Министерство науки
и высшего образования
Российской Федерации

**Московский
государственный
университет геодезии
и картографии
(МИИГАиК)**

Т.А. Волковая, М.Е. Чанга

Математика

методические указания по выполнению
контрольной работы №4 по направлениям подготовки
21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»
и 21.03.02 «Землеустройство и кадастры»
заочная форма обучения

МОСКВА 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет геодезии и картографии» (МИИГАиК)

Т.А. Волковая, М.Е. Чанга

Математика

методические указания
контрольной работы №4 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»
по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия»
по направлениям подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»
и 21.03.02 «Землеустройство и кадастры»
заочная форма обучения

МИИГАиК
Москва
2023

УДК 51
ББК 22.1
В67

Рецензенты:
д-р пед. наук, доцент **М.В. Литвиненко** (МИИГАиК)
канд. физ.-мат. наук **Е.С. Крупицын** (МГПУ)

Волковая, Татьяна Анатольевна
В67 Математика / Т.А. Волковая, М.Е. Чанга: методические указания по выполнению контрольной работы № 4 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия», по направлениям подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» и 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», заочная форма обучения. — Москва : МИИГАиК, 2023. — 23 с.

В пособии изложены методические указания по выполнению контрольной работы № 4 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»» для студентов заочной формы обучения по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия», по направлениям подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» и 21.03.02 «Землеустройство и кадастры».

УДК 51
ББК 22.1

Электронное учебное издание
Волковая Татьяна Анатольевна, Чанга Марис Евгеньевич
Математика
Публикуется в авторской редакции

Рассмотрено и одобрено на заседании
Редакционно-издательского совета МИИГАиК
2023 г.
Электронная версия учебно-методического пособия размещена
на сайте МИИГАиК www.miigaik.ru

© МИИГАиК, 2023
© Волковая Т.А., Чанга М.Е., 2023

Содержание

1 Требования к знаниям и умениям, которые студент должен будет продемонстрировать по результатам самостоятельной учебно-познавательной деятельности в ходе выполнения работы **4**

2 Условие допуска к защите **5**

3 Методические указания по выполнению контрольной работы **6**

4 Методические указания по оформлению контрольной работы **7**

5 Задания для контрольной работы № 4 «Математика 1: Линейная алгебра и аналитическая геометрия» **8**

Задачи 1–10 ..... **8**
Задачи 11–20 ..... **8**
Задачи 21–30 ..... **9**
Задачи 31–40 ..... **9**
Задачи 41–50 ..... **10**
Задачи 51–60 ..... **11**

6 Вопросы для самоконтроля **13**

7 Демонстрационный вариант контрольной работы № 4 ..... **15**

Задача 1 ..... **15**
Задача 2 ..... **16**
Задача 3 ..... **17**
Задача 4 ..... **18**
Задача 5 ..... **19**
Задача 6 ..... **22**

8 Литература **23**

1 Требования к знаниям и умениям, которые студент должен будет продемонстрировать по результатам самостоятельной учебно-познавательной деятельности в ходе выполнения работы

По учебному плану для студентов 1 курса заочной формы обучения по направлениям подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование и по специальности 21.05.01 Прикладная геодезия предусматривается выполнение четырех контрольных работ, из которых работа № 4 — это «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» по курсу «Математика». По результатам самостоятельной учебно-познавательной деятельности в ходе выполнения контрольной работы студент должен:

- **Знать:** теоретические сведения по всем вопросам математики, которые рассматриваются в контрольной работе № 4. С этой целью необходимо изучить следующие темы: матрицы и определители, системы линейных алгебраических уравнений, элементы векторной алгебры, прямая на плоскости и в пространстве, кривые второго порядка, плоскость, взаимное расположение прямой и плоскости, используя, в частности, литературу, указанную в п.[8]. Полезно также ознакомиться с вопросами для самоконтроля п.[6] и ответить на них.
- **Уметь:** решать задачи, относящиеся к разделам математики контрольной работы № 4. С этой целью полезно разобрать решение задач демонстрационного варианта п.[7].

2 Условие допуска к защите

По результатам проверки студент может получить следующие оценки:

1. Работа допущена к защите.
2. Работа допущена к защите с исправлениями.
3. Работа не допущена к защите.

