Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии

В.В. Попадьёв, А.П. Юзефович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ, ПРОГРАММА И КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

по курсу
«Теория фигур планет и гравиметрия»

Москва
2017

УДК 528.223/.242/.247

Рецензенты:
кандидат техн. наук **О.В. Половнев** (МИИГАиК);
доктор техн. наук **В.Н. Баранов** (ГУЗ)

Составители: **Попадьёв В.В., Юзефович А.П.** Методические указания, программа и контрольная работа №1 по курсу «Теория фигур планет и гравиметрия».—М.: МИИГАиК, 2017.—44 с.

Методические указания написаны в соответствии с программой курса «Теория фигур планет и гравиметрия», рекомендованы кафедрой высшей геодезии и утверждены к изданию редакционно-издательским советом МИИГАиК.

В настоящих методических указаниях разъяснены основные положения гравиметрического метода определения физической поверхности и внешнего гравитационного поля Земли, применение гравиметрических данных в прикладной геодезии. Решение заданий контрольной работы иллюстрируется примерами.

Для студентов V курса заочного отделения факультета дистанционных форм обучения специальности «Прикладная геодезия»

Электронная версия методических указаний размещена на сайте библиотеки МИИГАиК http://library.miigaik.ru

Оглавление

Общие указания 4
Программа курса 5
Рекомендуемая литература 6
Пояснения к разделам программы 8
Методические указания к выполнению контрольной работы: . . 20
Задание 1. Вычисление аномалий силы тяжести. Построение гравиметрических карт 20
Задание 2. Оценка точности гравиметрических карт и установление связи аномалий силы тяжести с рельефом 29
Задание 3. Вычисление гравиметрической аномалии высоты 34
Задание 4. Вычисление составляющих уклонения отвеса . 43

Общие указания

В соответствии с учебным планом специальности «прикладная геодезия» теорию фигур планет и гравиметрию изучают на V курсе заочного отделения. В конце лабораторно-экзаменационной сессии IV курса студент должен получить настоящие методические указания. Самостоятельное изучение курса завершается выполнением контрольной работы, которую необходимо выслать на проверку не позднее, чем за месяц до начала лабораторно-экзаменационной сессии V курса.

Во время лабораторно-экзаменационной сессии V курса студенты прослушивают обзорный цикл лекций в объеме 16 часов и выполняют 8 лабораторных работ. Студенты, успешно выполнившие лабораторные и контрольную работы, сдают экзамен по курсу.

При самостоятельном изучении курса и выполнении контрольной работы следует использовать учебные пособия, указанные в списке литературы.

Программа курса

1. Введение. Содержание предмета, его место в ряду наук о Земле. Исторические сведения о развитии теории фигуры Земли. Роль курса в подготовке специалиста по прикладной геодезии.

2. Гравитационное поле Земли. Сила притяжения и сила тяжести. Виды потенциалов притяжения и их свойства. Центробежный потенциал. Потенциал силы тяжести. Свойства потенциала силы тяжести. Вторые производные потенциала силы тяжести. Силовые линии и уровенные поверхности поля силы тяжести. Геопотенциальное число. Натуральная система координат. Приливные изменения силы тяжести. Представление потенциала притяжения в сферической системе координат. Основные характеристики гравитационного поля планет земной группы и их спутников.

3. Нормальное гравитационное поле. Способы выбора нормального поля. Потенциал уровенного эллипсоида вращения. Нормальная сила тяжести. Система координат в нормальном поле, её связь с геодезической системой.

4. Аномальное поле и аномальный потенциал. Аномальный потенциал и аномалия высоты. Уклонения отвеса и чистая аномалия силы тяжести. Связь геодезической системы координат с натуральной системой координат.

5. Методы измерения силы тяжести. Современные абсолютные определения. Относительные определения статическими гравиметрами. Исследования гравиметров, методика полевых измерений. Опорные гравиметрические сети и гравиметрические съёмки. Назначение разных съемок. Понятие об измерениях на подвижном основании и об измерениях вторых производных потенциала.

6. Аномалии силы тяжести. Аномалии в свободном воздухе. Топографические аномалии. Аномалия Буге. Поправка за рельеф. Косвенное интерполирование аномалий в свободном воздухе. Гравиметрические карты. Оценка точности гравиметрической карты.

7. Определение физической поверхности и внешнего гравитационного поля Земли. Задача Молоденского. Нормальная высота и поверхность Земли первого приближения. Смешанные и чистые аномалии силы тяжести. Краевое условие для определения аномального потенциала. Решение задачи Молоденского в нулевом приближении. Формула Стокса и формулы Венинг-Мейнеса. Определение аномального потенциала по чистым аномалиям силы тяжести.

8. Учет неоднородности гравитационного поля в задачах прикладной геодезии. Геодезические измерения в однородном и неоднородном гравитационном поле. Оценка неоднородности нормального и аномального поля. Определение вторых производных аномального потенциала по гравиметрической карте. Редуцирование результатов геодезических измерений.

Рекомендуемая литература

Основная

1. Юзефович А.П. Поле силы тяжести и его изучение. — М: Изд-во МИИГАиК, 2014. — 192 с.

2. Огородова Л.В. Нормальное поле и определение аномального потенциала. — М: Изд-во МИИГАиК, 2010. — 106 с.

3. Огородова Л.В. Высшая геодезия. Часть III. Теоретическая геодезия. — М: Картгеоцентр—Геодезиздат. — 2006, 382 с.

Дополнительная

4. Огородова Л.В., Луповка Т.К. Вычисление местной гравиметрической аномалии высоты по дискретным измере-

ниям силы тяжести: Методические указания. — М.: МИИГАиК, 2011. — 36 с.

5. Огородова Л.В., Шимбирёв Б.П., Юзефович А.П. Гравиметрия. — М.: Недра, 1978. — 326 с.

6. Бровар В.В. Гравитационное поле в задачах инженерной геодезии. — М.: Недра, 1983. — 112 с.

Пояснения к разделам программы

Введение

Основная задача высшей геодезии состоит в определении физической поверхности и внешнего гравитационного поля Земли и их изменений во времени (Молоденский, 1945 и 1958 гг.). Полученные из решения этой задачи элементы гравитационного поля позволяют привести геодезические измерения в единую систему координат.

При определении гравитационного поля основной измеряемой величиной в геодезической гравиметрии является сила тяжести, поскольку существуют физические законы, связывающие её с величинами, которые можно точно измерить в полевых условиях.

Вопросы

1. Чему приближенно равен радиус земного шара?
2. Что такое геоид?
3. Могут ли высоты геоида быть отрицательными?
4. Что означает «определение физической поверхности Земли»?

Литература: [1, с. 5—24], [2, с. 8—15], [5, с. 5—9].

Гравитационное поле Земли

Цель изучения раздела — знакомство с особенностями гравитационного поля Земли и с методами измерения силы тяжести. Основное внимание уделите свойствам потенциалов притяжения и особенно свойствам потенциала силы тяжести. Потенциал силы тяжести — это

сумма потенциала тяготения всех масс Земли и потенциала центробежной силы, вызванного суточным вращением Земли. Если известен потенциал, то можно найти любой другой элемент гравитационного поля. Дифференцирование потенциала по направлению позволяет найти проекцию силы тяжести на это направление. Дифференцирование по нормали к уровенной поверхности потенциала дает полную величину силы тяжести.

Вторые производные потенциала — градиенты силы тяжести и градиенты кривизны уровенной поверхности. Изучите связь вторых производных потенциала с кривизной силовой линии и с кривизной уровенной поверхности.

Когда геодезист перед измерениями на пункте устанавливает инструмент по уровням, он неизбежно пользуется натуральной (естественной) системой координат: вертикальная ось его инструмента совмещена с отвесной линией — единственной доступной координатной линией, а ось уровня является касательной к уровенной поверхности потенциала силы тяжести. Направление отвесной линии можно найти из астроопределений — его задают астрономические широта и долгота.

Геометрические задачи (вычисление расстояний, азимутов) в натуральной системе координат не решают, поскольку направление отвесной линии от пункта к пункту изменяется нерегулярно.

Поле силы тяжести сложное, и потому уровенные поверхности имеют сложную форму, а силовые линии — двоякую кривизну. Важно, что превышение в поле силы тяжести выражается через разность потенциалов.

Вопросы

1. Зачем при вычислении потенциала тяготения объемного тела его разделяют на бесконечно малые массы?

2. Можно ли по формуле для потенциала объемных масс практически определить потенциал притяжения Земли?

3. Как связаны сила тяжести и её потенциал?

4. Какую часть полной величины g составляет 1 миллигал?

5. Можно ли увидеть уровенную поверхность потенциала силы тяжести?

6. Почему сила тяжести на экваторе меньше, чем на полюсе?

7. Почему область существования потенциала силы тяжести ограничена?

Литература: [1, с. 46—58, 60—69], [3, с. 15—21, 46—47].

Нормальное гравитационное поле

При определении внешнего гравитационного поля Земли из потенциала силы тяжести обычно выделяют нормальное поле простого вида, близкое к реальному полю и созданное простой моделью Земли. Нормальное поле можно выбирать по-разному. При геодезических построениях невысокой точности и протяженности используют однородное поле либо поле вращающегося шара. В других случаях ограничиваются наиболее общими, глобальными составляющими реального поля. В геодезической гравиметрии нормальное поле — это поле уровенного эллипсоида вращения, у которого известны масса и угловая скорость вращения. Распределение внутренних притягивающих масс эллипсоида не задается.

Ознакомьтесь с определением потенциала уровенного эллипсоида во внешнем пространстве, с формулой распределения нормальной силы тяжести γ_0 на поверхности эллипсоида. Обратите внимание на градиенты нормальной силы тяжести, на простую форму силовых линий и уровенных поверхностей нормального поля. Величину нормальной силы тяжести γ во внешнем пространстве легко получить, прибавив к γ_0 поправку за высоту (редукцию в свободном воздухе).

Обратите особое внимание на систему координат в нормальном поле. Связь этой «физической» системы координат с чисто геометрической геодезической системой координат очень простая.

Вопросы

1. В каком направлении нормальная сила тяжести меняется быстрее?

2. Как величина центробежной силы изменяется с широтой?

3. На какой широте горизонтальный градиент нормальной силы тяжести максимален?

