}(x_{K-1}) \quad l := 0..K - 1 \quad \sum_1 p_l = 1$$

Критерий Пирсона $\rho := n \cdot \sum_1 \left[\frac{1}{p_l} \cdot (h_l - p_l)^2 \right] \quad \rho = 17$

Квантиль распределения хи-квадрат $\text{qchisq}(0.95, K - 3) = 33.9$

Совместная плотность распределения

Считывание матрицы оптических плотностей

$B := \text{READBMP}(\text{"Forest_1.65_128.bmp"})$

Число элементов изображения по строкам $nr := \text{rows}(B) = 128$

по столбцам $nc := \text{cols}(B) = 128$ всего $n := nr \cdot nc = 16384$

Выборочное среднее $\bar{m} := \text{mean}(B) = 54.2$ Выборочное СКО $\sigma := \text{stdev}(B) = 12.5$

Имитация нормального поля яркости

Столбцы матрицы данных $i := 0..nc - 1$ $U^{(i)} := \text{rnorm}(nr, m, \sigma)$

Одномерные гистограммы

Количество интервалов $K := 25$

Ширина интервалов $\Delta B := \frac{\max(B) - \min(B) + 1}{K} = 2.8$ $\Delta U := \frac{\max(U) - \min(U) + 1}{K} = 3.83$

Границы интервалов $l := 0..K$ $b_l := \min(B) + l \cdot \Delta B$ $u_l := \min(U) + l \cdot \Delta U$

Гистограммы $h := \frac{\text{hist}(b, B)}{n}$ $h_{\text{норм}} := \frac{\text{hist}(u, U)}{n}$

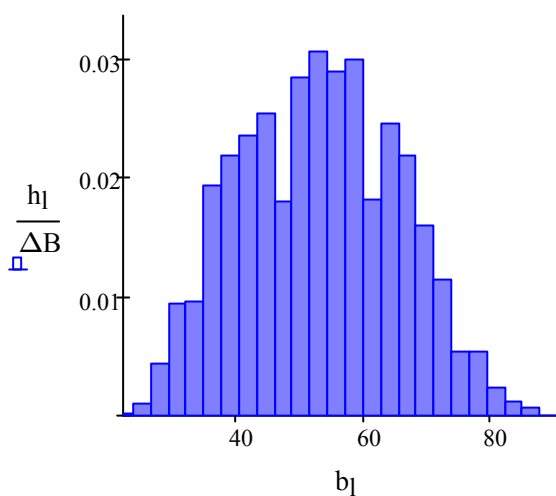


Рис. 8-а. Одномерная гистограмма реального поля.

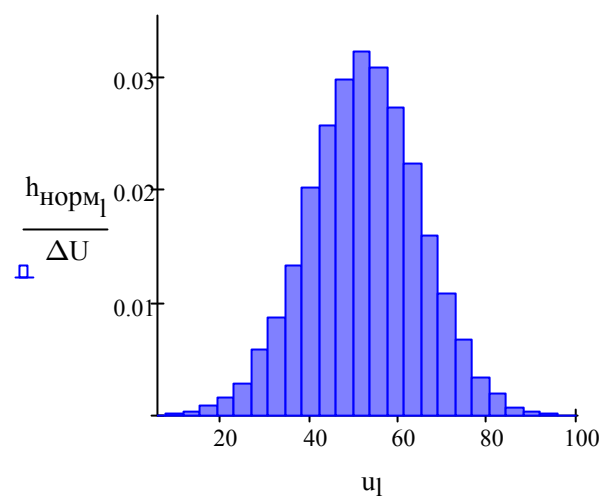


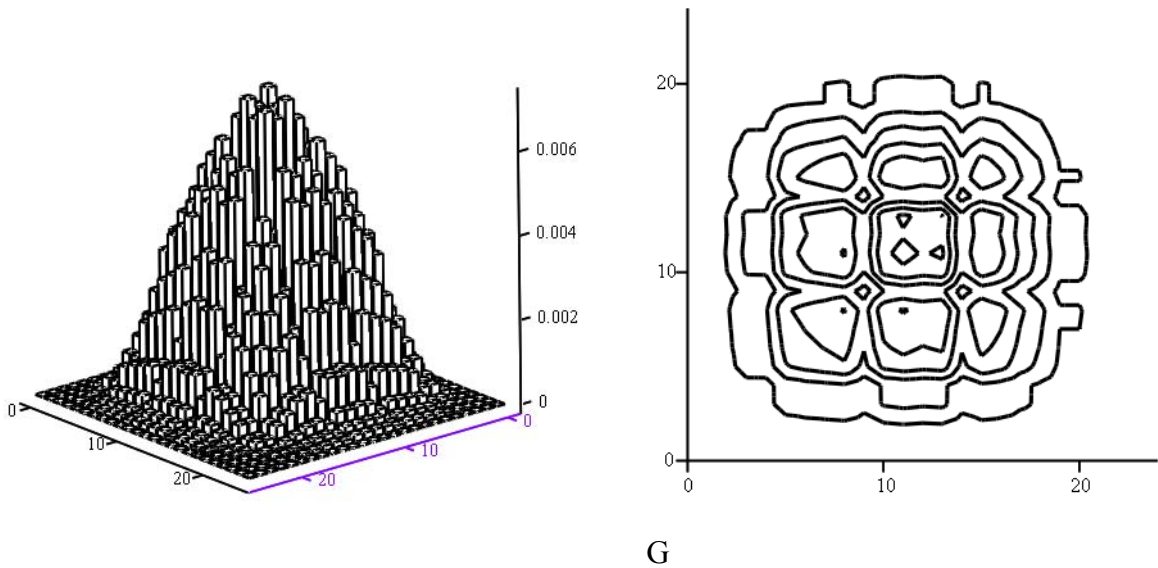
Рис. 8-б. Одномерная гистограмма нормального поля.

Двумерные гистограммы

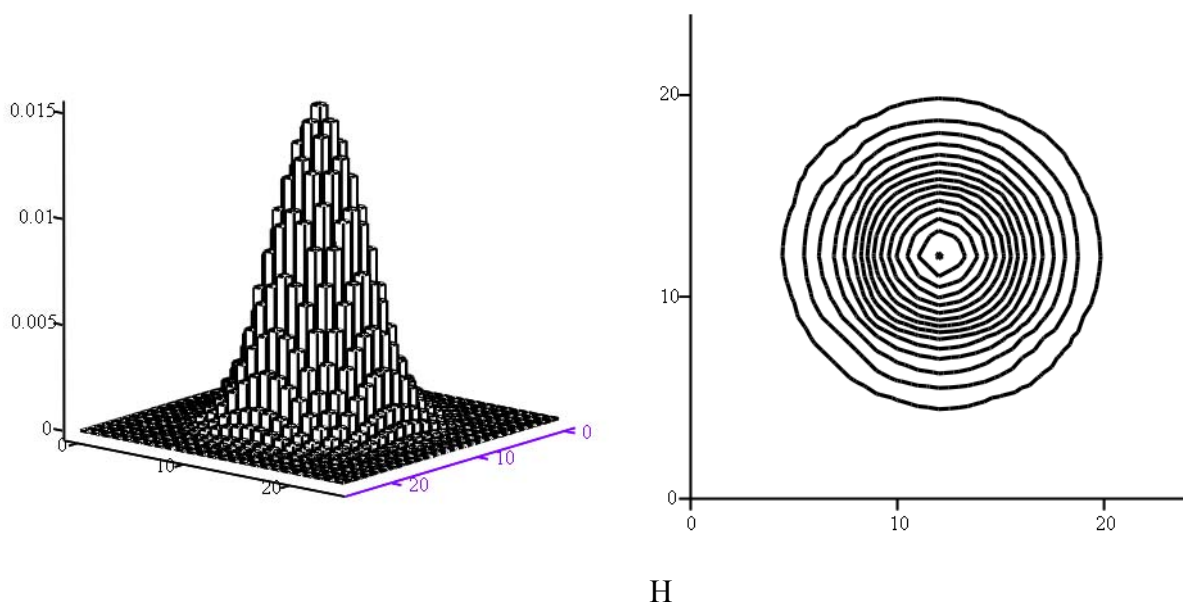
Элементы матриц частот $i := 0..K - 1$ $j := 0..K - 1$

$$G_{i,j} := h_i \cdot h_j \quad H_{i,j} := h_{\text{норм}_i} \cdot h_{\text{норм}_j}$$

Проверка $\sum_i \left(\sum_j G_{i,j} \right) = 1$ $\sum_i \left(\sum_j H_{i,j} \right) = 1$



Г Рис. 9-а. Двумерная гистограмма реального поля. Вид сбоку и сверху.