В таблице приводятся действия студента, получившего ту или иную оценку своей работы:

Работа **допущена** к защите	Студент приносит распечатанную или отсканированную работу на экзамен
Работа допущена к защите **с исправлениями**	Сделав исправления в работе по указанию преподавателя, студент не присылает повторно работу на проверку, а приносит в период сессии в распечатанном виде для последующей проверки преподавателем
Работа **не допущена** к защите	Сделав исправления в работе по указанию преподавателя, студент присылает работу на проверку повторно до тех пор, пока работа не будет допущена к защите без исправлений или с незначительными исправлениями

3 Методические указания по выполнению контрольной работы

В каждой контрольной работе студент решает все те задачи, номера которых оканчиваются на ту же цифру, на которую оканчивается номер учебного шифра. Например, если номер шифра оканчивается на 5, то студент должен решить задачи 5, 15, 25 и т.д.

При выполнении контрольной работы студент должен изложить подробное решение всех задач своего варианта, желательно, в той же последовательности, как они приводятся в задании. Содержание решения задачи должно включать условие задачи, пошаговый ход решения, при необходимости, демонстрационный чертеж.

Работы должны быть представлены не менее, чем за 2 недели до начала сессии.

4 Методические указания по оформлению контрольной работы

Каждая работа выполняется в отдельном файле «от руки» с последующим сканированием и сохранением в PDF. Чертежи к работе также выполняются от руки. Работы в других форматах к проверке не допускаются.

5 Задания для контрольной работы № 4 «Математика 1: Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

ЗАДАЧИ 1–10

В задачах № 1–10 даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найдите:

1) косинус угла ABD;
2) площадь грани ABC;
3) объем пирамиды $ABCD$.

Задача	*A*	*B*	*C*	*D*
1	(4;2;0)	(2;1;0)	(2;1;1)	(3;2;1)
2	(1;3;6)	(2;3;5)	(3;4;4)	(4;5;6)
3	(3;4;2)	(4;3;2)	(2;3;3)	(5;5;3)
4	(5;3;1)	(4;5;1)	(4;3;2)	(5;4;2)
5	(1;5;2)	(1;3;1)	(2;1;1)	(0;5;3)
6	(3;3;2)	(2;3;3)	(3;5;4)	(3;4;5)
7	(2;1;1)	(1;0;1)	(1;2;2)	(2;1;2)
8	(3;3;1)	(4;2;1)	(1;2;2)	(5;4;3)
9	(3;3;2)	(5;2;2)	(2;2;3)	(6;3;3)
10	(2;2;2)	(1;2;3)	(1;3;2)	(4;2;7)

ЗАДАЧИ 11–20

В задачах № 11 – 20 даны координаты точек A, B, C и D. Найдите:

1) проекцию точки D на плоскость ABC;
2) проекцию точки D на прямую BC.

Задача	*A*	*B*	*C*	*D*
11	(5;5;5)	(3;4;4)	(5;2;2)	(6;5;3)
12	(5;6;6)	(4;4;5)	(1;4;8)	(3;7;6)

Задача	*A*	*B*	*C*	*D*
13	(5;2;8)	(2;1;7)	(0;5;9)	(5;8;2)
14	(6;6;3)	(5;4;1)	(5;1;4)	(2;6;5)
15	(2;7;6)	(1;3;4)	(1;6;1)	(8;7;4)
16	(3;4;8)	(6;7;2)	(0;1;5)	(4;7;7)
17	(9;6;5)	(8;4;1)	(2;1;4)	(5;8;5)
18	(8;3;8)	(9;2;2)	(7;0;4)	(2;9;5)
19	(2;4;4)	(5;1;1)	(1;3;3)	(4;4;2)
20	(5;3;7)	(3;0;5)	(6;3;2)	(1;8;5)

ЗАДАЧИ 21–30

В задачах № 21–30 найдите центр и эксцентриситет кривой второго порядка.