4. Почему уровенные поверхности нормального поля непараллельны?

Литература: [2, гл. 1], [5, §§ 46—51].

Аномальный потенциал и аномальное поле

Отличие реального гравитационного поля Земли от поля уровенного эллипсоида называется аномальным полем. Нормальное поле известно, поэтому определение гравитационного поля состоит в определении сложного аномального поля по результатам измерений. Нормальное поле подбирается таким образом, чтобы аномальное поле было относительно мало.

Изучите главные характеристики (элементы) аномального поля:

— аномальный потенциал T,

— аномалию высоты ζ,

— составляющие уклонения отвеса ξ, η,

— аномалию силы тяжести Δg.

Обратите внимание на их численные значения. Ознакомьтесь с формами представления аномального поля, особенно в виде разложения в ряд шаровых функций; уясните физический смысл первых составляющих этого ряда.

Изучите связь аномалии высоты, составляющих уклонения отвеса и аномалии силы тяжести с аномальным потенциалом.

Вопросы

1. Как, имея данные об одном из элементов аномального поля, вычислить другие?

2. Когда уклонение отвеса считают положительным и когда отрицательным?

3. Среднеквадратическая величина аномалии высоты на Земле ± 30 м; радиус Земли ≈ 6400 км. Оцените их отношение (степень аномальности поля).

Литература: [1, §8.1], [2, с. 40—47], [3, гл. 4], [5, § 53].

Измерения силы тяжести и вторых производных ее потенциала

Изучите методы измерения силы тяжести: баллистический и статический, современную роль каждого метода. При изучении абсолютных измерений силы тяжести обратите внимание на схемы баллистического метода, конструкцию баллистического гравиметра, источники ошибок. Надо представлять себе роль современных абсолютных измерений в мировой гравиметрической съемке: они задают и контролируют масштаб гравиметрической сети, а регулярные повторные измерения позволяют получать изменения силы тяжести во времени.

Основное внимание уделите статическому методу измерений: теории и устройству астазированных гравиметров, получивших наибольшее распространение, их исследованиям, а также основным источникам ошибок (смещению нуль-пункта, влиянию внешних условий, ошибкам постоянных гравиметра), устройству автоматизированных гравиметров.

Ознакомьтесь с видами и назначением гравиметрических съемок, их топографо-геодезическим обеспечением, методикой полевых измерений с гравиметрами.

Гравиметрическую съемку разделяют на опорную сеть и на рядовую съемку. Мировая опорная гравиметрическая сеть 1971 года образована и уравнена на основании абсолютных измерений в 8 пунктах и многочисленных (около 25 тыс.) маятниковых и гравиметровых связей. В России и в других странах созданы опорные сети разных классов и местные сети, опирающиеся на пункты абсолютных измерений. Существуют межгосударственные гравиметрические сети.

При измерениях на море главными источниками ошибок являются: неравномерное движение основания из-за волнения моря, наклоны и дополнительные ускорения — эффект Этвёша, — зависящий от скорости и азимута движения судна. Влияние вертикальных возмущающих ускорений в морском гравиметре устраняют частотной фильтрацией его показаний, а влияние горизонтальных ускорений и

наклон — установкой прибора на гиростабилизированном основании. Для учета эффекта Этвёша необходимо весьма точное для морских условий определение траектории движения судна.

В разделе об измерении вторых производных потенциала силы тяжести основное внимание уделите связи положения крутильных весов с величинами вторых производных, составу измерений для вычисления горизонтальных градиентов силы тяжести и кривизны уровенной поверхности, а также влиянию рельефа.

Вторую вертикальную производную потенциала силы тяжести (вертикальный градиент) находят косвенно по её измерениям с гравиметром на разной высоте.

Вопросы

1. Чье имя носит закон, на котором основан принцип работы статических гравиметров?

2. Почему приборы для измерения силы тяжести нуждаются в тщательных многосторонних исследованиях?

3. Какую роль играют гравиметрические базисы?

Литература: [1, § 4.1—4.2, 5.1—5.4, 6.1—6.4].

Аномалии силы тяжести. Гравиметрическая карта

Различают несколько видов аномалий силы тяжести. Разность реальной (измеренной) силы тяжести g и нормальной силы тяжести γ в пункте наблюдений называется *чистой аномалией в свободном воздухе*.

До недавнего времени чаще всего были известны не геодезические, а нормальные высоты пунктов, нормальную силу тяжести было возможно вычислить не в самом пункте наблюдений, а на гипсометрической поверхности в точке, соответствующей нормальной высоте пункта. Вычисленные таким образом аномалии называют *смешанными аномалиями в свободном воздухе*.

Аномалии в свободном воздухе зависят не только от притяжения внутренних аномальных масс Земли, но и от притяжения относительно небольших, но более близких к пункту топографических

масс. Аномалии в свободном воздухе коррелируют с высотами рельефа. По этой причине для изучения строения Земли, включая поиски полезных ископаемых, пользуются различными *топографическими* аномалиями, при вычислении которых в величину g вводят *топографические* поправки (редукции).

Вычислив притяжение всех топографических масс, находят аномалии силы тяжести *в полной топографической редукции*. Вычислив притяжение топографических масс только в ограниченной области, находят аномалию *в неполной топографической редукции*. Принимая топографические массы бесконечным плоским горизонтальным слоем, толщина которого равна высоте пункта (*промежуточный слой* или *пластина Буге*), получают *аномалию Буге*. В геодезической гравиметрии аномалии Буге используют для косвенной интерполяции аномалий в свободном воздухе.

Топографические редукции вводят в значение силы тяжести g со знаком «минус». В холмистой и в горной местности вводят поправку за рельеф, учитывающую отступление поверхности Земли от плоскости, проходящей через пункт наблюдений. Эта поправка всегда положительна. Если вводят только поправку за рельеф, то получают *аномалию Фая*.

Ознакомьтесь с вычислением аномалий при измерениях на море и в воздухе. По результатам гравиметрических съемок пополняют базы данных и строят гравиметрические карты с сечением изоаномал от 20—40 мГал (мировая съемка) до 2—5 мкГал (микрогравиметрическая съемка). Сечение гравиметрических карт зависит от плотности съемки, а также от ошибок измерений. Погрешность карты должна быть в 1,5—2 раза меньше сечения.

Вопросы

1. Какие геодезические работы надо выполнить для определения аномалии силы тяжести на пункте?

2. Могут ли аномалии силы тяжести быть отрицательными?

3. Чаще всего на исследуемую территорию составляют карту аномалий в свободном воздухе и карту аномалий Буге. На какой из них сечение изоаномал больше?

4. С какой точностью надо определять высоту пункта, если точность измерений силы тяжести 0,01 мГал?

Литература: [1, § 8.2, с. 167—172], [3, гл. 8], [5, § 54—59].

Определение физической поверхности и внешнего гравитационного поля Земли (задача Молоденского)

Этот раздел — один из самых важных разделов в программе.

Исходными данными являются величины, измеренные на поверхности Земли: астрономические координаты (φ и λ), величины силы тяжести g, элементарные нивелирные превышения dh, а также угловая скорость вращения Земли. Задача решается строго, без предположений о внутреннем строении Земли. Точность решения зависит от точности и полноты исходных данных.

Задача решается в два этапа. На первом этапе определяется поверхность Земли первого приближения в известном нормальном поле. Вводится понятие *нормальной высоты* H^γ пункта поверхности Земли.

Нормальные высоты над эллипсоидом образуют *поверхность Земли первого приближения*, или *гипсометрическую поверхность Земли*.

Искомая геодезическая высота пункта отличается от нормальной высоты на величину *аномалии высоты* из-за отличия реального поля Земли от нормального. Аномалия высоты выражает аномальный потенциал в линейной мере и откладывается по нормали к эллипсоиду от физической поверхности Земли.

Для определения геодезических широты и долготы B и L нужны *составляющие уклонения отвеса*, которые ранее были определены через аномальный потенциал T. Уклонение отвеса — мера аномальной горизонтальной составляющей притяжения Земли.

Второй этап решения задачи состоит в определении аномального потенциала T. Обратите внимание, что это потенциал притяжения, который во внешнем пространстве является *гармонической* функцией, поэтому его можно найти из решения *краевой задачи теории*

потенциала с заданным *краевым условием* на физической поверхности Земли. Это условие связывает на поверхности Земли аномальный потенциал с известными из измерений смешанными аномалиями в свободном воздухе.

Поскольку аномальный потенциал величина небольшая, при его определении в качестве краевой поверхности можно использовать сферу, проходящую через точку вычисления, т. е. считать аномалии силы тяжести заданными на сфере. Такое приближение называют нулевым или стоксовым. Результатом решения является формула Стокса для аномального потенциала T. Полученное решение позволяет найти составляющие гравиметрического уклонения отвеса и гравиметрическую аномалию высоты, что позволяет получить геодезические координаты пункта.

В нулевом приближении гравиметрическую аномалию высоты $\zeta^{\text{гр}}$ определяет формула Стокса:

$$\zeta^{\text{гр}} = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\omega}(g-\gamma)S(\psi)d\omega + \frac{W_0 - U_0}{\gamma}, \qquad (1)$$

где $(g-\gamma)$ — смешанные аномалии силы тяжести в свободном воздухе, γ — нормальная сила тяжести, R — средний радиус Земли, ω — поверхность сферы единичного радиуса, $d\omega = \sin\psi d\psi dA$ — элемент поверхности единичной сферы, W_0, U_0 — действительный потенциал в начале счета высот и нормальный потенциал на эллипсоиде соответственно, $S(\psi)$ — функция Стокса, определяемая формулой:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} + 1 - 6\sin\frac{\psi}{2} - \cos\psi\left[5 + 3\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right], \qquad (2)$$

ψ — угловое расстояние между точкой вычисления и текущей точкой интегрирования с аномалией $(g-\gamma)$.

Если $W_0 = U_0$, то аномалия высоты относится к общему земному эллипсоиду и ее называют *абсолютной*. Абсолютную аномалию высоты можно вычислить по измерениям только силы тяжести, поэтому

ее называют *гравиметрической*, при этом аномалии силы тяжести $(g-\gamma)$ должны быть известны на всей поверхности Земли.