Н Рис. 9-б. Двумерная гистограмма нормального поля. Вид сбоку и сверху.

Корреляционные свойства реального изображения

Считывание матрицы оптических плотностей

$$B := \text{READBMP}(\text{"Forest_1.65_128.bmp"})$$

Число элементов изображения по строкам $nr := \text{rows}(B) = 128$

по столбцам $nc := \text{cols}(B) = 128$ всего $n := nr \cdot nc = 16384$

Двумерная корреляционная функция

Индексы центральной точки $i_0 := \text{floor}\left(\frac{nr}{2}\right) = 64$ $j_0 := \text{floor}\left(\frac{nc}{2}\right) = 64$

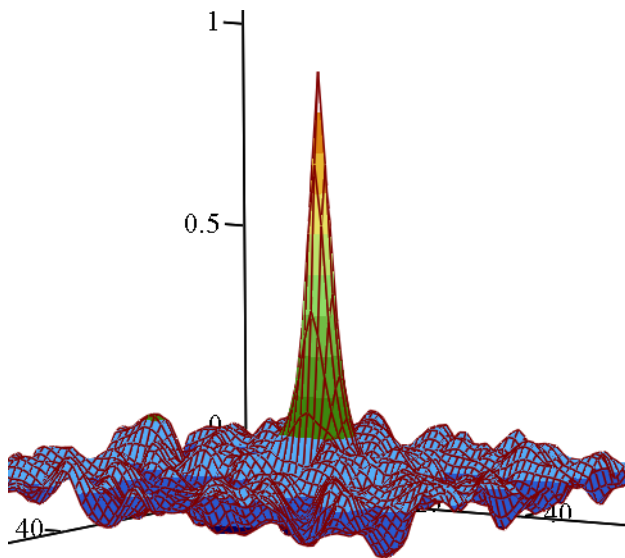
Сдвиг в пикселях $T := \min\left(\text{floor}\left(\frac{nr}{4}\right), \text{floor}\left(\frac{nc}{4}\right)\right) = 32$ $i := i_0 - T..i_0 + T$ $j := j_0 - T..j_0 + T$

$S := (2 \cdot T + 1)^2$ Среднее на площади $S \cdot \text{pix}^2$ $m_S := \frac{1}{S} \cdot \sum_i \left(\sum_j B_{i,j} \right) = 54.02$

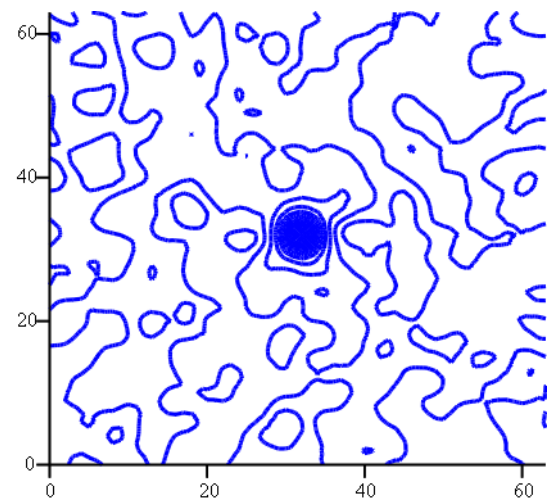
$S = 4225$ СКО на площади $S \cdot \text{pix}^2$ $d_S := \frac{1}{S} \cdot \sum_i \left[\sum_j (B_{i,j} - m_S)^2 \right]$ $\sigma_S := \sqrt{d_S} = 12.24$

Пространственное разрешение $\text{pix} := 1.65$ $k := -T..T - 1$ $m := -T..T - 1$

$$R_{k+T, m+T} := \frac{1}{S \cdot d_S} \cdot \sum_i \left[\sum_j [(B_{i,j} - m_S) \cdot (B_{i+k, j+m} - m_S)] \right] \quad R_{T, T} = 1$$



R



R

Рис. 10. Корреляционная функция в виде поверхности вращения и карты линий уровня.

$$k := 0..2 \cdot T - 1 \quad m := 0..2 \cdot T - 1 \quad \text{Площадь корреляции} \quad S_\rho := \sum_k \sum_m R_{k,m} = 20.99$$

$$\frac{S_\rho}{S} = 0.005 \quad \text{Радиус корреляции} \quad \rho := \sqrt{S_\rho \cdot \pi^{-1}} = 2.58$$

Одномерные корреляционные функции по разрезам

Разрез по оси τ_x

$$\text{Длина разреза в пикселях} \quad L := 2 \cdot T + 1 \quad \text{Среднее по разрезу} \quad m_L := \frac{1}{L} \cdot \sum_i B_{i,j_0} = 54.4$$

$$\text{Дисперсия и СКО по разрезу} \quad d_L := \frac{1}{L} \cdot \sum_i (B_{i,j_0} - m_L)^2 \quad \sigma_L := \sqrt{d_L} = 11.3$$

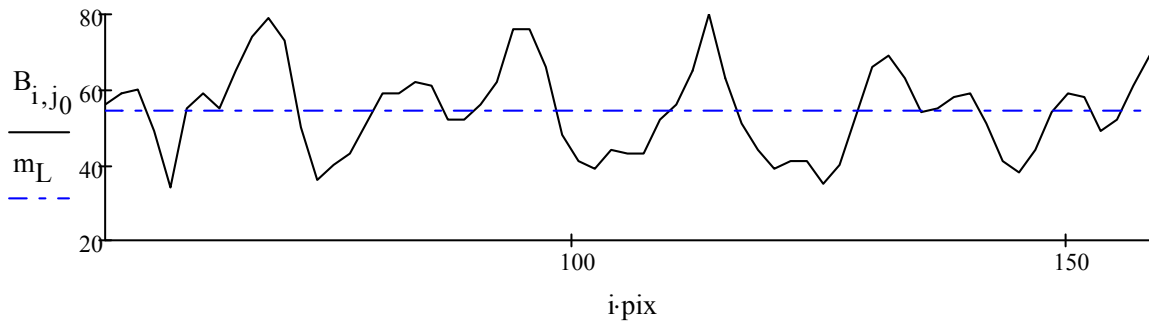


Рис. 11. Оптическая плотность и ее среднее вдоль оси τ_x .

$$k := -T..T - 1 \quad C_{k+T} := \frac{1}{L \cdot d_L} \cdot \sum_i [(B_{i,j_0} - m_L) \cdot (B_{i+k,j_0} - m_L)] \quad C_T = 1$$

$$\text{Аппроксимация} \quad \alpha_x := 0.15 \quad \beta_x := 0.2 \quad T := T \cdot \text{pix} \quad R_x(\tau) := e^{-\alpha_x \cdot |\tau|} \cdot \cos(\beta_x \cdot \tau)$$

$$x_0 := -T \quad \Delta\tau := \text{pix} \quad k := 0..2 \cdot T - 1 \quad x_k := x_0 + k \cdot \Delta\tau$$

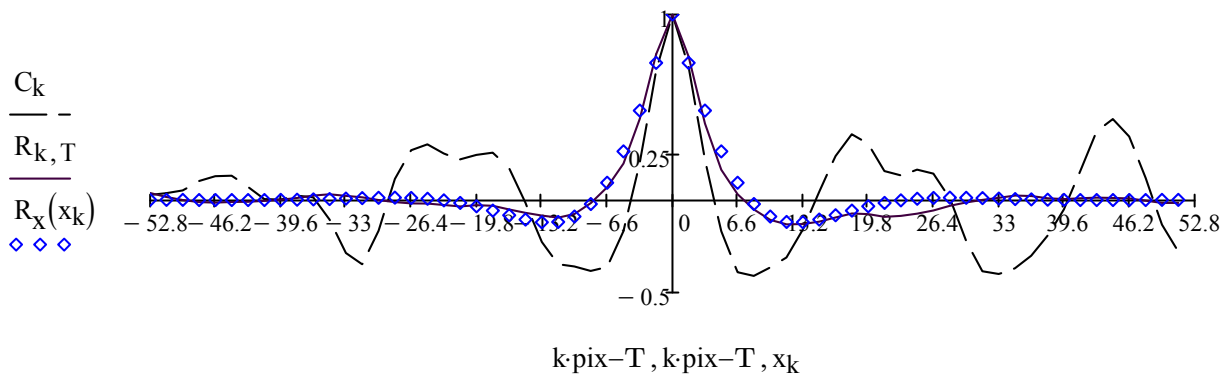


Рис. 12. Корреляционная функция в разрезе $\tau_y = 0$.