Задача	Уравнение кривой
21	$x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 21 = 0$
22	$9x^2 - y^2 - 18x - 6y - 9 = 0$
23	$x2 - {}^4y2 - 10x - 8y + 17 = 0$
24	$4^x2 + 9^y2 + 8x - 18y - 23 = 0$
25	${}^{x2} + 16y^2 - 8x + 32y + 16 = 0$
26	$9^x2 - 4^y2 - 36x - 24y - 36 = 0$
27	$4^x2 - 9^{y2} + 16x + 18y - 29 = 0$
28	$x^2 - 9y^2 - 6x - 18y - 9 = 0$
29	$9^x2 + 16y^2 - 36x + 64y - 44 = 0$
30	$x^2 + 9y^2 + 8x - 18y + 16 = 0$

ЗАДАЧИ 31–40

В задачах № 31–40 даны матрицы A и B. Найдите $B \cdot A^T - 3A$.

Задача	Матрицы
31	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 8 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Задача	Матрицы
32	$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\-3&0&2\\-1&2&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\4&0&2\\5&8&2\end{pmatrix}$
33	$A=\begin{pmatrix}-3&0&1\\1&2&3\\5&-3&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\3&0&-2\\5&1&8\end{pmatrix}$
34	$A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\8&4&-2\\5&-1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&-3\\3&-1&2\\1&0&-3\end{pmatrix}$
35	$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&1&4\\-2&3&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&3\\-2&1&0\end{pmatrix}$
36	$A=\begin{pmatrix}5&4&1\\0&1&2\\3&3&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&8&6\\3&4&2\end{pmatrix}$
37	$A=\begin{pmatrix}5&4&1\\0&1&2\\3&3&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&8&6\\3&4&2\end{pmatrix}$
38	$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\3&1&2\\5&1&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&-4&5\\1&2&-3\\1&0&2\end{pmatrix}$
39	$A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\3&0&2\\-3&1&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&-3&1\\0&-2&1\\2&4&-2\end{pmatrix}$
40	$A=\begin{pmatrix}5&0&-1\\-1&3&5\\4&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&-2&5\\0&2&-1\\2&-7&0\end{pmatrix}$

ЗАДАЧИ 41–50

В задачах № 41 – 50 решите систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

1) по формулам Крамера;
2) с помощью обратной матрицы;
3) методом Гаусса.

Задача	Системы уравнений
41	$\begin{cases}10x+y+z=-7\\x-y-z=-4\\2x+3y+z=5\end{cases}$

Задача	Системы уравнений
42	$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=7 \\ x+3y+2z=11 \end{cases}$
43	$\begin{cases} x+2y+5z=9 \\ 3x-4y+3z=-7 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$
44	$\begin{cases} x+2y-z=12 \\ 2x+3y+z=25 \\ 2x+2y+3z=24 \end{cases}$
45	$\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ 5x-8y+z=-6 \\ x+2y+5z=-12 \end{cases}$
46	$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=6 \\ 3x-y-z=0 \end{cases}$
47	$\begin{cases} 2x+y+2z=3 \\ x-y+z=-3 \\ 3x-2y+z=-4 \end{cases}$
48	$\begin{cases} x+4y+2z=8 \\ 3x-y-z=12 \\ x+6z=-8 \end{cases}$
49	$\begin{cases} x+y+3z=14 \\ x+2y-z=3 \\ 3x+2y+z=17 \end{cases}$
50	$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=-6 \\ x+2y-4z=-12 \end{cases}$

ЗАДАЧИ 51–60

В задачах № 51–60 исследуйте систему на совместность, используя теорему Кронекера-Капелли. Если система совместна, найдите ее общее решение.

Задача	Системы уравнений
51	$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y-z=3 \\ 4x+3y+5z=5 \end{cases}$

Задача	Системы уравнений
52	$\begin{cases} 2x-y-z=2 \\ x+y-z=1 \\ 7x-2y-4z=7 \end{cases}$
53	$\begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ 4x-y+3z=7 \\ 2x-11y+9z=17 \end{cases}$
54	$\begin{cases} x+3y-z=4 \\ 3x+4y-3z=1 \\ 4x-3y-4z=2 \end{cases}$
55	$\begin{cases} x+3y-z=5 \\ x+y+2z=8 \\ x+7y-7z=-1 \end{cases}$
56	$\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 2x-y-2z=3 \\ 13x+6y+7z=52 \end{cases}$
57	$\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x+2y-z=5 \\ 5x-10y+7z=1 \end{cases}$
58	$\begin{cases} 3x+y-2z=4 \\ x+2y-z=3 \\ 2x-11y+z=-9 \end{cases}$
59	$\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+2y-z=2 \\ 4x-7y+11z=5 \end{cases}$
60	$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ x-7y+4z=0 \end{cases}$