Функция Стокса изменяется нелинейно (рис. 1). Вблизи вычислительной точки она неограниченно возрастает, а на большей части поверхности сферы меняется плавно. Так, на интервале $27^\circ < \psi < 180^\circ$ ее значения меняются в пределах ± 3. Поэтому влияние аномалий силы тяжести вблизи точки вычисления и в удаленных точках учитывают по-разному.

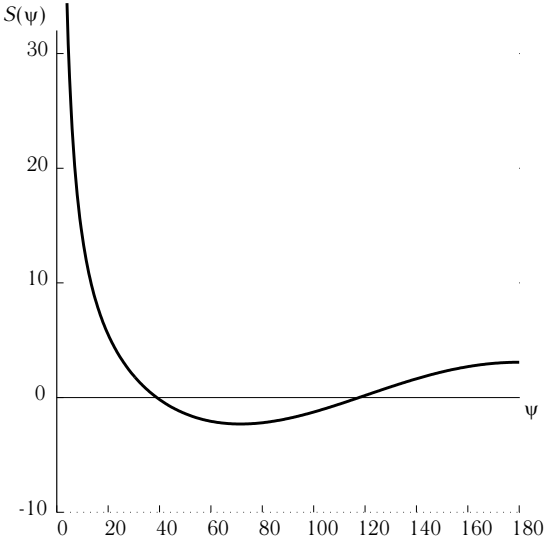


Рис. 1. Функция Стокса

Поверхность Земли разбивают на две части: сферическую «шапку» радиуса ψ_0 с центром в вычислительной точке (ближняя зона) и остальную часть (дальняя зона). Формуле (1) после такого разделения можно придать вид:

$$\zeta^{\text{гр}} = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{\psi_0}\int_0^{2\pi}(g-\gamma)S(\psi)\sin\psi\, d\psi\, dA + \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\psi_0}^{\pi}\int_0^{2\pi}(g-\gamma)S(\psi)\sin\psi\, d\psi\, dA, \tag{3}$$

где A — азимут текущей точки.

Первый интеграл этой формулы определяет влияние аномалий в ближней зоне, второй — в дальней зоне. Если при вычислении аномалии высоты ограничиться учетом влияния ближней зоны, получают *местную* гравиметрическую аномалию высоты $\zeta_{\text{м}}^{\text{гр}}$.

Влияние ближней зоны учитывают обычно методом численного интегрирования с использованием гравиметрических и топографических карт разных масштабов и каталогов средних значений анома-

лий силы тяжести на трапециях малых размеров. Для учета влияния дальних зон применяют разные формы аналитического представления аномалий силы тяжести.

По спутниковым наблюдениям возможно вычислять геодезические координаты пунктов с приемлемой точностью и, определив геодезическую высоту, получать нормальную силу тяжести в пункте наблюдений, следовательно, иметь чистые аномалии в свободном воздухе. Использование чистых аномалий приводит к другому краевому условию.

Гравиметрическая аномалия высоты совместно со спутниковыми измерениями позволяет найти нормальную высоту, не выполняя геометрического нивелирования (т. н. «спутниковое нивелирование»).

Вопросы

1. Почему при решении задачи Молоденского используют смешанные аномалии в свободном воздухе, а не топографические аномалии?

2. При каких условиях аномальный потенциал T является гармонической функцией?

3. Что такое нормальная высота?

4. Какие высоты показаны на топографических картах?

Литература: [2, гл. 3], [5, § 57—60].

Учет неоднородности гравитационного поля в задачах прикладной геодезии

При геодезических измерениях невысокой точности на небольших участках считают, что отвесные линии параллельны (однородное поле) либо сходятся к центру сферы (центральное поле), и в результаты геодезических измерений вводят *поправку за кривизну Земли*. При обработке высокоточных измерений вводят поправки за непараллельность уровенных поверхностей.

Изучите влияние неоднородного нормального и аномального поля, которое описано вторыми производными потенциала силы тя-

жести, на результаты измерений. Эти производные можно найти по гравиметрической карте.

Вопросы

1. Назовите особенности высокоточных инженерно-геодезических сетей.
2. Что такое центральное поле притяжения?
3. Почему при вычислении гравиметрических поправок в инженерно-геодезических сетях не надо вычислять полные величины уклонений отвеса и аномалии высоты?
4. Как найти аномалии вертикального градиента силы тяжести, вычислив величины T_{xx} и T_{yy} по гравиметрическим уклонениям отвеса?

Литература: [6], [5, гл. VIII], [2, гл. 4].

Методические указания к выполнению контрольной работы

Контрольная работа состоит из четырёх заданий, составленных по темам основных разделов программы. Исходные данные индивидуальные. Номер варианта равен сумме двух последних цифр шифра. Студенту выдаются:

— три экземпляра схемы расположения гравиметрических пунктов в масштабе 1:200 000; для большинства пунктов подписаны значения аномалий в свободном воздухе на двух схемах и аномалий Буге — на третьей;

— каталог гравиметрических пунктов (табл. 1);

— бланки для вычисления аномалий силы тяжести и ошибок интерполяции;

— ведомость для вычисления аномалии высоты.

Задание 1. Вычисление аномалий силы тяжести. Построение гравиметрических карт

Вычислить аномалии в свободном воздухе $g - \gamma$ и аномалии Буге $\delta g_{\text{Б}}$ для первых 10 пунктов каталога, для которых значения аномалий в каталоге не указаны. Точность вычислений 0,1 мГал. Методика вычисления описана в [1, с. 149—155].

Построить карту аномалий Буге и карту аномалий в свободном воздухе *только по пунктам с подписанными аномалиями*.

Таблица 1. Пример исходных данных. Каталог гравиметрических пунктов

№ кат.	Широта φ, ° ′	Высота H, м	Сила тяжести g, мГал	Аномалия в свободном воздухе $g-\gamma$, мГал	Аномалия Буге $\Delta g_{Б}$, мГал
Пункты для вычисления аномалий					
1195	35°40′,31	522	979 644,37		
1211	40,63	978	552,35		
1218	40,88	833	579,72		
1224	41,08	1033	540,38		
1229	41,26	795	591,90		
1247	41,60	710	602,24		
1252	41,79	637	619,52		
1254	41,82	614	624,29		
1262	42,14	582	628,49		
Пункты для оценки точности интерполяции и связи аномалий с рельефом					
1274	42,54	521	644,11	14,51	−35,69
1281	42,88	606	625,11	21,24	−37,15
1321	44,43	1390	481,38	117,24	−16,71
1329	44,85	1209	509,29	88,69	−27,81
1333	45,24	926	564,47	55,98	−33,25
1380	47,07	1107	541,37	86,14	−20,54
1413	48,40	909	578,57	60,32	−27,27
1422	48,76	809	597,07	47,44	−30,51
1427	48,86	1442	467,26	112,84	−26,12
1503	51,78	1460	458,92	105,88	−34,81
1525	52,63	1350	490,08	101,87	−28,22
1580	55,20	1323	496,03	95,82	−31,67
1591	55,63	1220	511,76	79,14	−38,42
1619	56,53	1160	533,60	80,94	−30,84
1624	56,64	1184	529,40	84,23	−29,86

Указания к выполнению задания

Аномалию в свободном воздухе $g - \gamma$ находят по формуле

$$g - \gamma = g - (\gamma_0 + \Delta_1\gamma), \tag{4}$$

здесь g — измеренное на гравиметрическом пункте значение силы тяжести, γ_0 — нормальная сила тяжести на эллипсоиде на широте φ гравиметрического пункта (в каталоге широта дана до $0{,}01'$), $\Delta_1\gamma$ — поправка за высоту пункта в нормальном поле (редукция в свободном воздухе).

Величину γ_0 нужно вычислить по *формуле Гельмерта 1901—1909 г.*:

$$\gamma_0 = 978\,030(1 + 0{,}005\,302\sin^2\varphi - 0{,}000\,007\sin^2 2\varphi) \text{ мГал}.$$

Поправку $\Delta_1\gamma$ за высоту H обычно вычисляют, считая что с высотой сила тяжести изменяется линейно:

$$\Delta_1\gamma = -0{,}3086H \text{ мГал},$$

где $-0{,}3086$ мГал/м — нормальный вертикальный градиент силы тяжести, знак «минус» указывает на уменьшение силы тяжести с высотой; H — высота в принятой системе высот.

Далее из величины g вычитают притяжение топографических масс, расположенных между уровнем моря и физической поверхностью Земли. Строгий учет притяжения топографических масс весьма трудоемок из-за сложного рельефа. Приближённо топографические массы представляют для каждого гравиметрического пункта горизонтальной плоской пластиной бесконечной протяженности — промежуточный слой, — толщина которой равна высоте пункта. Плотность пород δ принимают равной средней плотности земной коры в районе съемки. Притяжение плоской пластины выражается формулой

$$\Delta_2 g = 2\pi G\delta H,$$

где $G = 6{,}673 \cdot 10^{-8}$ см^3/(г·с^2) — постоянная тяготения.