Разрез по оси τ_y

Среднее по разрезу $m_L := \frac{1}{L} \cdot \sum_j B_{i_0,j} = 46.6$

Дисперсия и СКО по разрезу $d_L := \frac{1}{L} \cdot \sum_j (B_{i_0,j} - m_L)^2$ $\sigma_L := \sqrt{d_L} = 12.5$

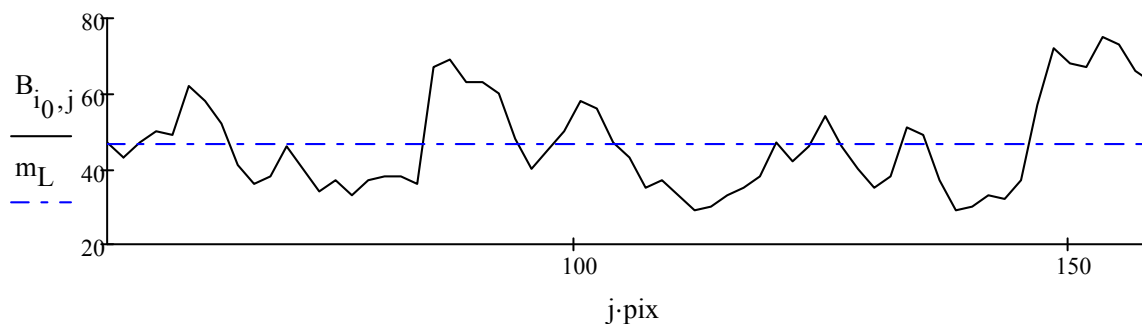


Рис. 13. Оптическая плотность и ее среднее вдоль оси τ_y .

$$m := -T .. T - 1 \quad C_{m+T} := \frac{1}{L \cdot d_L} \cdot \sum_j [(B_{i_0,j} - m_L) \cdot (B_{i_0,j+m} - m_L)]$$

Аппроксимация $\alpha_y := 0.2$ $\beta_y := 0.1$ $R_y(\tau) := e^{-\alpha_y \cdot |\tau|} \cdot \cos(\beta_y \cdot \tau)$

$$y_0 := -T \quad \Delta\tau := \text{pix} \quad m := 0 .. 2 \cdot T - 1 \quad y_m := y_0 + m \cdot \Delta\tau$$

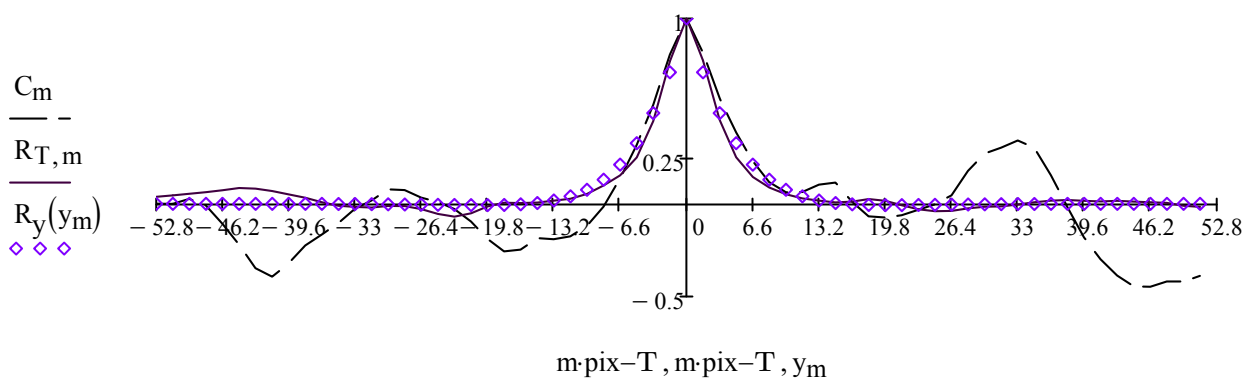


Рис. 14. Корреляционная функция в разрезе $\tau_x = 0$.

Определение радиуса корреляции по оси x из условия $R_x(r_{0x}) = 0.5$

$$w := \rho \quad r_{0x} := \text{root}(R_x(w) - 0.5, w) = 3.2$$

Определение радиуса корреляции по оси y из условия $R_y(r_{0y}) = 0.5$

$$w := \rho \quad r_{0y} := \text{root}(R_y(w) - 0.5, w) = 3.2$$

Двумерная аппроксимация

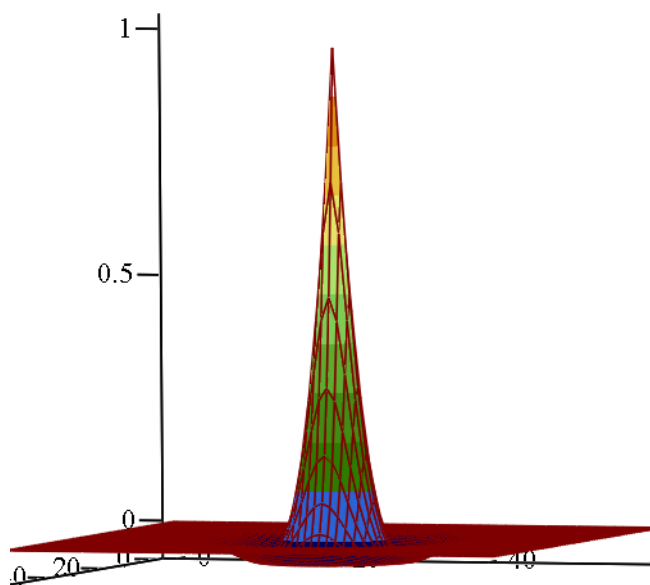
$$\alpha := 0.175 \quad \beta := 0.15$$

$$K(u, v) := \exp\left[-\alpha \cdot \sqrt{(u - T)^2 + (v - T)^2}\right] \cdot \cos\left[\beta \cdot \sqrt{(u - T)^2 + (v - T)^2}\right]$$

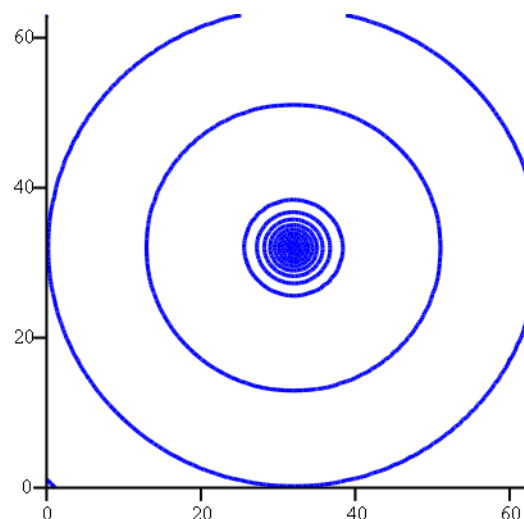
$$x_0 := 0 \quad y_0 := 0 \quad \Delta x := \text{pix} \quad \Delta y := \text{pix}$$

$$i := 0..2 \cdot T - 1 \quad j := 0..2 \cdot T - 1 \quad x_i := x_0 + i \cdot \Delta x \quad y_j := y_0 + j \cdot \Delta y$$

$$A_{i,j} := K(x_i, y_j)$$



A



A

Рис. 15. Аппроксимация корреляционной функции в виде поверхности вращения и карты линий уровня.