6 Вопросы для самоконтроля

Тема: Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1. Сумма и разность векторов, умножение вектора на число. Координаты вектора.
2. Длина вектора. Проекция вектора на ось.
3. Линейно зависимые системы векторов: коллинеарные векторы, компланарные векторы.
4. Скалярное произведение векторов и его свойства. Угол между векторами. Вычисление скалярного произведения в прямоугольной декартовой системе координат.
5. Соотношение между координатами двух взаимно перпендикулярных и двух коллинеарных векторов.
6. Векторное произведение и его свойства. Вычисление в координатах.
7. Геометрический смысл векторного произведения векторов.
8. Смешанное произведение векторов и его свойства. Вычисление смешанного произведения в координатах.
9. Геометрический смысл смешанного произведения векторов. Объем треугольной пирамиды, построенной на трех данных векторах.
10. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
11. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
12. Плоскость. Различные виды уравнения плоскости. Нормальный вектор плоскости.
13. Общее, каноническое и параметрическое уравнение прямой в пространстве. Направляющий вектор прямой.
14. Угол между двумя прямыми в пространстве.
15. Угол между прямой и плоскостью.
16. Угол между двумя плоскостями.
17. Расстояние от точки до плоскости.
18. Расстояние между двумя параллельными плоскостями.
19. Расстояние между двумя параллельными прямыми.
20. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.
21. Кривые второго порядка: окружность.
22. Кривые второго порядка: эллипс.
23. Кривые второго порядка: гипербола.
24. Кривые второго порядка: парабола.
25. Матрицы. Линейные операции над матрицами.
26. Умножение матриц.
27. Обратная матрица.
28. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц.

29. Определители, их свойства. Вычисление определителей второго и третьего порядков.
30. Решение систем линейных алгебраических уравнений при помощи обратной матрицы.
31. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.
32. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
33. Теорема Кронекера-Капелли.

7 Демонстрационный вариант контрольной работы № 4

ЗАДАЧА 1

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(0; 1; 2)$, $B(2; 2; 2)$, $C(6; 4; 3)$, $D(1; 0; 3)$. Найдите:

- косинус угла ABD;
- площадь грани ABC;
- объем пирамиды $ABCD$.

Решение. Вначале найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BD}$, для чего нужно вычесть координаты начальной точки из соответствующих координат конечной точки:

$$\overrightarrow{BA} = (2-0; 2-1; 2-2) = (2; 1; 0),$$
$$\overrightarrow{BD} = (2-1; 2-0; 2-3) = (1; 2; -1).$$

Затем вычислим длины каждого из найденных векторов, взяв квадратный корень из суммы квадратов координат:

$$BA = \sqrt{(2^2+1^2+0^2)} = \sqrt{5},$$
$$BD = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{6}\,.$$

Найдем скалярное произведение рассматриваемых векторов, перемножая их соответствующие координаты и складывая получившиеся произведения между собой:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 4.$$

Косинус угла ABD находим по формуле:

$$\cos\angle ABD = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}}{BA \cdot BD} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = \frac{4\sqrt{30}}{30} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

Площадь грани ABC есть половина длины векторного произведения векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, первый из которых уже найден выше, а

$$\overrightarrow{BC} = (2-6; 2-4; 2-3) = (-4; -2; -1).$$

Вычислим векторное произведение указанных векторов, формально записав его с помощью определителя, включающего орты координатных осей $\vec{\mathrm{i}}$, $\vec{\mathrm{j}}$ и $\vec{\mathrm{k}}$:

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 0)\vec{i} -$$

$$-(2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 0)\vec{j} + (2 \cdot (-2) - (-4) \cdot 1)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} = (-1; 2; 0).$$

Отсюда получаем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Объем пирамиды $ABCD$ равен одной шестой части абсолютной величины смешанного произведения векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$, координаты которых уже найдены. Вычислим смешанное произведение указанных векторов по определению, как скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BD} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = 3.$$

Отсюда находим

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BD}\right| = \frac{|3|}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{30}}{15}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 2

Даны координаты точек A, B, C и D: $A(4; 4; 4)$, $B(3; 4; 3)$, $C(2; 5; 4)$, $D(2; 1; 2)$.
Найдите:

- проекцию точки D на плоскость ABC;
- проекцию точки D на прямую BC.