Величина $\Delta_2 g$ называется *поправкой за промежуточный слой*. Разность

$$\Delta g_{\text{Б}} = (g - \gamma) - \Delta_2 g \tag{5}$$

называют *аномалией силы тяжести в редукции Буге*. Если выразить плотность в г/см^3, высоту в метрах, а поправку в миллигалах, то

$$\Delta_2 g = 0{,}0419 \delta H.$$

До вычисления аномалии Буге найдите с помощью формулы (5) значение δ, с которым вычислены аномалии Буге в каталоге. Для любого пункта каталога с известными значениями аномалий в свободном воздухе и Буге находим

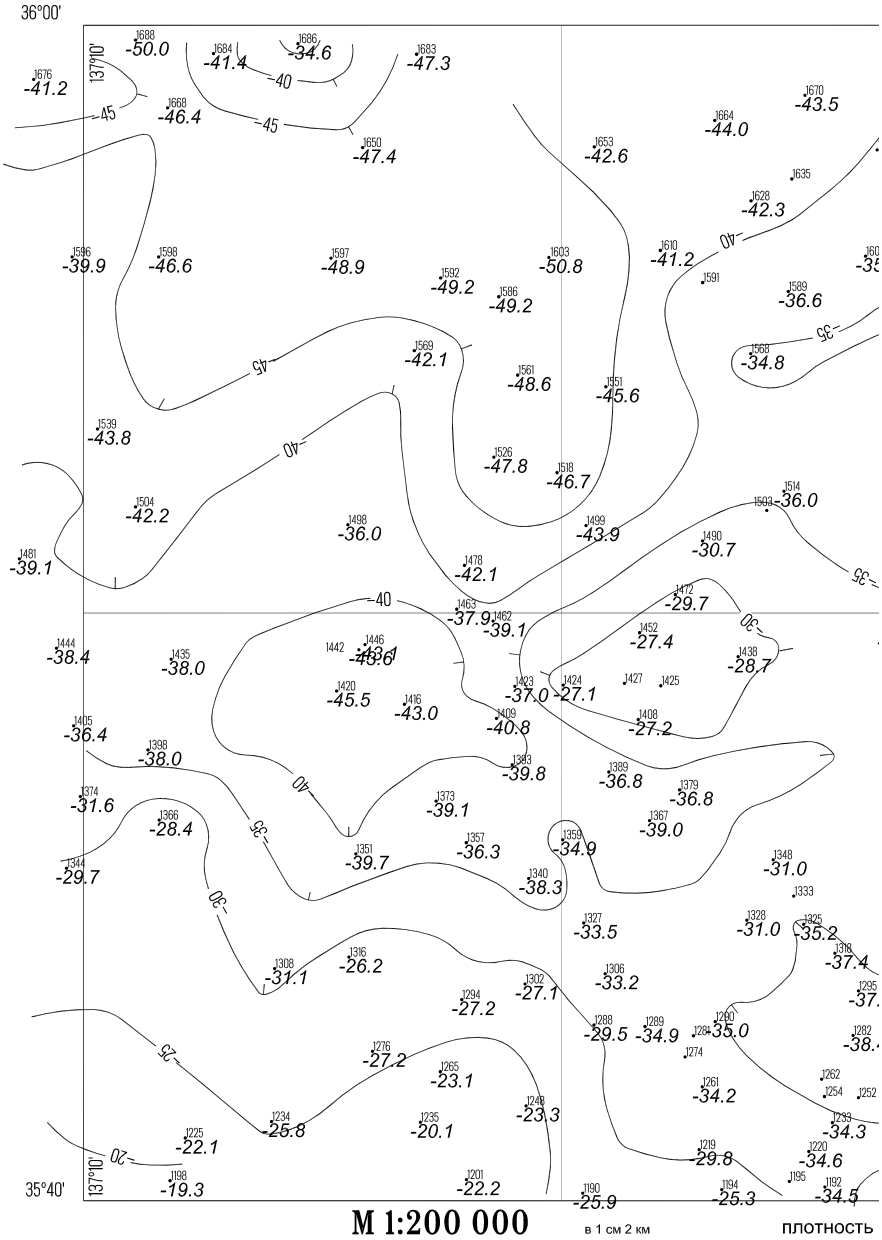
$$(g - \gamma) - \Delta g_{\text{Б}} = 0{,}0419 \delta \cdot H,$$

$$\delta = \frac{(g - \gamma) - \Delta g_{\text{Б}}}{0{,}0419 \cdot H}.$$

Для контроля вычислите величину δ для двух пунктов. Точность вычисления 0,01 г/см^3. Пример вычисления в табл. 2. Для первых десяти пунктов каталога (см. табл. 1) вычислите в ведомости аномалии силы тяжести (табл. 3).

При построении гравиметрических карт сначала надо выбрать сечение карты (0,5, 1, 2, 2,5, 5, 10 или 20 мГал). Желательно, чтобы на большей части карты между смежными пунктами проходили однадве изолинии (изоаномалы).

Линейно проинтерполируйте аномалии между смежными пунктами. Аккуратно проведите плавные изоаномалы. Подпишите их, поставьте бергштрихи, выделите каждую пятую изолинию. При надобности пользуйтесь полуизоаномалами. Аномалии Буге обычно изменяются на участке съемки более плавно, чем аномалии в свободном воздухе и на значительно меньшую величину. Сечение карты аномалий в свободном воздухе получится в 2—5 раз большим сечения карты аномалий Буге. Напишите сечение карт, укажите значение плотности δ на карте аномалий Буге.


36°00'
35°40'
137°10'
M 1:200 000
в 1 см 2 км
ПЛОТНОСТЬ

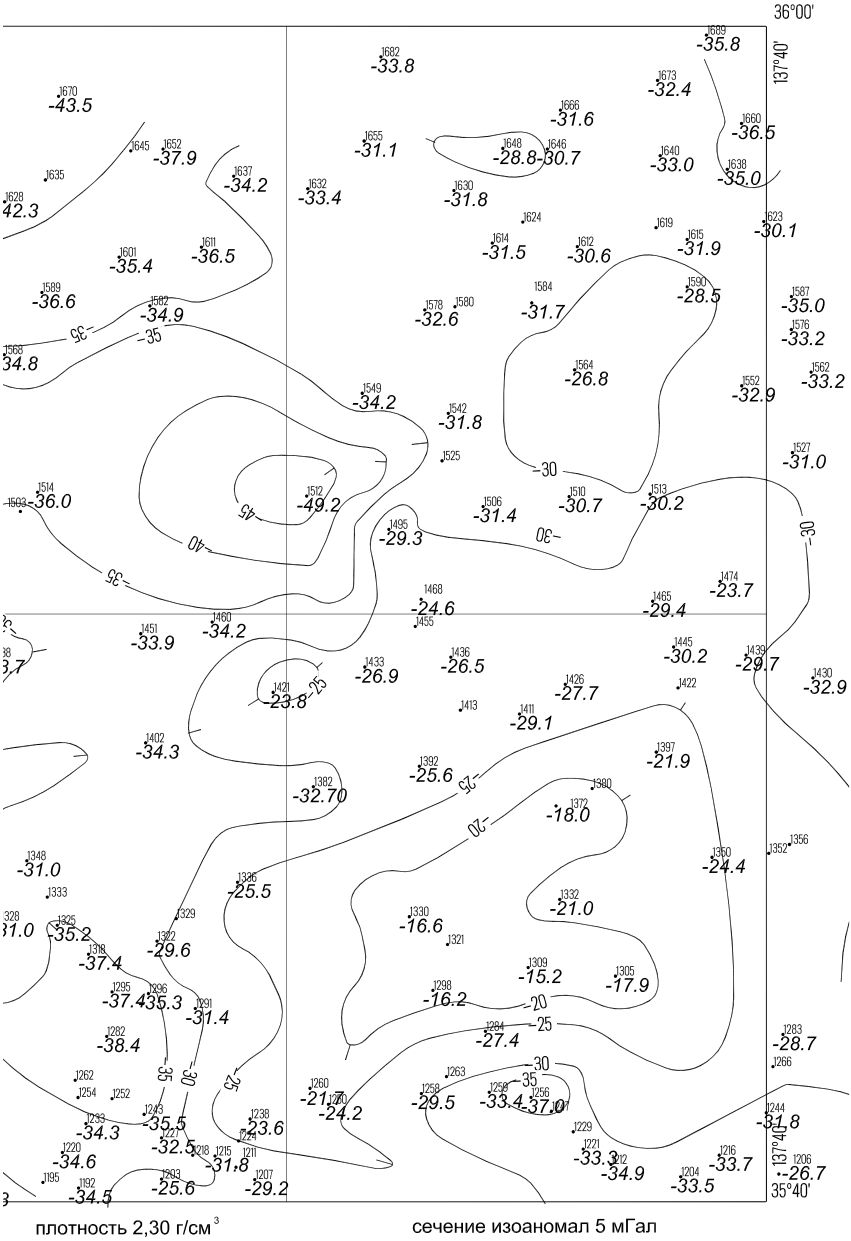
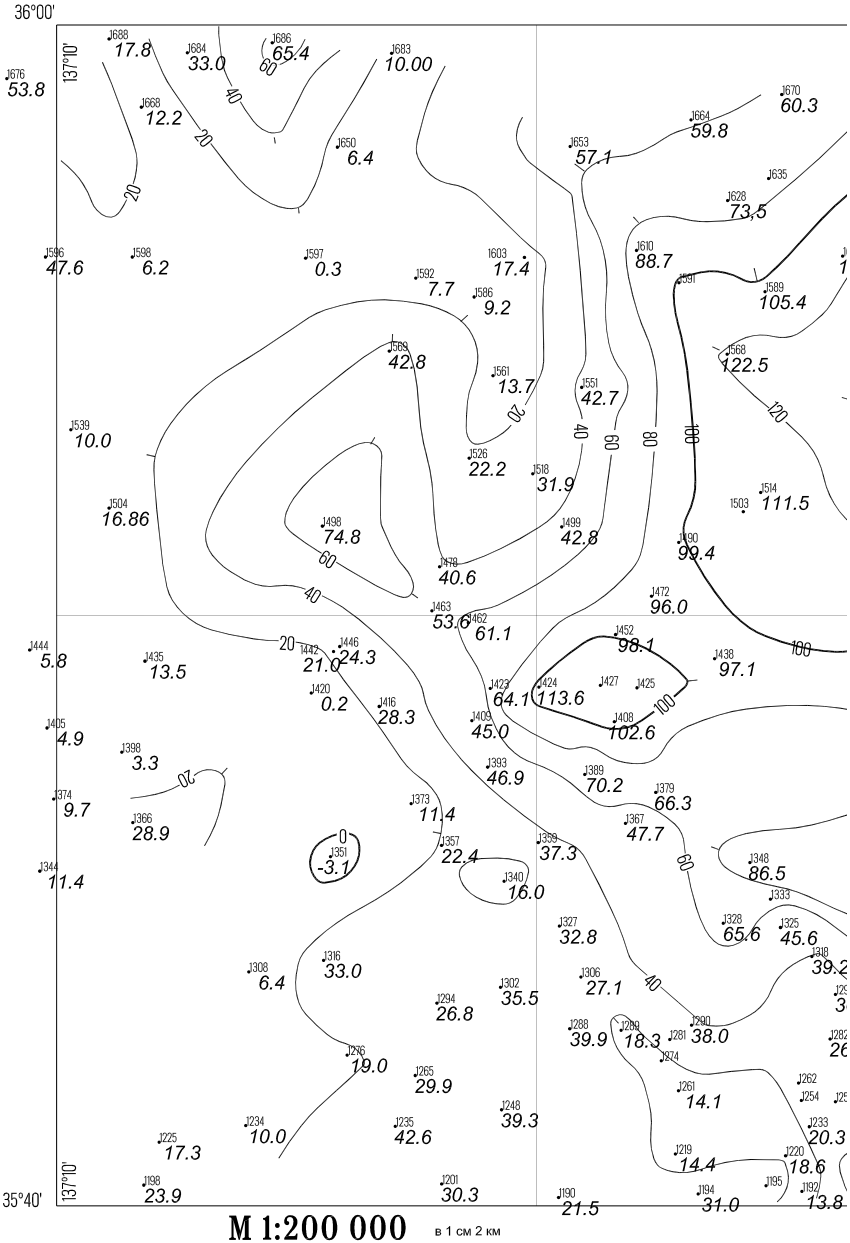