рис.13. Корреляционные функции по разрезам приведены на рис.12 и рис.14, где ось абсцисс измеряется в метрах. Сплошная линия – разрез двумерной корреляционной функции, ромбы – его аппроксимация, пунктир – корреляционная функция по отдельно взятому яркостному разрезу. Наблюдается сильное различие между сплошными и пунктирными линиями. Последние не затухают с увеличением значений аргумента. Это означает, что процесс изменения яркости вдоль разреза, взятого вне связи с его окрестностью, может быть не эргодическим. Сравнивая разрезы корреляционной функции по осям τ_x и τ_y , заключаем, что данное случайное поле можно приближённо считать изотропным. На этом основании в качестве двумерной аппроксимации используется функция (1.31), обладающая радиальной симметрией. Затухающие колебания корреляционной функции указывают на то, что изображение леса имеет периодическую структуру. Эта аппроксимация указана на рис.15.

В Док.4 вычисляются также площадь корреляции S_ρ , отношение S_ρ/S , которое можно использовать в качестве показателя эргодичности случайного поля, и радиус корреляции ρ . Для эргодических полей $\lim_{S \rightarrow \infty} S_\rho/S = 0$. Эргодичность нарушается, если корреляционная функция имеет незатухающую составляющую. При этом площадь корреляции возрастает пропорционально S и предел отношения S_ρ/S при $S \rightarrow \infty$ имеет отличное от нуля значение. Полученное значение ρ согласуется с экспериментальными данными. Наряду с ρ , вычисляются радиусы корреляции r_{0,x_0} , $r_{0,y}$ вдоль осей координат, исходя из условий (1.53) и (1.54) с константой $c = 0.25$.

В Док.5 содержатся расчеты корреляционной функции имитированного нормального поля. Нормальное случайное поле, заданное случайным вектором длины n с независимыми компонентами, δ -коррелировано. Значения его параметров m и σ взяты из Док.4. Численные расчеты, выполненные в Док.5, наглядно показывают, что корреляционная функция δ -коррелированного поля, умноженная на дисперсию σ^2 , представляет собой δ -функцию в соответствии с формулой (1.11). Поскольку в численных расчётах

Корреляционные свойства нормального поля

Имитация нормального поля яркости

Число элементов изображения по строкам $nr := 128$ по столбцам $nc := 128$

всего $n := nr \cdot nc = 16384$ Среднее $\underline{m} := 54$ СКО $\sigma := 12$

Столбцы матрицы данных $i := 0..nc - 1$ $B^{(i)} := \text{rnorm}(nr, m, \sigma)$

Двумерная корреляционная функция

Индексы центральной точки $i_0 := \text{floor}\left(\frac{nr}{2}\right) = 64$ $j_0 := \text{floor}\left(\frac{nc}{2}\right) = 64$

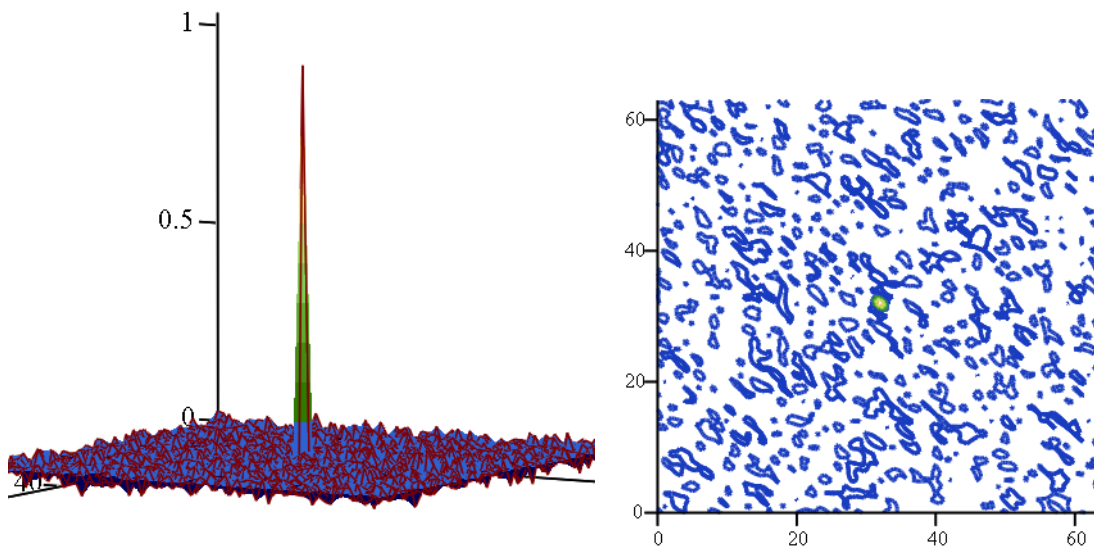
Сдвиг в пикселях $\underline{T} := \frac{nr}{4} = 32$ $i := i_0 - T..i_0 + T$ $j := j_0 - T..j_0 + T$

$\underline{S} := (2 \cdot T + 1)^2$ Среднее по площади $S \cdot \text{pix}^2$ $m_S := \frac{1}{S} \cdot \sum_i \left(\sum_j B_{i,j} \right) = 54.07$

$S = 4225$ СКО по площади $S \cdot \text{pix}^2$ $d_S := \frac{1}{S} \cdot \sum_i \left[\sum_j (B_{i,j} - m_S)^2 \right]$ $\sigma_S := \sqrt{d_S} = 12.13$

Пространственное разрешение $\text{pix} := 1.65$ $k := -T..T - 1$ $\underline{m} := -T..T - 1$

$\underline{R}_{k+T, m+T} := \frac{1}{S \cdot d_S} \cdot \sum_i \left[\sum_j [(B_{i,j} - m_S) \cdot (B_{i+k, j+m} - m_S)] \right]$ $R_{T, T} = 1$



R

R

Рис. 16. Корреляционная функция. Вид сбоку и сверху.

Корреляционная функция в разрезах

$$T := T \cdot \text{pix}$$

$$k := 0..2 \cdot T - 1$$

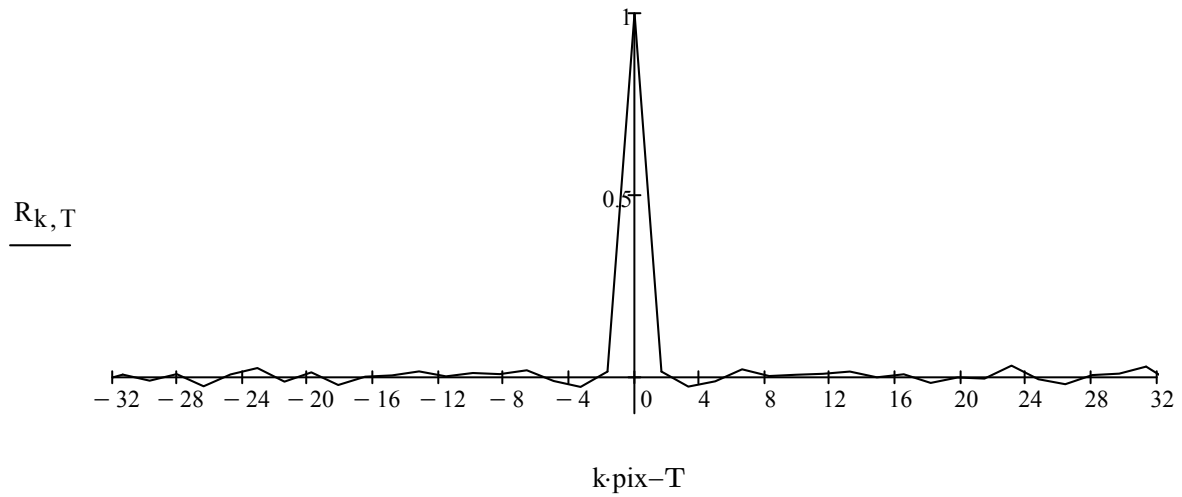


Рис. 17. Корреляционная функция в разрезе $\tau_y = 0$.