Решение. Запишем уравнение плоскости ABC в виде определителя, включающего координаты заданных в условии точек:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-4 \\ 3-4 & 4-4 & 3-4 \\ 2-4 & 5-4 & 4-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, находим

$$\big(0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)\big)(x-4) - \big((-1) \cdot 0 - (-2) \cdot (-1)\big)(y-4) +$$
$$+\big((-1) \cdot 1 - (-2) \cdot 0\big)(z-4) = x - 4 + 2(y-4) - (z-4) = 0,$$

откуда, раскрывая скобки, получаем уравнение плоскости ABC:

$$x + 2y - z - 8 = 0.$$

Нормальный вектор плоскости ABC имеет вид $(1; 2; -1)$, его координаты суть коэффициенты при неизвестных в полученном уравнении плоскости. Запишем теперь

параметрические уравнения перпендикуляра к плоскости ABC, проходящего через точку D, пользуясь тем, что нормальный вектор плоскости будет направляющим вектором указанного перпендикуляра:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}.$$

Искомая проекция точки D на плоскость ABC есть точка пересечения перпендикуляра с плоскостью. Для того, чтобы найти ее, подставим параметрические уравнения перпендикуляра в уравнение плоскости и найдем значение параметра t, соответствующее их точке пересечения:

$$(2 + t) + 2(1 + 2t) - (2 - t) - 8 = 6t - 6 = 0.$$

Таким образом, $t = 1$, и подставляя найденное значение в параметрические уравнения перпендикуляра, получим координаты искомой проекции (3; 3; 1).

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{BC}$, вычитая соответствующие координаты точек B и C:

$$\overrightarrow{BC} = (2 - 3; 5 - 4; 4 - 3) = (-1; 1; 1).$$

Теперь запишем параметрические уравнения прямой BC:

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

Проекцией точки D на прямую BC является точка пересечения этой прямой с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку D. Нормальным вектором этой плоскости будет направляющий вектор прямой BC, поэтому уравнение этой плоскости имеет вид:

$$-1 \cdot (\mathrm{x} - 2) + 1 \cdot (\mathrm{y} - 1) + 1 \cdot (\mathrm{z} - 2) = -\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} - 1 = 0.$$

Подставляя параметрические уравнения прямой BC в уравнение перпендикулярной плоскости, найдем

$$-(3 - t) + (4 + t) + (3 + t) - 1 = 3t + 3 = 0,$$

откуда $t = -1$ и искомой проекцией будет точка (4; 3; 2).
Ответ: (3; 3; 1); (4; 3; 2).

ЗАДАЧА 3

Найдите центр и эксцентриситет кривой второго порядка

$$4x^2 - y^2 + 24x + 8y + 16 = 0.$$

Решение. Приведем уравнение кривой к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$4(x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 8y + 16) = 4,$$

или, после деления на 4

$$\frac{(x+3)^2}{1^2} - \frac{(y-4)^2}{2^2} = 1.$$

Таким образом, наша кривая является гиперболой (в случае эллипса в левой части вместо разности будет сумма) с центром в точке $(-3; 4)$. Ее вещественная полуось $a = 1$, а мнимая полуось $b = 2$. Вещественная полуось всегда фигурирует в выражении, имеющем знак плюс, независимо от того, какая переменная входит в это выражение. Мнимая же полуось фигурирует в выражении, имеющем знак минус. Параметр с для гиперболы находится по формуле

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

В случае эллипса вместо суммы под корнем будет разность, и сами полуоси имеют иной смысл: a есть большая полуось, а b — малая, независимо от того в выражение с какой переменной они входят. Вычислим эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}.$$

Эксцентриситет гиперболы всегда больше единицы, а эксцентриситет эллипса лежит в промежутке от нуля до единицы.
Ответ: $(-3; 4)$; $\sqrt{5}$.