Рис. 2. Аномалии Буге


36°00'
35°40'
137°10'
J688 17.8
J684 33.0
J686 65.4
J683 10.00
J676 53.8
J668 12.2
J650 6.4
J670 60.3
J664 59.8
J653 57.1
J635
J628 73.5
J596 47.6
J598 6.2
J597 0.3
1603 17.4
J592 7.7
J586 9.2
J610 88.7
J589 105.4
J568 122.5
J569 42.8
J561 13.7
J551 42.7
J539 10.0
J526 22.2
J518 31.9
J504 16.86
J498 74.8
J499 42.8
1503 J514 111.5
J490 99.4
J478 40.6
J472 96.0
J463 53.6
J462 61.1
J452 98.1
J444 5.8
J435 13.5
J442 21.0
J446 24.3
J438 97.1
J423 64.1
J424 113.6
J427
J425
J420 0.2
J416 28.3
J409 45.0
J408 102.6
J405 4.9
J398 3.3
J393 46.9
J389 70.2
J379 66.3
J374 9.7
J366 28.9
J373 11.4
J367 47.7
J351 -3.1
J357 22.4
J359 37.3
J348 86.5
J344 11.4
J340 16.0
J333
J327 32.8
J328 65.6
J325 45.6
J318 39.2
J316 33.0
J308 6.4
J306 27.1
J302 35.5
J294 26.8
J288 39.9
J280 18.3
J281
J290 38.0
J274
J276 19.0
J265 29.9
J262
J261 14.1
J254
J248 39.3
J234 10.0
J235 42.6
J225 17.3
J233 20.3
J219 14.4
J220 18.6
J198 23.9
J201 30.3
J190 21.5
J195
J194 31.0
J192 13.8
M 1:200 000
в 1 см 2 км

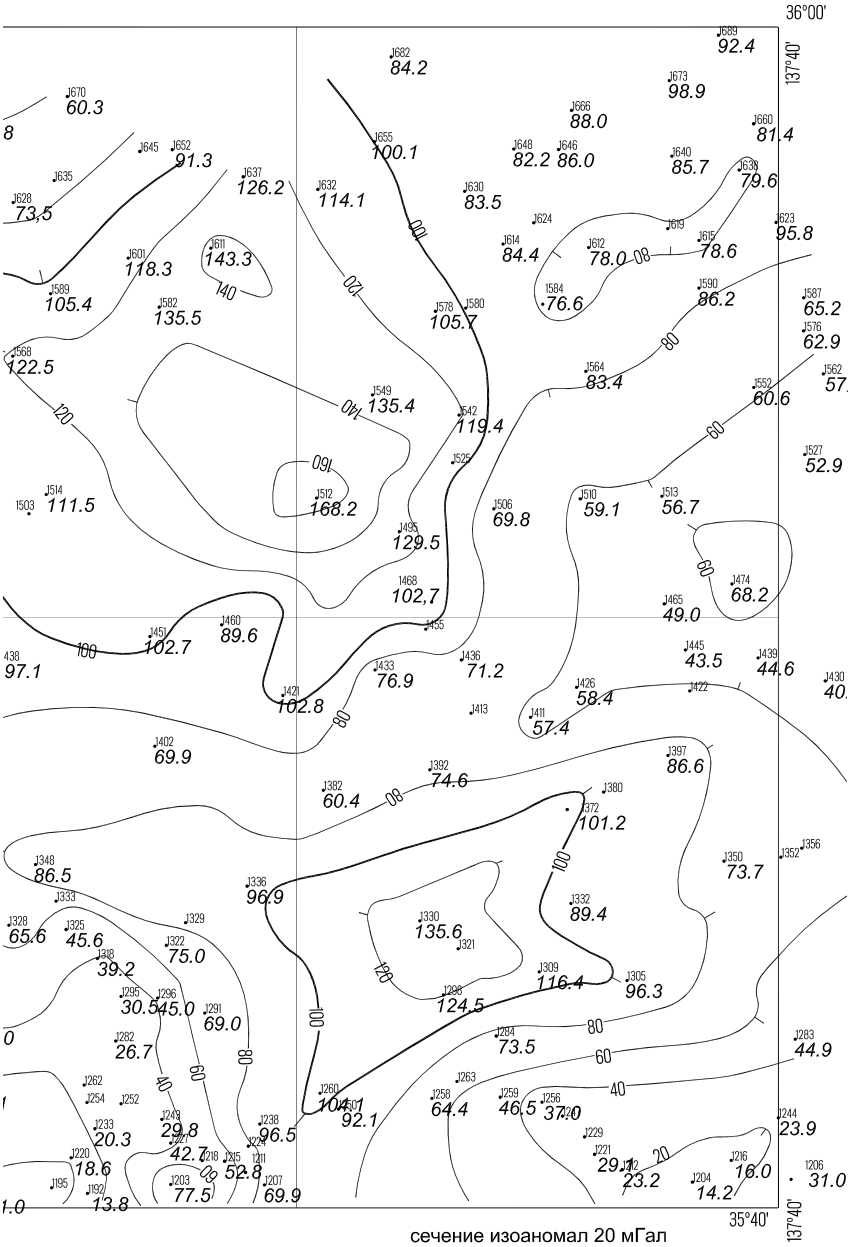


Рис. 3. Аномалии в свободном воздухе

Оцените изменения аномалий силы тяжести на небольших участках поверхности Земли.

Сравните гравиметрические карты. Почему вид этих карт различен? Чем объяснить более спокойный характер аномалий Буге?

Пример вычислений

Таблица 2. Определение плотности топографических масс

Пункт	H, м	$g-\gamma$, мГал	$\Delta g_Б$, мГал	$(g-\gamma)-\Delta g_Б$, мГал	$\delta=\frac{(g-\gamma)-\Delta g_Б}{0{,}0419H}$, г/см^3
1281	606	21,24	−37,15	58,39	2,30
1274	521	14,5	−35,7	50,2	2,30

Таблица 3. Вычисление аномалий силы тяжести

№ кат.	φ, ° ′	H, м	g, мГал	γ_0, мГал	$\Delta_1\gamma$, мГал	γ, мГал	$\Delta_2 g$, мГал	$g-\gamma$, мГал	$\Delta g_Б$, мГал
1195	35°40′,31	522	979 644,4	979 787,2	161,1	979 626,1	50,3	+18,3	−32,0
1211	40,63	978	552,4	787,7	301,8	485,9	94,2	+66,5	−27,7
1218	40,88	833	579,7	788,0	257,1	530,9	80,2	+48,8	−31,4
1224	41,08	1033	540,4	788,3	318,8	469,5	99,5	+70,9	−28,6
1229	41,26	795	591,9	788,6	245,3	543,3	76,6	+48,6	−28,0
1247	41,60	710	602,2	789,0	219,1	569,9	68,4	+32,3	−36,1
1252	41,79	637	619,5	789,3	196,6	592,7	61,3	+26,8	−34,5
1254	41,82	614	624,3	789,4	189,5	599,9	59,2	+24,4	−34,8
1262	42,14	582	628,5	789,8	179,6	610,2	56,0	+18,3	−37,7
1263	42,18	918	562,3	789,9	283,2	506,7	88,4	+55,6	−32,8

Пример гравиметрической карты аномалий силы тяжести в редукции Буге — на рис. 2, в свободном воздухе — на рис. 3.

Задание 2. Оценка точности гравиметрических карт и установление связи аномалий силы тяжести с рельефом

Точность гравиметрической карты характеризует *ошибка E интерполяции аномалий* — среднеквадратическое значение разности измеренной аномалии силы тяжести на произвольном пункте и интерполированной на этот пункт по карте. Ошибка интерполяции складывается из ошибок трех видов:

— ошибки определения аномалии на гравиметрическом пункте (она зависит от ошибок измерения силы тяжести g и вычисления γ);

— ошибки нанесения пункта на карту;

— влияние дискретности съёмки и сложности аномального поля в области съёмки.

При редкой или неравномерной гравиметрической съёмке часто возникает необходимость интерполировать аномалии в свободном воздухе между гравиметрическими пунктами. Такая прямая интерполяция может сопровождаться значительными ошибками из-за сильной зависимости аномалий от высоты. Поэтому применяют косвенную интерполяцию с помощью аномалий Буге, которые изменяются на участке съёмки медленней, более плавно и монотонно. Проинтерполировав линейно на нужный пункт аномалию Буге и прибавив к результату притяжение промежуточного слоя, находят нужные значения аномалий в свободном воздухе, т. е.

$$(g - \gamma)_{\text{инт}} = (\Delta g_{\text{Б}})_{\text{инт}} + 2\pi G\delta H.$$

Величина коэффициента $2\pi G\delta$ близка к 0,1 мГал/м. Поэтому ошибка определения высоты, например, равная 2 м приведёт при косвенной интерполяции к ошибке 0,2 мГал, что обычно вполне приемлемо.

На величину силы тяжести на пункте влияет притяжение топографических масс, возрастающее с увеличением высоты. Поэтому аномалии в свободном воздухе приближённо повторяют рельеф.

Казалось бы, аномалии Буге, при вычислении которых вычиталось притяжение топографических масс, не должны зависеть от высоты пункта. Однако такая зависимость может возникнуть с тем или иным знаком, если принятое значение плотности δ отличается от действительного.