$$m := 0..2 \cdot T - 1$$

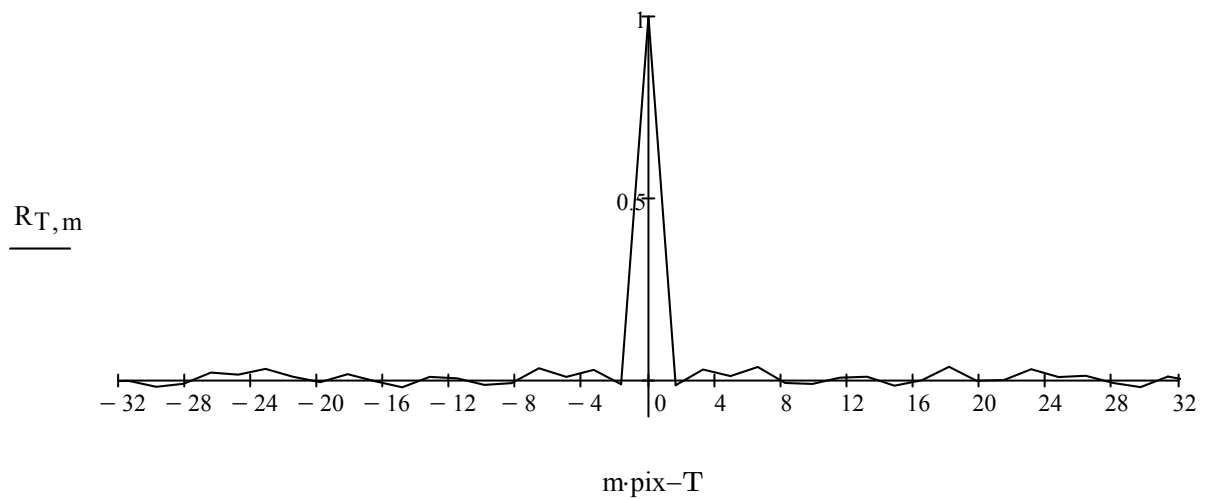


Рис. 18. Корреляционная функция в разрезе $\tau_x = 0$.

имеют дело с конечными величинами, δ -функция равна нулю везде, кроме одной точки, в которой принимает значение σ^2 . Поскольку радиус корреляции теоретически равен нулю, его численный расчет теряет смысл.

В Док.6 исследованы аппроксимации спектральных плотностей для фрагмента изображения леса. Значения параметров аппроксимаций α и β взяты из Док.4. На рис.19 сплошной и пунктирной линиями показаны соответственно центральные разрезы поверхностей (1.32) и (1.37) (или, что то же самое, (1.45) и (1.48) при $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$). Для сравнения выполнены расчеты по формулам (1.40) и (1.42) при $\omega_y = 0$, $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$, $\beta_x = \beta_y = \beta$. Кривые на рис. 20 качественно близки к аналогичным кривым на рис.19. Смещение максимума от нулевой пространственной частоты $q = 0$ в область $q \sim 0.3\text{ м}^{-1}$ согласуется с экспериментальными измерениями спектральной плотности изображений леса. Поэтому аппроксимация (1.32) более реалистична, чем (1.37), а аппроксимация (1.40), в свою очередь, более реалистична нежели (1.42). Смещение максимума спектральной плотности в её аналитических представлениях определяется наличием периодического множителя у корреляционной функции ($\beta > 0$). Таким образом, параметр β существенно влияет на характер спектральной кривой. На рис.21 и рис.22 показаны спектральные поверхности, построенные по формулам (1.32) и (1.40).

Каждая из рассмотренных выше аппроксимаций может оказаться не вполне удовлетворительной для описания эмпирических зависимостей. Более точный результат даёт взвешенная сумма базовых аппроксимаций. В Док.7 представлены взвешенные радиально симметричные аппроксимации корреляционной функции и спектральной плотности. Параметры λ , α , β , ν , подбираются по виду корреляционной функции вдоль её продольного (рис.23) и поперечного (рис.24) центральных разрезов. Центральный разрез нормированной спектральной плотности показан на рис.25. Двумерные аппроксимации представлены на рис.26 и рис.27.

Нормированная спектральная плотность

Разрезы аппроксимаций с радиальной симметрией

$$\alpha := 0.2 \quad \beta := 0.2$$

$$\underline{\underline{F}}(v) := 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{20} r \cdot e^{-\alpha \cdot r} \cdot J_0(v \cdot r) \cdot \cos(\beta \cdot r) \, dr \quad \underline{\underline{G}}(v) := \frac{2 \cdot \pi \cdot \alpha}{\left(\sqrt{\alpha^2 + v^2}\right)^3}$$

$$F(0) = -1.68 \quad G(0) = 157.08$$

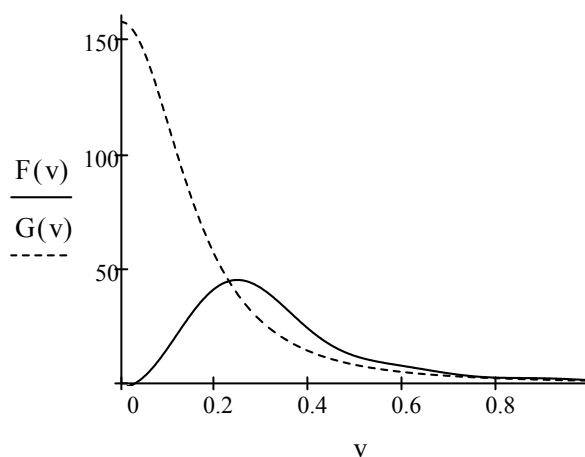


Рис. 19. Две аппроксимации нормированной спектральной плотности в разрезе.

Разрезы аппроксимаций с разделением переменных

$$\underline{\underline{F}}(\omega) := \frac{2 \cdot \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} \right] \quad \underline{\underline{G}}(\omega) := \frac{4}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$F(0) = 25 \quad G(0) = 100$$

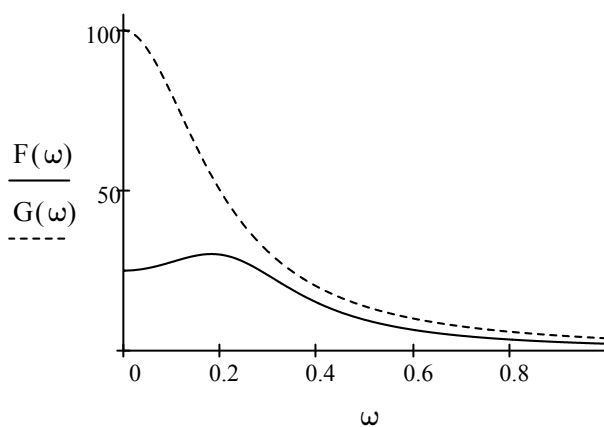
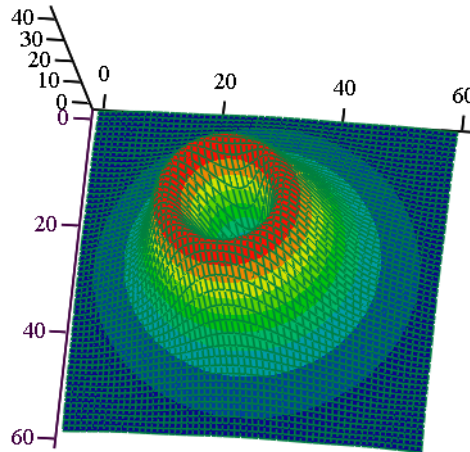


Рис. 20. Две аппроксимации нормированной спектральной плотности в разрезе.

Двумерная аппроксимация с радиальной симметрией

$$F(p, q) := 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{20} r \cdot e^{-\alpha \cdot r} \cdot J_0(\sqrt{p^2 + q^2} \cdot r) \cdot \cos(\beta \cdot r) \, dr$$

$$x_0 := -0.75 \quad y_0 := -0.75 \quad i := 0..60 \quad j := 0..60 \quad x_i := x_0 + \frac{i}{40} \quad y_j := y_0 + \frac{j}{40} \quad F_{i,j} := F(x_i, y_j)$$



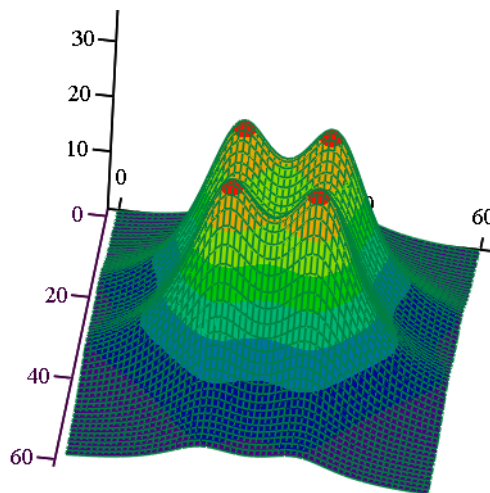
F

Рис. 21. Нормированная спектральная плотность нормального поля.

Двумерная аппроксимация с разделением переменных

$$H(p, q) := \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta + p)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta - p)^2} \right] \cdot \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta + q)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta - q)^2} \right]$$

$$x_0 := -0.75 \quad y_0 := -0.75 \quad i := 0..60 \quad j := 0..60 \quad x_i := x_0 + \frac{i}{40} \quad y_j := y_0 + \frac{j}{40} \quad \Omega_{i,j} := H(x_i, y_j)$$



Ω

Рис. 22. Нормированная спектральная плотность реального поля.

Взвешенная аппроксимация корреляционной функции и нормированной спектральной плотности

Считывание матрицы оптических плотностей

$$B := \text{READBMP}(\text{"Forest_1.65_128.bmp"})$$

Число элементов изображения по строкам и по столбцам $nr := \text{rows}(B) = 128$ $nc := \text{cols}(B) = 128$

Двумерная корреляционная функция

Индексы центрального элемента $i_0 := \text{floor}\left(\frac{nr}{2}\right) = 64$ $j_0 := \text{floor}\left(\frac{nc}{2}\right) = 64$

$T := \min\left(\text{floor}\left(\frac{nr}{4}\right), \text{floor}\left(\frac{nc}{4}\right)\right) = 32$ $i := i_0 - T..i_0 + T$ $j := j_0 - T..j_0 + T$

$S := (2 \cdot T + 1)^2$ Среднее на площади $S \cdot \text{pix}^2$ $m_S := \frac{1}{S} \cdot \sum_i \left(\sum_j B_{i,j} \right) = 116.02$

СКО на площади $S \cdot \text{pix}^2$ $d_S := \frac{1}{S} \cdot \sum_i \left[\sum_j (B_{i,j} - m_S)^2 \right]$ $\sigma_S := \sqrt{d_S} = 51.59$

Пространственное разрешение $\text{pix} := 1.65$ $k := -T..T - 1$ $m := -T..T - 1$

$$R_{k+T, m+T} := \frac{1}{S \cdot d_S} \cdot \sum_i \left[\sum_j \left[(B_{i,j} - m_S) \cdot (B_{i+k, j+m} - m_S) \right] \right]$$

Аппроксимация разрезов корреляционной поверхности

$$\lambda_x := 0.25 \quad \alpha_x := 0.15 \quad \beta_x := 0.2 \quad \nu_x := 0.0$$

$T := T \cdot \text{pix}$ $R_x(\tau) := \nu_x \cdot e^{-\lambda_x \cdot |\tau|} + (1 - \nu_x) \cdot e^{-\alpha_x \cdot |\tau|} \cdot \cos(\beta_x \cdot \tau)$ $R_x(0) = 1$

$$x_0 := -T \quad k := 0..2 \cdot T - 1 \quad x_k := x_0 + k \cdot \text{pix}$$

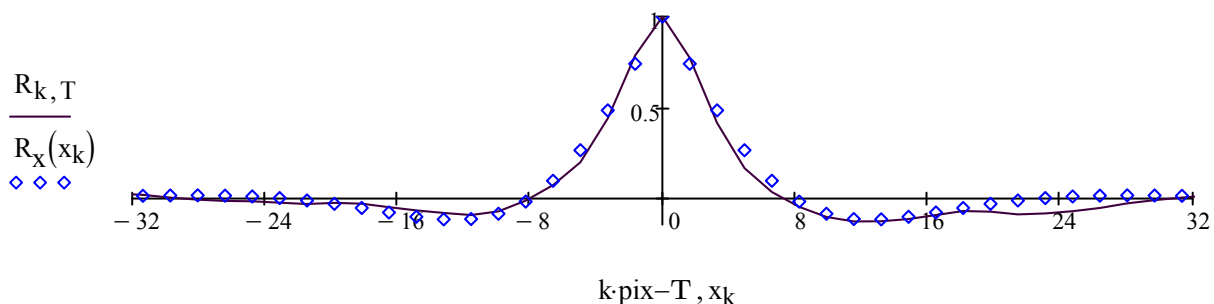


Рис. 23. Разрез корреляционной поверхности вдоль оси τ_x

$$\lambda_y := 0.25 \quad \alpha_y := 0.15 \quad \beta_y := 0.2 \quad v_y := 0.8$$

$$R_y(\tau) := v_y \cdot e^{-\lambda_y \cdot |\tau|} + (1 - v_y) \cdot e^{-\alpha_y \cdot |\tau|} \cdot \cos(\beta_y \cdot \tau) \quad R_y(0) = 1$$

$$y_0 := -T \quad m := 0..2 \cdot T - 1 \quad y_m := y_0 + m \cdot \text{pix}$$

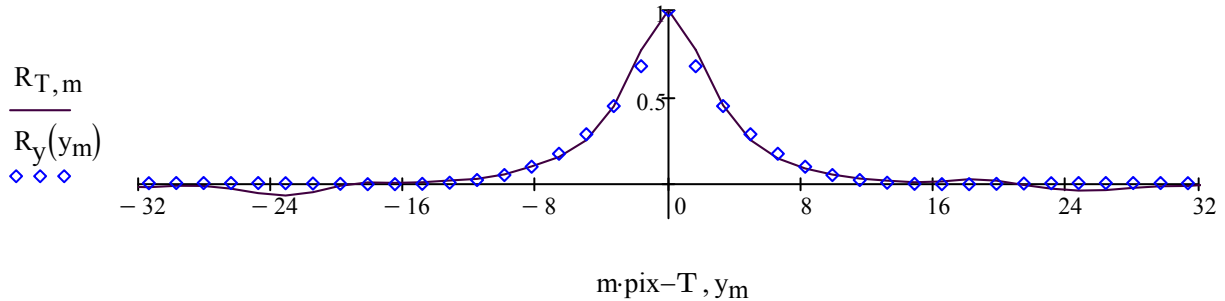


Рис. 24. Разрез корреляционной поверхности вдоль оси τ_y

Нормированная спектральная плотность по центральному разрезу

$$\lambda := \frac{\lambda_x + \lambda_y}{2} = 0.25 \quad \alpha := \frac{\alpha_x + \alpha_y}{2} = 0.15 \quad \beta := \frac{\beta_x + \beta_y}{2} = 0.2 \quad v := \frac{v_x + v_y}{2} = 0.4$$

$$F(p) := v \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda}{(\sqrt{\lambda^2 + p^2})^3} + (1 - v) \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \int_0^\infty r \cdot e^{-\alpha r} \cdot J_0(p \cdot r) \cdot \cos(\beta \cdot r) \, dr \right) \quad F(0) = 23.323$$

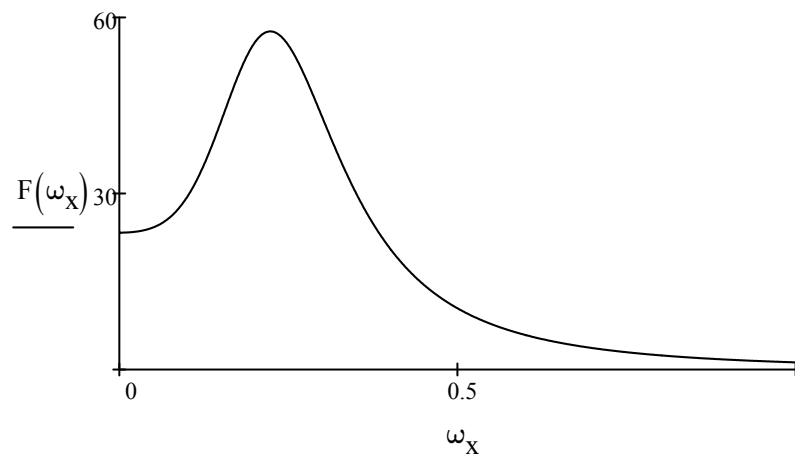


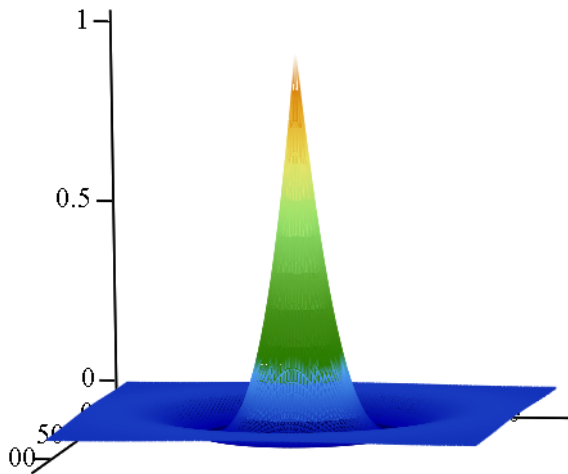
Рис. 25. Нормированная спектральная плотность вдоль центрального разреза.

Двумерная аппроксимация

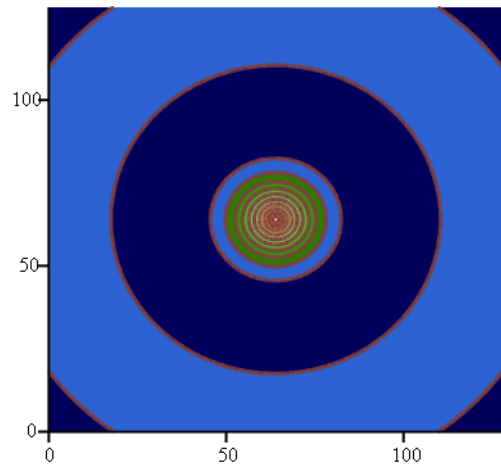
Корреляционная функция

$$K(u, v) := v \cdot e^{-\lambda \sqrt{u^2 + v^2}} + (1 - v) \cdot e^{-(\alpha \sqrt{u^2 + v^2})} \cdot \cos(\beta \cdot \sqrt{u^2 + v^2})$$

$$x_0 := -32 \quad y_0 := -32 \quad i := 0..128 \quad j := 0..128 \quad x_i := x_0 + \frac{i}{2} \quad y_j := y_0 + \frac{j}{2} \quad A_{i,j} := K(x_i, y_j)$$



A



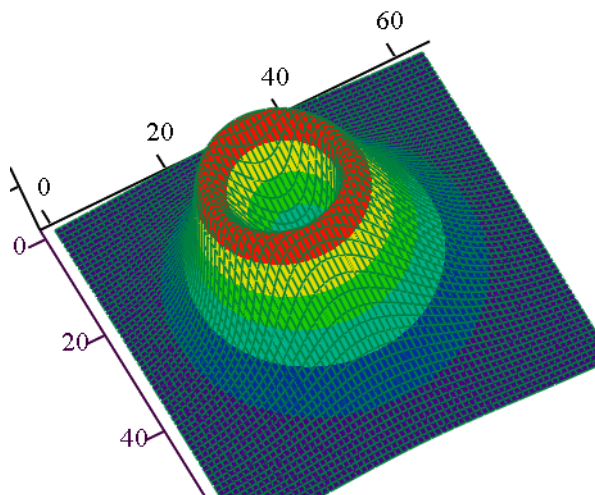
A

Рис. 26. Аппроксимация корреляционной функции в виде поверхности вращения и карты линий уровня.

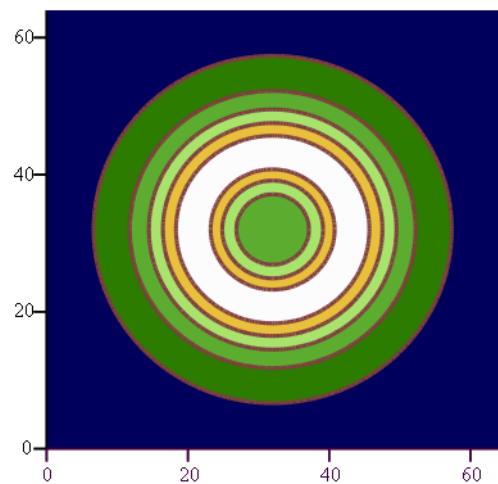
Нормированная спектральная плотность

$$G(\omega_x, \omega_y) := \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \nu}{\left(\sqrt{\lambda^2 + \omega_x^2 + \omega_y^2}\right)^3} + (1 - \nu) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_0^\infty r \cdot e^{-\alpha \cdot r} \cdot J_0\left(\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \cdot r\right) \cdot \cos(\beta \cdot r) \, dr$$

$$x_0 := -0.64 \quad y_0 := -0.64 \quad i := 0..64 \quad j := 0..64 \quad x_i := x_0 + \frac{i}{50} \quad y_j := y_0 + \frac{j}{50} \quad F_{i,j} := G(x_i, y_j)$$



F



F

Рис. 27. Аппроксимация нормированной спектральной плотности в виде поверхности вращения и карты линий уровня.

Статистические параметры изображений, представленных на рис.1-а – рис.1-г, сведены в табл.1. Значения этих параметров для фрагмента изображения леса вычислены в Док.1, Док.4 и Док.7. Те же файлы использовались для исследования других изображений.

Таблица 1

Тип ландшафта	Лес	Вырубка	Луг	Поселок
Эмпирические числовые характеристики				
\hat{m}	54.2	76.3	82.31	92.6
$\hat{\sigma}$	12.49	3.38	3.06	24.56
$\hat{\gamma}_0$	0.23	0.44	0.04	0.27
$\hat{\gamma}_1$	0.06	0.11	-0.47	1.71
$\hat{\gamma}_2$	-0.67	0.45	0.44	4.75
Динамический диапазон яркостей [отн.ед.]				
B_{\min}	22	60	67	31
B_{\max}	91	93	95	245
Радиус корреляции [м]				
ρ	4.3	12.1	10.9	4.5
r_{0x}	5.0	6.9	9.0	5.0
r_{0y}	5.0	8.2	9.0	9.0
Параметры аппроксимации корреляционной функции в Док.4				
α_x	0.15	0.2	0.1	0.15
β_x	0.2	0.0	0.1	0.2
α_y	0.25	0.17	0.1	0.1
β_y	0.1	0.0	0.1	0.1
α	0.2	0.185	0.1	0.125
β	0.15	0.0	0.1	0.15
Параметры аппроксимации спектральной плотности в Док.7				
λ	0.25	0.325	0.2	0.15
α	0.15	0.05	0.2	0.1
β	0.2	0.0	0.1	0.2
ν	0.4	0.75	0.15	0.35

Сравнивая табличные значения параметров, можно сделать следующие выводы. Наибольший диапазон яркостей имеет изображение посёлка, что объясняется разнообразием отражающих элементов сюжета съемки. Близкие значения имеют коэффициенты вариации (контрастности) леса и поселка. Они в несколько раз превосходят значения того же параметра для луга. Луг является наиболее однородной подстилающей поверхностью. Наиболее контрастна вырубка. Значения коэффициентов асимметрии и эксцесса значительно выше у изображения посёлка, чем у изображений рассмотренных природных образований. Радиус корреляции имеет тенденцию к увеличению с уменьшением диапазона яркостей сюжетов съемки. Заметно расхождение значений радиуса корреляции, которые получены по изображению вырубки двумя различными способами. Это следствие проявления статистической неоднородности данного ландшафта и несовершенства аналитической аппроксимации.

Гистограммы и центральные разрезы аппроксимаций спектральных плотностей, отвечающих фрагментам изображений рис.1-а – рис.1-г, показаны соответственно на рис.28-а – рис.28-г и рис.29-а – рис.29-г. Смещение максимума спектральной плотности от нулевой пространственной частоты указывает на наличие достаточно выраженной периодичности расположения объектов съемки. Такая периодичность имеет место в лесном массиве и в планировке поселка. Причём периодичность структуры изображения посёлка является одномерной. Вид пространственной спектральной плотности изображения луга также указывает на периодическое колебание яркости по данному фрагменту. У вырубки периодическая структура не просматривается.

Яркостные гистограммы

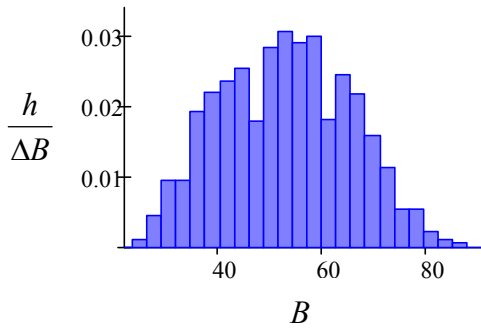


Рис. 28-а. Лес.

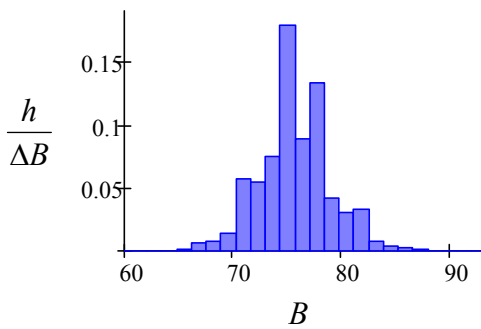


Рис. 28-б. Вырубка.

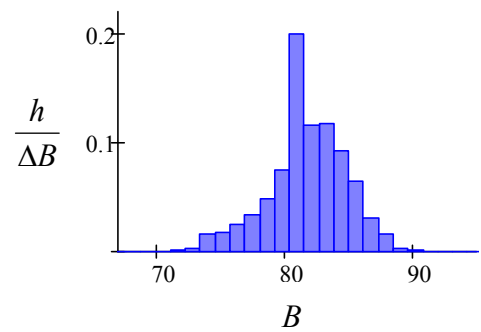


Рис. 28-в. Луг.

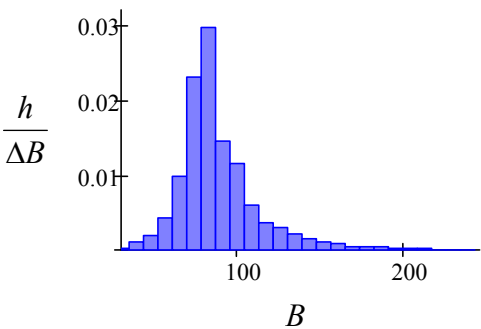


Рис. 28-г. Посёлок.

Спектральные плотности, нормированные на σ^2

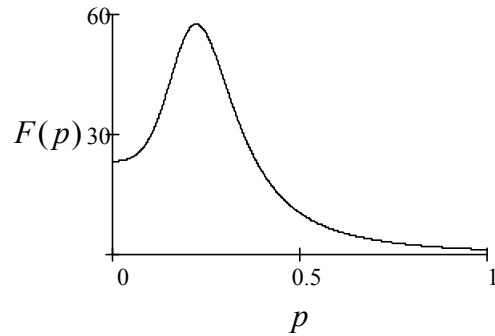


Рис. 29-а. Лес.

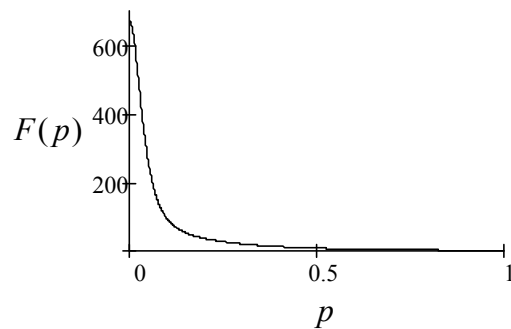


Рис. 29-б. Вырубка.

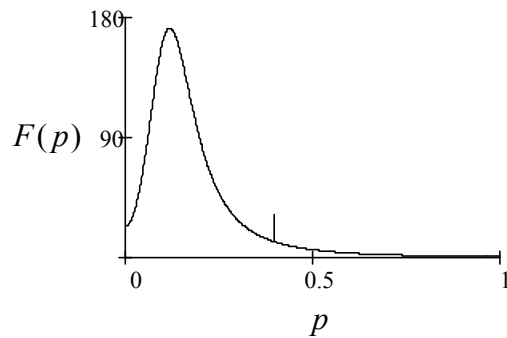


Рис. 29-в. Луг.

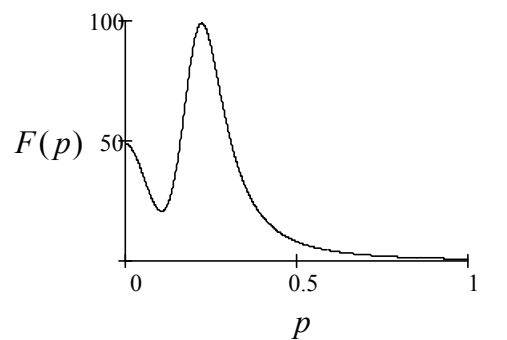


Рис. 29-г. Посёлок.

ЗАДАНИЕ НА ПРАКТИЧЕСКУЮ РАБОТУ “МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ” И ПОРЯДОК ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЯ

Требуется выделить фрагмент выбранного изображения высокого разрешения с достаточно однородным расположением объектов и описать его статистический портрет. Для этого необходимо выполнить следующие действия.

1. Найти подходящие фрагменты изображений, используя данные топографических или природоведческих спутников, имеющихся на сайтах в глобальной информационной сети. Обосновать выбор размера фрагмента. Изобразить средствами MathCAD двумерное поле яркости изображения в виде поверхности.

2. Вычислить выборочные числовые характеристики поля яркости изображения: среднее, дисперсию, СКО, коэффициент вариации, коэффициенты асимметрии и эксцесса. Построить гистограмму яркостей и сравнить ее с известными плотностями распределений теории вероятностей.

3. Построить двумерную гистограмму.

4. Вычислить двумерную корреляционную функцию и спектральную плотность случайного поля. Построить их продольные и поперечные центральные разрезы. Выбрав подходящую аппроксимацию корреляционной функции, вычислить радиус корреляции поля яркости.

5. По расчетным данным сделать выводы о физических свойствах объектов съемки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алмазов И. В., Овечкин В.Н. Методические указания для выполнения расчётно-графической работы по оценке качества аэрофотоизображения по курсу «Аэрофотосъёмка». М.: МИИГАиК, 1995. 38 с.
2. Алмазов И. В., Стеценко А. Ф. Определение изобразительных, фотометрических и статистических параметров аэроизображения: Методические указания для выполнения курсовой работы по курсу «Аэрокосмическая съёмка». М.: МИИГАиК, 2007. 14 с.
3. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 448 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
5. Красильников Н. Н. Цифровая обработка изображений. М.: Вузовская книга, 2001. 320 с.
6. Мишин И. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. М.: МИИГиК, 2008. 107 с.
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. I. М.: Наука, 1965. 639 с.
8. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.
9. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982, в 2-х книгах: кн.1 – 312 с., кн.2 – 480 с.
10. Сергеев Г.А., Янутш Д.А. Статистические методы исследования природных объектов. Л.: Гидрометеоздат, 1973. 300 с.
11. Яне Б. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2007. 584 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. Случайные поля яркости.....	6
Глава 2. Выборочные характеристики.....	18
Глава 3. Численные расчеты.....	24
Задание на практическую работу	
«Методы анализа изображений» и порядок ее выполнения.....	51
Литература.....	52