ЗАДАЧА 4

Даны матрицы A и B. Найдите $B \cdot A^T - 3A$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Транспонируем матрицу A (при транспонировании строки переходят в столбцы с сохранением порядкового номера):

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы A и B необходимо, чтобы длина строки матрицы A совпадала с высотой столбца матрицы B. Пусть даны две матрицы: A размера $m \times n$, B размера $n \times k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2k} \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы A на матрицу B получается матрица C размера $m \times k$, каждый элемент которой получается следующим образом:

$$C_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} \ .$$

Находим произведение $B \cdot A^T$:

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot5+2\cdot8+1\cdot(-1) & 3\cdot(-3)+2\cdot1+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot(-2)+1\cdot4 \\ -2\cdot5+1\cdot8+3\cdot(-1) & -2\cdot(-3)+1\cdot1+3\cdot2 & -2\cdot1+1\cdot(-2)+3\cdot4 \\ 4\cdot5+2\cdot8+6\cdot(-1) & 4\cdot(-3)+2\cdot1+6\cdot2 & 4\cdot1+2\cdot(-2)+6\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -5 & 3 \\ -5 & 13 & 8 \\ 30 & 2 & 24 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание на то, что данная операция некоммутативна, то есть от перемены мест множителей меняется результат.

Умножаем матрицу A на 3:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 24 & -3 \\ -9 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Выполняя вычитание, получаем итоговый результат:

$$B \cdot A^T - 3A = \begin{pmatrix} 30 & -5 & 3 \\ -5 & 13 & 8 \\ 30 & 2 & 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 24 & -3 \\ -9 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -29 & 6 \\ 4 & 10 & 2 \\ 27 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 5

Решите систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

1) по формулам Крамера;
2) с помощью обратной матрицы;
3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ -3x - 2y + 2z = 1 \\ x + 4y - 7z = -3 \end{cases}$$

Решение. Применим формулы Крамера.

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-7) + (-3)\cdot4\cdot(-1) + 1\cdot2\cdot1 - 1\cdot(-2)\cdot(-1) - 2\cdot4\cdot2 - 1\cdot(-3)\cdot(-7) = 3 \ .$$

Заменяя первый столбец главного определителя столбцом свободных членов, получим определитель первой переменной:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -1\cdot(-2)\cdot(-7) + 1\cdot4\cdot(-1) + 1\cdot2\cdot(-3) - (-3)\cdot(-2)\cdot(-1) - (-1)\cdot4\cdot2 - 1\cdot1\cdot(-7) = -3 \ .$$

Заменяя второй столбец главного определителя столбцом свободных членов, получим определитель второй переменной:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-7)+(-3)\cdot(-3)\cdot(-1)+(-1)\cdot 2\cdot 1-1\cdot 1\cdot(-1)-2\cdot(-3)\cdot 2-(-1)\cdot(-3)\cdot(-7)=9 .$$

Заменяя третий столбец главного определителя столбцом свободных членов, получим определитель третьей переменной:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-3)+(-3)\cdot 4\cdot(-1)+1\cdot 1\cdot 1-1\cdot(-2)\cdot(-1)-2\cdot 4\cdot 1-1\cdot(-3)\cdot(-3)=6 .$$

Отсюда находим значения переменных:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-3}{3}=-1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{9}{3}=3,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{6}{3}=2 .$$

Найдем решение при помощи обратной матрицы. Запишем основную матрицу системы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

и столбец свободных членов $b=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Вектор-столбец переменных обозначим $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда система в матричной форме принимает вид: $AX = b$.

Решая данное матричное уравнение, получим $X = A^{-1}b$, где A^{-1} — матрица, обратная к матрице A. Обратите внимание на то, что менять множители местами нельзя.

Матрица A обратима, поскольку главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Минором какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычёркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит этот элемент. Минор элемента a_{ik}определителя $|A|$ обозначается M_{ik}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} называется число $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$.

Присоединение для матрицы A называют матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\ldots\ldots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22}\ldots\ldots & \vdots \\ A_{1n} & \ldots\ldots & A_{mn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} — алгебраические дополнения элементов a_{ik}.