Указания к выполнению задания

Для определения ошибки интерполяции выполните линейную интерполяцию между изоаномалами на 15 пунктов с неподписанными на картах аномалиями, которые не использовались при построении карт. Величины $(g-\gamma)_{\text{инт}}$ записывают в ведомость (табл. 4), рядом с величиной $(g-\gamma)_{\text{кат}}$ из каталога, находят уклонения $v = (g-\gamma)_{\text{инт}} - (g-\gamma)_{\text{кат}}$. Среднеквадратическая величина этой разности будет ошибкой интерполяции $E_1 = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}}$. По тем же пунктам находят величину E_2 по карте аномалий Буге. Убедитесь, что ошибка интерполяции аномалий в свободном воздухе значительно (часто в несколько раз) больше ошибки интерполяции аномалий Буге. Если величина ошибки окажется в 1,5—2 раза меньше сечения карты, то выбор сечения можно считать удачным.

Для косвенной интерполяции получите притяжение промежуточного слоя $\Delta_2 g = 2\pi G\delta H$ для каждого из 15 пунктов каталога. Прибавив величины $\Delta_2 g$ к интерполированным аномалиям Буге, получите интерполированные величины $(g-\gamma)'_{\text{инт}}$. Снова найдите уклонения v от каталожных значений и получите среднеквадратическую величину E_3, которая будет близкой к ошибке интерполяции аномалий Буге.

Постройте график зависимости аномалий $g-\gamma$ в свободном воздухе и высоты для 15 последних пунктов каталога. Полагая зависимость величины $g-\gamma$ от H линейной, проведите «на глаз» регрессионную прямую и по её наклону получите коэффициент $\Delta(g-\gamma)/\Delta H$ в мГал/м.

Таблица 4. Ошибка интерполяции гравиметрических карт

№ кат.	Аномалии в свободном воздухе			Аномалии Буге			Косвенная интерполяция аномалий в свободном воздухе			
	$(g-\gamma)_{\text{инт}}$, мГал	$(g-\gamma)_{\text{кат}}$, мГал	v, мГал	$(\Delta g_{\text{Б}})_{\text{инт}}$, мГал	$(\Delta g_{\text{Б}})_{\text{кат}}$, мГал	v, мГал	H, м	$\Delta_2 g = 0{,}0963H$, мГал	$(g-\gamma)'_{\text{инт}}$, мГал	v, мГал
1274	36	15	+21	−35	−36	+1	521	50	15	0
1281	28	21	+7	−37	−37	0	606	58	21	0
1321	120	117	+3	−20	−17	−3	1390	134	114	−3
1329	82	89	−7	−30	−28	−2	1209	116	86	−3
1333	68	56	+12	−37	−33	−4	926	89	52	−4
1380	94	86	+8	−20	−21	+1	1107	107	87	+1
1413	67	60	+7	−27	−27	0	909	88	61	+1
1422	60	47	+13	−27	−30	+3	809	78	51	+4
1427	100	112	−12	−30	−26	−4	1442	139	109	−3
1503	109	106	+3	−35	−35	0	1460	141	106	0
1525	105	102	+3	−33	−28	−5	1350	130	97	−5
1580	100	96	+4	−32	−32	0	1323	127	95	−1
1591	100	79	+21	−39	−38	−1	1220	117	78	−1
1619	80	81	−1	−31	−31	0	1160	112	81	0
1624	95	84	+11	−30	−30	0	1184	114	84	0

$E_1 = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}} = \sqrt{\frac{1715}{15}} = 10{,}6$ мГал $\quad E_2 = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}} = \sqrt{\frac{82}{15}} = 2{,}3$ мГал $\quad E_3 = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}} = \sqrt{\frac{88}{15}} = 2{,}4$ мГал

Подобный график постройте для аномалий Буге. Если прямая регрессии окажется горизонтальной, то принятое при вычислении аномалии Буге значение плотности δ равно действительному.

Найдите средний шаг съёмки s. Для этого подсчитайте число N пунктов на прямоугольном участке съёмки площадью P. Один гравиметрический пункт будет приходиться на площадь $\frac{P}{N}$, тогда

$$s = \sqrt{\frac{P}{N}}.$$

Пример вычислений

Пример определения ошибок интерполяции в табл. 4.

Ошибка косвенной интерполяции получилась вчетверо меньше ошибки прямой интерполяции.

Построенный по данным каталога график зависимости аномалий в свободном воздухе от высоты пункта (рис. 4) свидетельствует о сильной (+0,10 мГал/м) корреляционной связи этих величин.

На графике (см. рис. 4) для аномалий Буге видно, что аномалия заметно увеличивается с высотой, т. е. поправка $\Delta_2 g = 2\pi G\delta H$ в величину g занижена: присутствует недокомпенсация притяжения топографических масс.

На участке карты $20 \times 10'$ между параллелями $35°40'$ и $36°00'$ и меридианами $137°20'$ и $137°30'$ площадью $P = 37{,}4 \times 15{,}0 = 561$ км^2 расположены 75 гравиметрических пунктов. Средний шаг съёмки

$$s = \sqrt{\frac{561}{75}} = 2{,}7 \text{ км}.$$

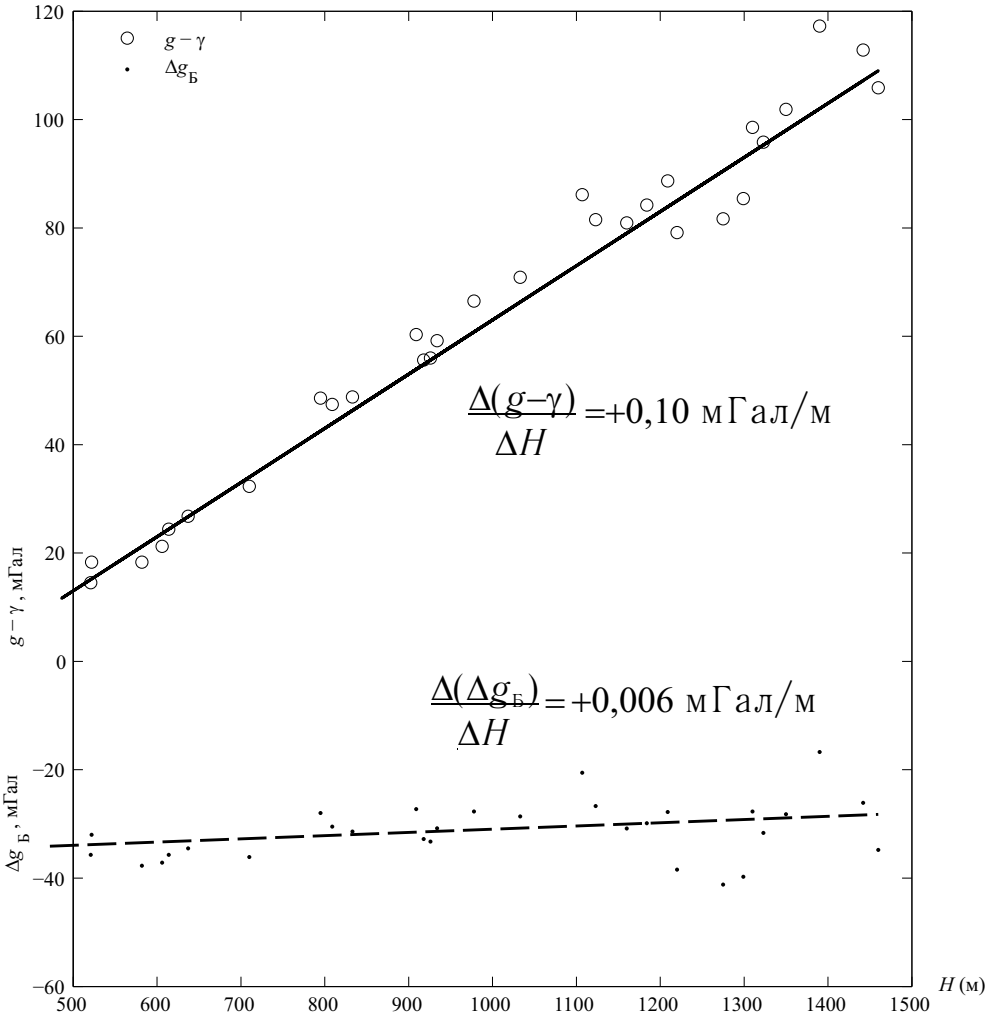


Рис. 4. Зависимость аномалий силы тяжести от высоты H

Задание 3. Вычисление гравиметрической аномалии высоты

Вычислить местную гравиметрическую аномалию высоты для четырёх пунктов по дискретной съёмке, оценить точность.

Указания к выполнению задания

Рассмотрим один из методов вычисления местной гравиметрической аномалии высоты $\zeta_{\text{м}}^{\text{гр}}$ с использованием смешанных аномалий силы тяжести.

Если размеры учитываемой области невелики (примерно до 100 км), можно не учитывать кривизну Земли и считать область интегрирования плоскостью. Для плоской Земли формула Стокса имеет вид [2, §§ 3.10—3.11]:

$$\zeta_{\text{м}}^{\text{гр}} = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{g-\gamma}{r} d\sigma, \tag{6}$$

где $\rho_0 = R\psi_0$ — радиус ближней круговой зоны в линейной мере, $d\sigma = rdrdA$ — элемент плоскости.

Началом координат является сама вычислительная точка M, полярные координаты r, A — радиус-вектор и азимут направления на текущую точку интегрирования, в которой должна быть известна смешанная аномалия $g-\gamma$ (рис. 5, *а*).

В прямоугольной системе координат, где ось x направлена на север, ось y — на восток, элемент плоской поверхности $d\sigma = dxdy$, и с учётом $r = \sqrt{x^2+y^2}$ формулу (6) можно переписать в виде:

$$\zeta_{\text{м}}^{\text{гр}} = \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g-\gamma}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy. \tag{7}$$

При численном интегрировании по формуле (7) дифференциалы dx и dy заменяют размерами сетки разбиения Δx, Δy, аномалию

силы тяжести $g-\gamma$ — ее средним значением $(g-\gamma)_{ij}$ на площадке $\Delta x \times \Delta y$, расстояние r заменяют расстоянием r_{ij} от точки вычисления M до центра соответствующей площадки (см. рис. 5), а двойной интеграл (7) — суммой:

$$\zeta_{\text{м}}^{\text{гр}} = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_i \sum_j \frac{(g-\gamma)_{ij}}{r_{ij}} \Delta x \Delta y.$$

При $\gamma = 980\,000$ мГал и $\frac{1}{2\pi\gamma} = 0{,}162 \cdot 10^{-6}$ 1/мГал, предыдущая формула примет вид:

$$\zeta_{\text{м}}^{\text{гр}} = 0{,}162 \cdot 10^{-6} \Delta x \Delta y \sum_i \sum_j \frac{(g-\gamma)_{ij}}{r_{ij}} \text{ м}, \qquad (8)$$

где Δx, Δy и r_{ij} выражены в километрах, $g-\gamma$ — в миллигалах.

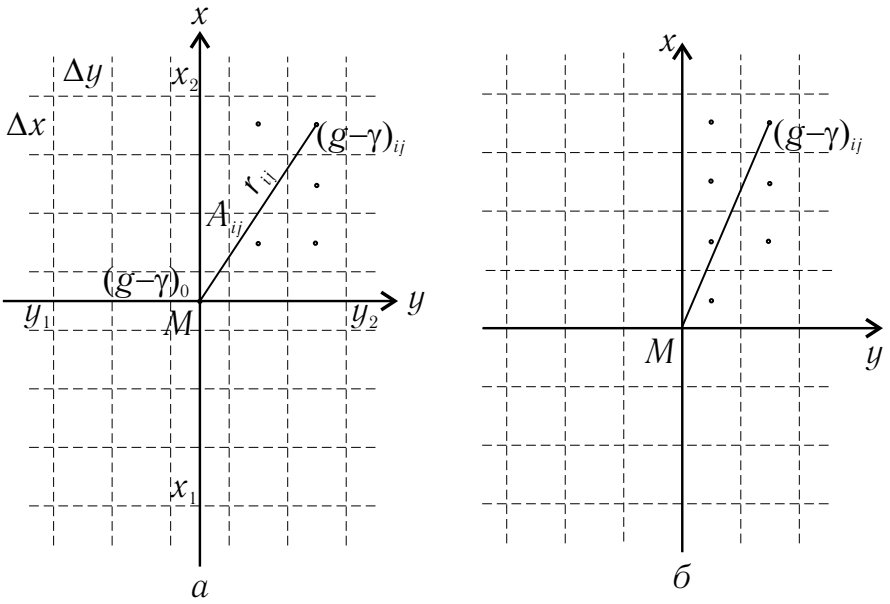


Рис. 5. Система координат в области интегрирования и разбивка области на прямоугольные ячейки

Формулу (8) нельзя использовать для вычисления влияния центральной площадки, поскольку в этом случае расстояние r_{ij} равно нулю. Для учета влияния этой площадки в [4] получена формула

$$\zeta_0 = 0{,}2805\frac{(g-\gamma)_0}{\gamma}(\Delta x + \Delta y) \text{ м},$$

где $(g-\gamma)_0$ — средняя аномалия силы тяжести в центральном квадрате.

При $\gamma = 980\,000$ мГал влияние центральной ячейки

$$\zeta_0 = 0{,}000\,286\,(g-\gamma)_0(\Delta x + \Delta y) \text{ м}, \tag{9}$$

где Δx и Δy выражены в километрах, а $(g-\gamma)_0$ — в миллигалах.

Центральной площадки не будет, если выбрать точку вычисления в пересечении координатных линий, как на рис. 5, *б*.

Размеры площадки $\Delta x \times \Delta y$ выбирают близкими к среднему шагу гравиметрической съёмки (2,7 км). Численное интегрирование аномалий силы тяжести надо выполнить на площади $20' \times 27'$, т. е. 37,0×40,6 км.

Разделите область интегрирования на ячейки, размеры которых примерно в полтора раза больше среднего расстояния между гравиметрическими пунктами. Для имеющейся съёмки удобны размеры ячеек $2'30'' \times 3'20''$, при этом:

$$\Delta x = 4{,}62 \text{ км}, \quad \Delta y = 5{,}01 \text{ км}, \quad \Delta x \times \Delta y = 23{,}1 \text{ км}^2.$$

Средняя сторона ячейки 4,8 км, средняя сторона области интегрирования 19,4 км (рис. 6). Всего ячеек 49, вычислительная точка располагается в центральной ячейке.

Формулы (7) и (8) с принятыми величинами Δx и Δy имеют вид

$$\zeta_{2,4}^{19,4} = 0{,}00375\sum_i\sum_j \frac{(g-\gamma)_{ij}}{r_{ij}} \text{ м}, \tag{10}$$

$$\zeta_0^{2,4} = 0{,}00278(g-\gamma)_0 \text{ м}. \tag{11}$$

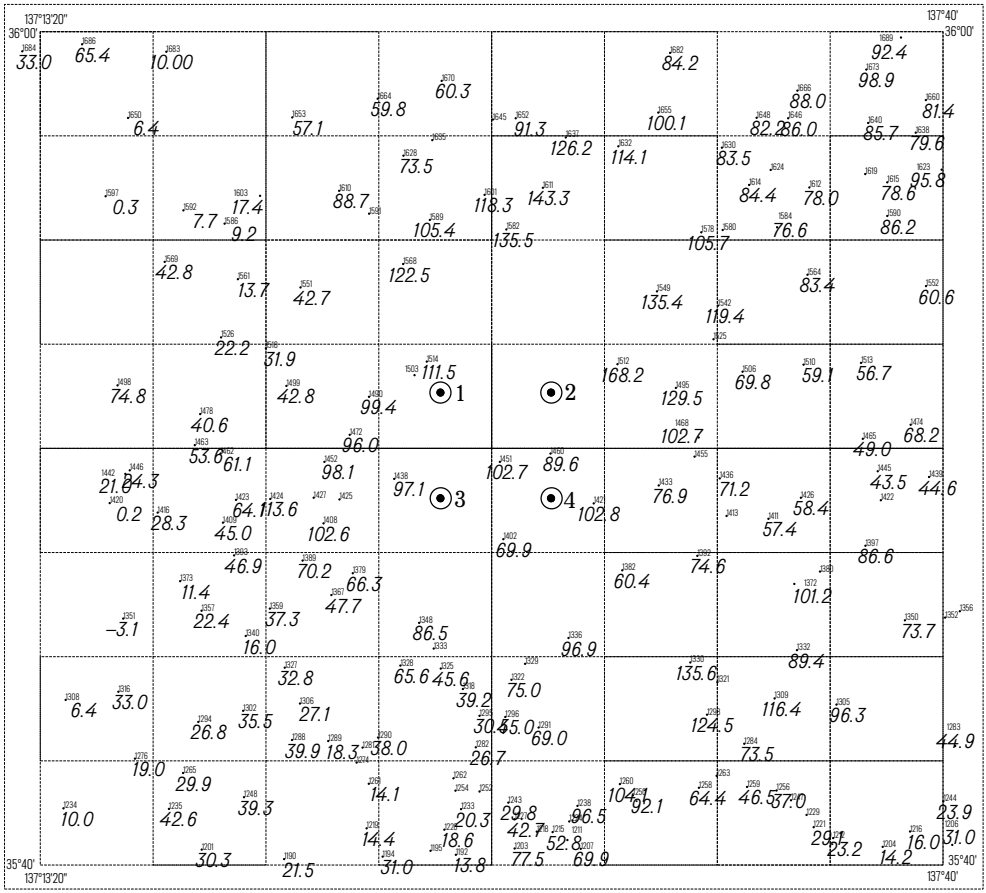


Рис. 6. Область интегрирования

Расстояния r_{ij} до 0,01 км даны в табл. 5. Ячейки для удобства пронумерованы с учётом их симметричного расположения относительно вычислительной точки.

Выбрав вычислительную точку и разделив область интегрирования на 49 ячеек, надо получить средние (до 1 мГал) аномалии в свободном воздухе в каждой ячейке.

Если в ячейке оказался один гравиметрический пункт, то считают, что этот пункт представительствует за всю ячейку, и аномалию на этом пункте принимают за среднее значение. Если в ячейке

Таблица 5. Номера ячеек и расстояния r_{ij} в км

1	*5*	*9*	*37*	*10*	*6*	*2*
20,48	17,14	14,79	13,92	14,79	17,14	20,48
13	*17*	*21*	*38*	*22*	*18*	*14*
17,66	13,65	10,54	9,28	10,54	13,65	17,66
25	*29*	*33*	*39*	*34*	*30*	*26*
15,73	11,04	6,83	4,64	6,83	11,04	15,73
43	*44*	*45*	*0*	*46*	*47*	*48*
15,04	10,02	5,01	0	5,01	10,02	15,04
27	*31*	*35*	*40*	*36*	*32*	*28*
15,73	11,04	6,83	4,64	6,83	11,04	15,79
15	*19*	*23*	*41*	*24*	*20*	*16*
17,66	13,65	10,54	9,28	10,54	13,65	17,66
3	*7*	*11*	*42*	*12*	*8*	*4*
20,48	17,14	14,79	13,92	14,79	17,14	20,48

находятся два или большее число пунктов, то осредняют значения аномалий. Если в ячейке нет ни одного пункта, то аномалии интерполируют на глаз между ближайшими окружающими пунктами. Эти аномалии выписывают в таблицы для каждой из четырёх вычислительных точек.

Расстояния от вычислительной точки до центров симметричных ячеек почти одинаковы. Таких ячеек на параллели и на меридиане точки по три пары (43, 48 и 37, 42; 38, 41 и 44, 47; 39, 40 и 45, 46), а в остальных случаях по четыре ячейки (например 1, 2, 3 ,4). Поэтому лучше умножать на $1/r_{ij}$ не каждую осреднённую аномалию силы тяжести, а сумму аномалий по четырём симметричным ячейкам. Эти суммы надо найти для каждой из четырёх вычислительных точек.