Обратная матрица невырожденной матрицы A равна произведению определителя обратной матрицы на присоединённую матрицу, то есть

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot A^*.$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 4 & -7\end{vmatrix}=6,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & -7\end{vmatrix}=-19,\ A_{13}=\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -7\end{vmatrix}=3,\ A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -7\end{vmatrix}=-13,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=0,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-1.$$

Союзная (присоединенная) матрица равна $A^*=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ -19 & -13 & -1\\ -10 & -7 & -1\end{pmatrix}$,

поэтому $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ -19 & -13 & -1\\ -10 & -7 & -1\end{pmatrix}$,

откуда $X=A^{-1}b=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ -19 & -13 & -1\\ -10 & -7 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6+3+0\\ 19-13+3\\ 10-7-3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\ 9\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$.

Отсюда $x=-1$, $y=3$, $z=2$.

Процесс решения системы по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому виду. На втором этапе (обратный ход) идёт последовательное нахождение неизвестных.

К элементарным преобразованиям над строками относят умножение строки на отличное от нуля число, прибавление к строке любой строки, умноженной на любое число, перестановку строк.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$A\,|\,b=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & -1\\ -3 & -2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & -7 & -3\end{array}\right).$$

Поменяем первую и третью строки местами:

$$A\,|\,b=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -7 & -3\\ -3 & -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -3, а из третьей вычтем первую строку, умноженную на 2:

$$A\,|\,b=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -7 & -3\\ 0 & 10 & -19 & -8\\ 0 & -7 & 13 & 5\end{array}\right).$$

Умножим третью строку на 10 и к результату прибавим вторую строку, умноженную на 7:

$$A\,|\,b=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -7 & -3\\ 0 & 10 & -19 & -8\\ 0 & 0 & -3 & -6\end{array}\right).$$

Последней матрице, имеющей треугольный вид (если исключить столбец свободных членов), соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases}x+4y-7z=-3\\ \quad 10y-19z=-8\\ \qquad\quad -3z=-6\end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $z = 2$, подставив его во второе уравнение, найдем $10y = -8 + 38 \Rightarrow 10y = 30 \Rightarrow y = 3$ и, наконец, подставив найденные y и z в первое уравнение, найдем $x = -3 - 4 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \Rightarrow x = -1$.

Ответ: $(-1, 3, 2)$.

ЗАДАЧА 6

Исследуйте систему на совместность, используя теорему Кронекера-Капелли. Если система совместна, найдите ее общее решение.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - 4y - 3z = -1 \\ x + 8y + 5z = 9 \end{cases}.$$

Решение. Согласно теореме Кронекера-Капелли, система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы $rang(A) = rang(A \mid b)$.

Исследовать систему — это значит определить, совместна она или нет.

Возможны три варианта:

1. Если $rang(A) < rang(A \mid b)$, то система несовместна (не имеет решения).
2. Если $rang(A) = rang(A \mid b) = n$, то система совместна и определена.
3. Если $rang(A) = rang(A \mid b) < n$, то система совместна и неопределена.

Приведем систему к ступенчатому виду путем элементарных преобразований над строками:

$$A \mid b = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 5 & 9 \end{array}\right) \underset{l_1 \leftrightarrow l_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 9 \\ 2 & -4 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \underset{l_3 - 3l_1}{\overset{l_2 - 2l_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & -20 & -13 & -19 \\ 0 & -20 & -13 & -19 \end{array}\right) \underset{l_2 \cdot (-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & 20 & 13 & 19 \\ & & & \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x + 8y + 5z = 9 \\ 20y + 13z = 19 \end{cases}$$

Система ступенчатого вида имеет бесконечное множество решений. Выражаем базисные переменные x и y через свободную переменную z:

$$\begin{cases} x + 8y + 5z = 9 \\ 20y = 19 - 13z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 - 8y - 5z \\ y = 0{,}95 - 0{,}65z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 - 8(0{,}95 - 0{,}65z) - 5z \\ y = 0{,}95 - 0{,}65z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}4 - 0{,}2z \\ y = 0{,}95 - 0{,}65z \end{cases}, z \in R.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 - 0{,}2z \\ 0{,}95 - 0{,}65z \\ z \end{pmatrix}, z \in R.$$

8 Литература

1. Д. Письменный Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М.: Айрис — Пресс, 2011 и все издания.
2. П.Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. М.: АСТ. Оникс 2009 г. и все издания.
3. Н.С. Пискунов Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Интеграл-пресс 2010 и все издания.
4. К.Н. Лунгу Сборник задач по высшей математике 1 часть., М., Айрис — Пресс, 2017 г.