Получив величины $\frac{\sum(g-\gamma)_{ij}}{r_{ij}}$, надо вычислить двойные суммы и найти $\zeta_{2,4}^{19,4}$ по формуле (10) и $\zeta_0^{2,4}$ по формуле (11). Их сумма даст местную гравиметрическую аномалию высоты $\zeta_{\text{м}}^{\text{гр}}$:

$$\zeta_{\text{м}}^{\text{гр}} = \zeta_0^{2,4} + \zeta_{2,4}^{19,4}.$$

Убедитесь, что изменение аномалии высоты на расстояниях в несколько километров может превышать 0,1 м. Оцените существенный вклад центральной ячейки в результат.

Пример выполнения задания

Средние аномалии в свободном воздухе $(g-\gamma)$ (в ячейках $2'30'' \times 3'20''$) на рис. 7.

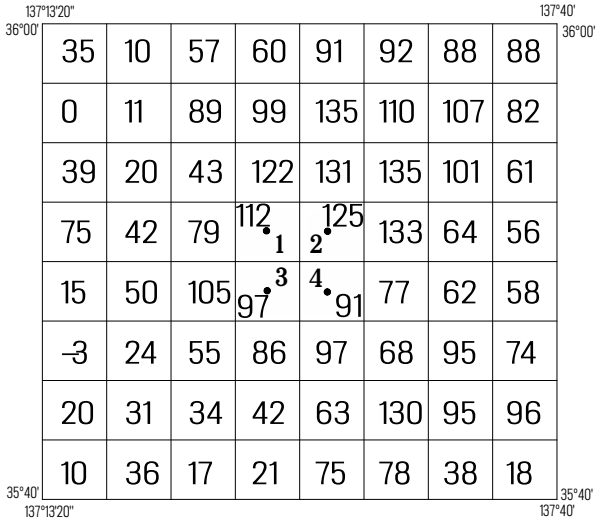


Рис. 7. Средние аномалии в свободном воздухе в ячейках

Суммы $\sum (g-\gamma)_{ij}$ аномалий в равноудалённых ячейках, мГал:

Точка 1
$\varphi = 35^\circ 51',25,$
$\lambda = 137^\circ 25',00$

238	263	245	102
199	213	376	185
217	282	370	219
139	175	204	112

Точка 2
$\varphi = 35^\circ 51',25,$
$\lambda = 137^\circ 28',33$

225	274	324	154
191	346	363	232
179	311	431	222
98	143	245	125

Точка 3
$\varphi = 35^\circ 48',75$,
$\lambda = 137^\circ 25',00$

155	235	316	120
255	316	271	164
231	267	356	198
77	127	196	97

Точка 4
$\varphi = 35^\circ 48',75$,
$\lambda = 137^\circ 28',33$

147	251	308	210
208	273	429	194
196	293	399	122
108	167	174	91

Оценка точности

Ошибка m_ζ аномалии высоты вычисляется по формуле:

$$m_\zeta^2 = C^2 \sum_i \sum_j \frac{m_{ij}^2}{r_{ij}^2},$$

где $C = \frac{1}{2\pi\gamma}\Delta x \Delta y = 0{,}162 \cdot 10^{-3} \Delta x \Delta y$ км^3/Гал.

Положим ошибку m_{ij} средней аномалии силы тяжести на всех площадках одинаковой и равной m, тогда

$$m_\zeta^2 = C^2 m^2 \sum_{ij} \frac{1}{r_{ij}^2}.$$

Примем в качестве ошибки m ошибку представительства E' аномалии [1, § 9.2]:

$$m \equiv E' = 0{,}24 \frac{\Delta x + \Delta y}{2} = 0{,}12 \cdot (\Delta x + \Delta y), \qquad (12)$$

где Δx и Δy в километрах. Для ошибки аномалии высоты получаем

$$m_{2,4}^{19,4} = 19{,}5 \cdot 10^{-6} (\Delta x + \Delta y) \Delta x \Delta y \sqrt{\sum \frac{1}{r_{ij}^2}} \text{ м}, \qquad (13)$$

Вычисление отношений $\frac{\sum(g-\gamma)_{ij}}{r}$ (в мГал/м) и слагаемых аномалии высоты по формуле (10)

	Точка 1				Точка 2			
	11,62	15,34	16,56	7,33	10,99	15,99	21,91	11,06
	11,27	15,60	35,67	19,94	10,82	25,35	34,44	25,00
	13,80	25,54	54,17	47,20	11,38	28,17	63,11	47,84
	9,24	17,46	40,71		6,52	14,27	48,90	
$\sum\sum\frac{(g-\gamma)_{ij}}{r}$	45,93	73,94	143,11	74,47	39,71	83,78	168,36	83,90
$0{,}00375\sum\sum\frac{(g-\gamma)_{ij}}{r}$	0,172	0,277	0,537	0,279	0,149	0,314	0,631	0,315
$\zeta_{2,4}^{19,4}$, м	1,265				1,409			

	Точка 3				Точка 4			
	7,57	13,71	21,37	8,62	7,18	14,64	20,82	15,09
	14,44	23,15	25,71	17,67	11,78	20,00	40,70	20,90
	14,68	24,18	52,12	42,67	12,46	26,54	58,42	47,84
	5,12	12,68	39,12		7,18	16,67	34,73	
$\sum\sum\frac{(g-\gamma)_{ij}}{r}$	41,81	73,72	138,32	68,96	38,6	77,85	154,67	83,83
$0{,}00375\sum\sum\frac{(g-\gamma)_{ij}}{r}$	0,157	0,276	0,519	0,257	0,145	0,292	0,580	0,314
$\zeta_{2,4}^{19,4}$, м	1,209				1,331			

Вычисление влияния аномалии в центральной ячейке по формуле (11)

	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4
$(g-\gamma)_0$, мГал	112	125	97	91
$0{,}00278(g-\gamma)_0$, м	0,311	0,347	0,270	0,253

Аномалии высоты

	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4
$\zeta_{2,4}^{19,4}$, м	1,265	1,409	1,209	1,331
$\zeta_0^{2,4}$, м	0,311	0,347	0,270	0,253
$\zeta_{\text{м}}^{\text{гр}}$, м	1,576	1,756	1,479	1,584

для центральной площадки:

$$m_0^{2,4} = 34{,}3 \cdot 10^{-6}(\Delta x + \Delta y)^2 \text{ м}, \tag{14}$$

тогда

$$m_\zeta = \sqrt{(m_{2,4}^{19,4})^2 + (m_0^{2,4})^2} \text{ м}.$$

Вычислите величины m, $m_{2,4}^{19,4}$, $m_0^{2,4}$ и m_ζ с принятыми значениями Δx и Δy. Величина $\sum \frac{1}{r_{ij}^2} = 0{,}39$ 1/км^2.

В нашем примере

$$m = E' = 1{,}2 \text{ мГал}; \qquad m_\zeta = 0{,}004 \text{ м}.$$

Задание 4. Вычисление составляющих уклонения отвеса

Вычислить составляющие уклонения отвеса.

Указания к выполнению задания

На основании формулы Гельмерта для астрономического нивелирования [3, § 50] по приращениям аномалии высоты можно найти приближенные средние величины уклонения отвеса θ. При небольших (несколько километров) расстояниях l между пунктами 2 и 1 величина θ в азимуте линии l

$$\theta \approx -\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{l},$$

точка 2 восточнее или севернее точки 1. Используем это выражение для оценки составляющих уклонения отвеса.

В нашем случае (см. карту на рис. 6) четыре вычислительные точки образуют прямоугольник с меридиональными сторонами

$$x_1 - x_3 = x_2 - x_4 = \Delta x = 4{,}62 \text{ км}$$

и долготными

$$y_2 - y_1 = y_4 - y_3 = \Delta y = 5{,}01 \text{ км}.$$

Поэтому дважды получим составляющие местного гравиметрического уклонения отвеса в плоскости меридиана

$$\xi_{1-3} = -\frac{\zeta_1 - \zeta_3}{\Delta x}, \qquad \xi_{2-4} = -\frac{\zeta_2 - \zeta_4}{\Delta x}.$$

и дважды — в плоскости первого вертикала

$$\eta_{2-1} = -\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\Delta y}, \qquad \eta_{4-3} = -\frac{\zeta_4 - \zeta_3}{\Delta y}.$$

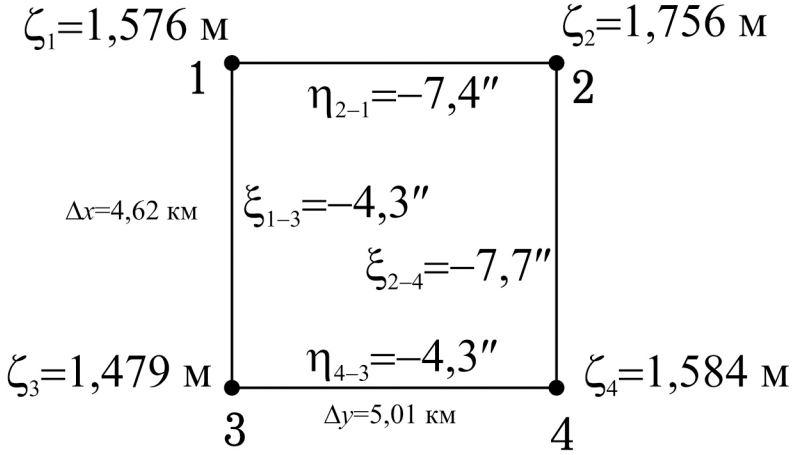


Рис. 8. Местное гравиметрическое уклонение отвеса

Пример вычислений

$$\xi_{1-3} = -\rho'' \frac{1{,}576 - 1{,}479}{4{,}62 \cdot 10^3} = -4{,}3'',$$

$$\xi_{2-4} = -\rho'' \frac{1{,}756 - 1{,}584}{4{,}62 \cdot 10^3} = -7{,}7'',$$

$$\eta_{2-1} = -\rho'' \frac{1{,}756 - 1{,}576}{5{,}01 \cdot 10^3} = -7{,}4'',$$

$$\eta_{4-3} = -\rho'' \frac{1{,}584 - 1{,}479}{5{,}01 \cdot 10^3} = \ -4{,}3'',$$

где $\rho'' = 206\,265''$.

Как видно на рис. 8, изменение уклонения отвеса на расстоянии несколько километров может составить несколько секунд дуги.

Внутривузовское издание

Подписано в печать 4.09.2017. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16 Бумага офсетная
Объем 3 усл. печ. л
Тираж 10 экз. Заказ № 90

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК