



В.И. Крылов

# КООРДИНАТНО-ВРЕМЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ГЕОДЕЗИИ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации  
по образованию в области геодезии и фотограмметрии  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки 21.05.01 — Прикладная геодезия  
с присвоением квалификации (степени) инженер-геодезист*

Москва  
Издательство МИИГАиК  
2014

УДК 521.9  
ББК 26.11  
К 85

**Рецензенты:**

Государственный университет по землеустройству  
(профессор, доктор техн. наук **В.Н. Баранов**);  
профессор, доктор техн. наук **С.Н. Яшкин** (МИИГАиК)

**Крылов В.И.**

**К 85** Координатно-временные преобразования в геодезии: учебное пособие –М.:  
Изд-во МИИГАиК, 2014. –90 с., ил.

ISBN 978-5-91188-057-6

Рассматриваются вопросы, связанные с преобразованием координат и времени: релятивистские системы координат и шкалы времени, всемирное, звёздное и атомное время, трёхмерные системы координат и их преобразование, равноденственные истинные и средние координаты, Гринвичские средние и мгновенные координаты, геодезические криволинейные и прямоугольные координаты, история создания и современная концепция развития Российской координатной основы, плоские прямоугольные координаты в проекции Гаусса–Крюгера.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности Прикладная геодезия, а также для других геодезических специальностей.

УДК 521.9  
ББК 26.11

ISBN 978-5-91188-057-6

© Крылов В.И., 2014  
© Издательство МИИГАиК, 2014

# ГЛАВА 1

## РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ШКАЛЫ ВРЕМЕНИ

### 1.1. Системы координат ICRS, ITRS и их практические реализации ICRF, ITRF

Положение, движение, а по существу, и любые физические процессы, происходящие в окружающем пространстве, связаны с системой отсчёта. Под системой отсчёта подразумевается система координат для указания места, где происходит точечное событие, вместе со связанными с этой системой координат часами для указания момента времени, когда происходит событие. Всякий физический процесс можно описать последовательностью точечных событий. Точечным событием называется событие, происходящее в некоторой точке пространства в некоторый момент времени. И всё же точечное событие — математическая абстракция. Реальное событие имеет некоторую протяжённость в пространстве и во времени.

Следует отметить, что рекомендации Международного астрономического союза (МАС) относительно систем координат и шкал времени, основанных на принципах общей теории относительности, были утверждены в виде резолюций на XXI Генеральной Ассамблее МАС в 1991 году и в том же году были подтверждены Международным союзом геодезии и геофизики [14].

В соответствии с резолюциями МАС выделяют две основные системы координат:

- 1) Международную небесную систему координат ICRS (International Celestial Reference System), в своей пространственной части являющуюся, по сути, эквивалентом инерциальной системы координат ньютоновой механики;

- 2) Международную земную систему координат ITRS (International Terrestrial Reference System).

Эти практически используемые системы рассматриваются как четырёхмерные релятивистские системы координат, связанные друг с

другом четырёхмерным релятивистским преобразованием Лоренца с дополнительным трёхмерным вращением.

Согласно основным положениям теории относительности промежутки времени не являются инвариантами при координатных преобразованиях. Темп течения времени различен и зависит от относительной скорости и разности гравитационных потенциалов в рассматриваемых точках. Если одну систему координат принять в качестве неподвижной, а другую систему координат связать с движущимся объектом, то время в неподвижной системе координат называется «координатным временем», а время на движущемся объекте называется «собственным временем».

По рекомендации Международного астрономического союза с 1991 года введены три релятивистские шкалы времени: TCB (Barycentric Coordinate Time); TCG (Geocentric Coordinate Time); TT (Terrestrial Time).

TCB — барицентрическое координатное время — время, которое показывали бы часы, будучи помещёнными в барицентр Солнечной системы. TCG — геоцентрическое координатное время — время, которое показывали бы часы, будучи помещёнными в центр масс Земли. TT — земное время — время, которое показывают часы, помещённые в любую точку на поверхности геоида.

Шкалами координатного времени в системах ICRS и ITRS служат, соответственно, барицентрическое координатное время TCB и геоцентрическое координатное время TCG.

С математической точки зрения система ICRS — это глобальная система координат, которая в своей пространственной части имеет начало в барицентре Солнечной системы. Эта система охватывает пространство, в котором Солнечная система рассматривается как изолированная система масс и где можно пренебречь влиянием гравитации и вращения нашей Галактики. ITRS — это локальная система координат, которая в своей пространственной части имеет начало в центре масс Земли и которая охватывает пространство в окрестностях нашей планеты.

Для связи систем ICRS и ITRS в соответствии с резолюцией Международного астрономического союза в 2000 году введена ещё одна, так называемая промежуточная система координат — геоцентрическая координатная система GCRS (Geocentric Celestial Reference System), у которой направление пространственных осей такое же, что

и у системы ICRS, а шкала координатного времени такая же, что и у системы ITRS.

Начало невращающейся геоцентрической системы координат GCRS совмещается с центром масс Земли, включая океаны и газовую оболочку. Ось аппликата совпадает со средней осью вращения Земли на стандартную эпоху J2000.0. Точка пересечения оси аппликата с вспомогательной небесной сферой называется небесным средним переходным полюсом. Его движение определяется прецессионно-нутационной теорией МАС 2000. Ось абсцисс направлена в среднюю точку весеннего равноденствия стандартной эпохи. Ось ординат дополняет систему до правой тройки векторов.

Начало вращающейся земной системы координат ITRS располагается в центре масс Земли, включая океаны и газовую оболочку. Ориентировка осей координат задается по данным Международной службы вращения Земли (МСВЗ) (IERS, International Earth Rotation Service) на эпоху 1984.0. Единицей длины является метр, определенный в локальной земной системе в смысле релятивистской теории гравитации.

Физическими реализациями этих систем координат являются, соответственно, Международная небесная система отсчёта ICRF (International Celestial Reference Frame) и Международная земная система отсчёта ITRF (International Terrestrial Reference Frame).

Для практической реализации этих систем координат используется известный в геодезии метод, когда системы координат задаются совокупностью значений координат реперных точек. Положение реперных точек определяется из наблюдений.

Система ICRF физически определяется координатами опорных квазаров, которые постоянны относительно шкалы времени TCB. Эту систему можно рассматривать как определяемую чисто экспериментальным путём из наблюдений квазаров методом радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ). В целях практического удобства основная плоскость ICRF выбирается близкой к положению среднего небесного экватора в эпоху J2000.0.

Для установления ICRF определены координаты 608 квазаров. Список из 608 квазаров, задающих ICRF, состоит из 212 определяющих объектов, положения которых на небесной сфере практически не подвержены изменениям и известны с высочайшей точностью — не хуже 0,3 mas (mas — миллисекунда дуги), 294 источников — кандидатов на

место определяющих и 102 квазаров, в положениях которых наблюдаются медленные изменения.

Распространением стандартной системы координат на яркие звёзды являются: каталог Гиппарха, содержащий 118218 звёзд; каталог Тихо, содержащий 1058332 звезды. Наблюдения звёзд были выполнены в ходе реализации космического эксперимента Гиппаркос на внеатмосферном телескопе, установленном на искусственном спутнике Земли. Согласование оптических наблюдений звёзд и радионаблюдений квазаров осуществлено по результатам наблюдений квазара 3C273 В в оптическом диапазоне длин волн.

Каталог космического эксперимента Гиппаркос и результаты лазерной локации Луны позволили оценить отличия двух предыдущих фундаментальных систем координат от Международной небесной опорной системы. Одна из предшествующих систем (звёздная) основана на каталоге FK5, а другая (динамическая) — на численной теории движения больших планет Солнечной системы и Луны (DE200/LE200), построенной на эпоху J2000.0.

Полус динамического экватора стандартной эпохи смещён относительно полюса ICRS на 17,1 mas в направлении  $12^{\text{h}}$  по прямому восхождению и на 5,1 mas в направлении  $18^{\text{h}}$  по прямому восхождению (рис. 1.1).

Отличия в положении полюса, задаваемого каталогом FK5, от полюса динамического экватора может быть оценено величиной  $\pm 50$  mas. Возможное положение полюса, задаваемого каталогом FK5, на рис. 1.1 показано в виде области, ограниченной окружностью.

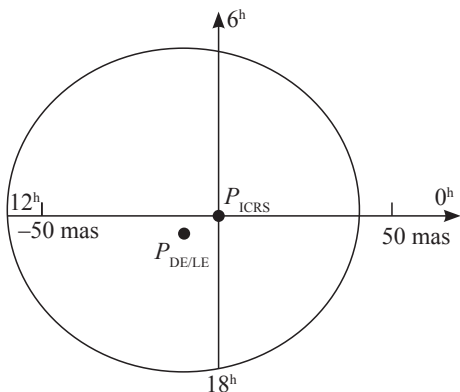


Рис. 1.1. Отличия в положениях полюсов

Начальная точка по прямому восхождению в эфемеридах планет смещена по отношению к направлению оси абсцисс небесной опорной системы на  $-78$  mas. Начальная точка каталога FK5 имеет смещение  $-22,9$  mas (рис. 1.2).

Система ITRF физически определяется положениями опорных наземных станций, координаты

наты которых постоянны (за вычетом тектонических движений, сезонных изменений и лунно-солнечных приливов) относительно релятивистской шкалы

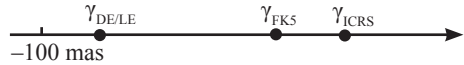


Рис. 1.2. Отличия в положениях начальных точек

времени TCG. Основной плоскостью этой системы является подвижный экватор даты, который определяется из экспериментальных данных.

Вывод ITRF основан на объединении координат более чем 200 станций МСВЗ и их скоростей движения, полученных из наблюдений такими средствами космической геодезии, как РСДБ; лазерная локация Луны и искусственных спутников Земли; GPS (с 1991 г.); доплеровская орбитографическая радиопозиционная интегрированная спутниковая система DORIS (с 1994 г.); микроволновая спутниковая система PRARE (с 1995 г.).

Международная земная система отсчёта ITRF реализуется путём построения закреплённой сети наземных пунктов с определёнными для каждого пункта координатами  $\vec{R}(t_0)$  и скоростями  $\dot{\vec{R}}(t_0)$  на некоторую эпоху  $t_0$ .

В настоящее время Международная земная система отсчета обозначается как ITRFuу, где уу — две последние цифры номера года образования системы. Поле скорости координатных систем ITRF не имеет вращения относительно геофизической модели движения тектонических плит. Для систем ITRF88–ITRF90 использовалась модель абсолютного движения литосферных блоков AM0-2, для ITRF91 и ITRF92 — модель NNR-NUVEL1, а начиная с ITRF93 используется модель NNR-NUVEL1A.

Положение каждого пункта в текущий момент времени  $t$  вычисляется по формуле

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(t_0) + \dot{\vec{R}}(t_0)(t - t_0) + \sum_i \Delta \vec{R}_i(t), \quad (1.1)$$

где  $\Delta \vec{R}_i(t)$  — поправочные члены, к которым относятся:

периодические лунно-солнечные приливы в твердой Земле, вызывающие смещения земной поверхности до 0,8 м;

деформации из-за океанических приливных нагрузок, которые могут достигать десятков миллиметров для станций вблизи континентального шельфа;



атмосферные нагрузки, являющиеся реакцией эластичной коры на изменяющееся во времени распределение атмосферного давления, по величине достигающие несколько миллиметров в вертикальном смещении станции;

последниковая отдача, наблюдаемая преимущественно в северных широтах как следствие ледникового периода. Влияние по высоте может доходить до нескольких миллиметров;

полюсный прилив, являющийся реакцией эластичной коры Земли на смещения полюса вращения. При амплитуде полярного движения порядка 10 м максимальное смещение достигает 10–20 мм.

Скорости тектонических движений могут достигать нескольких сантиметров в год. Если для некоторой станции скорость в ITRF еще не определена из наблюдений, то вектор скорости  $\dot{\vec{R}}(t_0)$  должен определяться как сумма скоростей по формуле

$$\dot{\vec{R}}(t_0) = \dot{\vec{R}}_{\text{plate}} + \dot{\vec{R}}_r, \quad (1.2)$$

где  $\dot{\vec{R}}_{\text{plate}}$  — скорость плиты, вычисляемая по модели движения тектонических плит NNR NUVEL1A;  $\dot{\vec{R}}_r$  — остаточная скорость.

Вектор линейной скорости  $\dot{\vec{R}}_{\text{plate}}$  вычисляется по скоростям  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  вращения плиты в декартовых координатах в соответствии с принадлежностью пункта к той или иной тектонической плите по формуле

$$\dot{\vec{R}}_{\text{plate}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \vec{R}(t_0). \quad (1.3)$$

В табл. 1 приведены угловые скорости вращения шестнадцати тектонических плит Земли [3].

Образованная в 1988 году Служба MCB3 выполняет регулярные решения ITRF и публикует их в IERS Annual Reports и в Technical Notes. Были получены десять версий с номерами 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 97 и 2000, каждая из которых превосходила своего предшественника по точности. Отсчетная основа ITRF88 была образована по 100 пунктам, из которых в 22 пунктах было установлено несколько инструментов. Сеть ITRF2000 содержит около 500 пунктов, в 101 из которых расположено по два и более инструментов. Для реализации ITRF2000 использовались

Т а б л и ц а 1

Угловые скорости вращения тектонических плит (в  $10^{-9}$  рад/год)

Название плиты	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_z$
Австралийская	7,839	5,124	6,282
Антарктическая	-0,821	-1,701	3,706
Аравийская	6,685	-0,521	6,760
Африканская	0,891	-3,099	3,922
Евразийская	-0,981	-2,395	3,153
Индийская	6,670	0,040	6,790
Карибская	-0,178	-3,385	1,581
Кокос	-10,425	-21,605	10,925
Наска	-1,532	-8,577	9,609
Ривера	-9,390	-30,960	12,050
Североамериканская	0,258	-3,599	-0,153
Скотиа	-0,410	-2,660	-1,270
Тихоокеаническая	-1,510	4,840	-9,970
Хуан де Фука	5,200	8,610	-5,820
Филиппинская	10,090	-7,160	-9,670
Южноамериканская	-1,038	-1,515	-0,870

трехлетние наблюдения РСДБ, лазерной локации спутников и Луны, GPS и DORIS. Поскольку различные методы наблюдений по-разному подходят для определения отдельных характеристик основы, то для установления масштаба была выбрана комбинация РСДБ и лазерной локации спутников. Ориентировка основы была согласована с предыдущей реализацией ITRF97, а скорость изменения ориентировки была выбрана по условию отсутствия вращения отсчетной основы по отношению к литосфере Земли [3]. Для этого скорость вращения была согласована с геологической тектонической моделью NNR-NUVEL-1A, а в совместном решении определение параметров изменения ориентировки производилось по пунктам, расположенным вдали от границ тектонических плит и зон деформации. Для привязки ITRF2000 к центру масс Земли были использованы лазерные наблюдения спутника Lageos. При обработке моделировалась только вековая эволюция центра масс Земли, но в будущих реализациях планируется также включать его периодические изменения.

Международную земную систему координат, отвечающую современным требованиям, удалось построить благодаря использованию новейших спутниковых технологий, которые вобрали в себя достижения геометрического и динамического методов космической геодезии, радиоэлектроники и вычислительной техники.

Международная служба вращения Земли определяет и ежегодно публикует данные и стандарты небесной и земной систем координат в соответствии с рекомендациями Международного астрономического союза и Международного союза геодезии и геофизики.

## 1.2. Четырёхмерная метрика в Солнечной системе

Квадрат инвариантного «расстояния» между двумя бесконечно близкими событиями в физическом четырёхмерном пространстве определяется общей квадратичной формой вида

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.4)$$

в которой  $g_{\mu\nu}$  — компоненты фундаментального ковариантного (индексы записаны внизу) метрического тензора, представляющие собой некоторые функции пространственных координат, обозначаемых  $x^1, x^2, x^3$  и временной координаты  $x^0$ . Здесь мы используем индексированное обозначение координатных осей, как это принято в теории относительности. Метрический тензор, который обозначают обычно так же, как и его компоненты, симметричен. Это означает, что его компоненты не меняются при перестановке местами индексов, т.е.  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . Индексы в выражении (1.4) пробегают независимо друг от друга значения 0, 1, 2, 3, причём по дважды повторяющимся индексам, записанным один вверху, а другой внизу, производится суммирование по умолчанию. Следовательно, в развёрнутом виде правая часть выражения (1.4) содержит десять слагаемых:

$$g_{00} dx^0 dx^0 + 2g_{01} dx^0 dx^1 + 2g_{02} dx^0 dx^2 + 2g_{03} dx^0 dx^3 + g_{11} dx^1 dx^1 + \\ + 2g_{12} dx^1 dx^2 + 2g_{13} dx^1 dx^3 + g_{22} dx^2 dx^2 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} dx^3 dx^3.$$

Величины  $g_{\mu\nu}$ , определяют все внутренние геометрические свойства в любой криволинейной системе координат и устанавливают, как говорят, метрику (геометрию) пространства-времени.

Нахождение  $g_{\mu\nu}$  в теории тяготения А. Эйнштейна осуществляется из решения уравнений гравитационного поля. В Солнечной системе, где гравитационное поле слабое (модуль гравитационного потенциала в любой точке Солнечной системы существенно меньше квадрата скорости света; например, на поверхности Солнца отношение модуля гравитационного потенциала к квадрату скорости света имеет порядок  $10^{-6}$ ), уравнения

гравитационного поля вне создающих поле масс можно записать в виде

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.5)$$

Левая часть уравнений (1.5) представляет собой симметричный тензор Риччи. Уравнения (1.5) справедливы для любой системы масс, однако, в дальнейшем мы будем иметь в виду гравитационное поле, создаваемое Солнцем и планетами. Несмотря на лаконичность записи, выражение (1.5) представляет собой систему из десяти дифференциальных уравнений второго порядка. В этом легко убедиться, имея в виду, что тензор Риччи связан с символами Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  и их производными по координатам выражением

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}, \quad (1.6)$$

а символы Кристоффеля, в свою очередь, зависят от компонентов метрического тензора и их производных по координатам следующим образом

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\sigma} + g_{\alpha\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\alpha}). \quad (1.7)$$

В выражениях (1.6) и (1.7) символом запятая обозначены обычные производные по координатам, например,  $g_{\alpha\nu,\sigma} \equiv \frac{dg_{\alpha\nu}}{dx^{\sigma}}$ .

На первый взгляд десяти уравнений гравитационного поля Эйнштейна (1.5) как раз хватает для однозначного нахождения десяти неизвестных величин  $g_{\mu\nu}$ . Однако имеют место четыре тождества Бианки

$$R_{\mu\rho;\tau}^{\alpha} + R_{\mu\sigma;\rho}^{\alpha} + R_{\mu\rho;\sigma}^{\alpha} = 0, \quad (1.8)$$

поэтому функционально независимых уравнений Эйнштейна остаётся только шесть [6]. Символ точка с запятой в тождествах (1.8) обозначает ковариантную производную по координатам. Например, ковариантная производная ковариантного тензора второго ранга записывается как  $T_{\mu\nu;\sigma} = T_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} T_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} T_{\mu\alpha}$ , а ковариантная производная ковариантного тензора с любым числом индексов составляется по правилу  $T_{\mu\nu\dots;\sigma} = T_{\mu\nu\dots,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}$  член для каждого индекса. Ковариантная производная контравариантного тензора второго ранга записывается как  $T_{;\sigma}^{\mu\nu} = T_{,\sigma}^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\nu} T^{\mu\alpha}$ , а ковариантная производная контравариантного тензора с любым числом индексов составляется по правилу  $T_{;\sigma}^{\mu\nu\dots} = T_{,\sigma}^{\mu\nu\dots} + \Gamma_{\sigma}^{\alpha}$  член для каждого индекса.

Для получения однозначного решения уравнений Эйнштейна при-

ходится накладывать четыре координатных условия.

Международный астрономический союз рекомендует с этой целью использовать следующие условия

$$(g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{, \nu} = 0, \quad (1.9)$$

удовлетворяющие требованиям гармоничности [8].

Здесь  $g^{\mu\nu}$  — контравариантный (индексы вверху) метрический тензор;  $g$  — определитель матрицы, составленной из компонентов ковариантного (индексы внизу) метрического тензора.

Приближённым решением (с точностью до  $c^{-2}$ ) уравнений (1.5) с учётом условий (1.9) является метрика вида [8]

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2V}{c^2} + \frac{2V^2}{c^4}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2V}{c^2}\right) [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \quad (1.10)$$

Здесь  $c = 299792458 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  — скорость света в вакууме;  $d\tau$  — элементарный промежуток собственного времени;  $V$  — гравитационный ньютоновский потенциал тяготения;  $dt$  — элементарный промежуток координатного времени.

В Солнечной системе гравитационное поле слабое, поэтому пространство является квазиевклидовым и пространственные координаты  $x^1, x^2, x^3$  очень близки к классическим декартовым координатам  $x, y, z$  [11].

Связь между элементарными промежутками координатного и собственного времени выводится из пространственно-временной метрики (1.10) и с достаточной точностью выражается формулой [4]:

$$d\tau = \left(1 - \frac{V}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt, \quad (1.11)$$

где  $v$  — скорость движущихся часов.

### 1.3. Связь промежутков барицентрического координатного времени ТСВ с промежутками геоцентрического координатного времени ТСГ

Для вывода приближённой формулы связи между промежутками времени, заданными в шкалах ТСВ и ТСГ, формулу (1.11) представим в виде

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mu_s}{c^2 r} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt, \quad (1.12)$$

где  $\mu_s = 1,32712438 \cdot 10^{20} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$  — гелиоцентрическая гравитационная постоянная (произведение гравитационной постоянной Кавендиша на массу Солнца);  $r$  — модуль радиус-вектора текущего гелиоцентрического положения Земли;  $v$  — орбитальная скорость Земли.

Если орбитальное движение точечной массы Земли считать невозмущённым и использовать интеграл энергии  $v^2 = \frac{2\mu_s}{r} - \frac{\mu_s}{A}$ , то выражение (1.12) можно переписать в виде

$$d\tau = \left( 1 - \frac{2\mu_s}{c^2 r} + \frac{\mu_s}{2c^2 A} \right) dt, \quad (1.13)$$

где  $A = 1,49597870 \cdot 10^{11} \text{ м}$  — астрономическая единица длины (большая полуось орбиты планеты с пренебрежимо малой массой, которая, двигаясь в гравитационном поле одного Солнца, имеет среднее угловое движение, точно равное  $0,01720209895$  радиан в сутки).

Используя разложение для отношения большой полуоси земной орбиты к модулю радиус-вектора [13]

$$\frac{A}{r} = 1 + \left( e - \frac{e^3}{8} \right) \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{9}{8} e^3 \cos 3M + \dots, \quad (1.14)$$

в котором  $e = 0,016726$  — эксцентриситет орбиты;  $M$  — текущее значение средней аномалии. Выражение (1.13) представим в форме

$$d\tau = \left( 1 - \frac{3\mu_s}{2c^2 A} \right) dt - \frac{2\sqrt{\mu_s A}}{c^2} \left[ \left( e - \frac{e^3}{8} \right) \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{9}{8} e^3 \cos 3M \right] dM. \quad (1.15)$$

При решении задач для объектов Солнечной системы принято считать момент синхронизации часов момент  $00^{\text{h}} 00^{\text{m}} 00^{\text{s}}$  TAI 1 января 1977 года (TAI — международное атомное время). Принимая в выражении (1.15) в качестве собственного времени  $\tau$  геоцентрическое координатное время TCG, а в качестве координатного времени  $t$  — барицентрическое координатное время TCB, после интегрирования уравнения (1.15) и подстановки численных значений констант, получим разность, выраженную в секундах времени, между промежутками барицентрического и геоцентрического координатного времени в виде

$$\text{TCB} - \text{TCG} = 1,27942 \cdot 10^{-3} (\text{JD} - 2443144,5) + 1,65844 \cdot 10^{-3} \sin(M - M_0), \quad (1.16)$$

где  $M_0$  — средняя аномалия Земли в момент  $0^{\text{h}} 00^{\text{m}} 00^{\text{s}}$  TAI 1 января 1977 г.; JD — юлианская дата, отсчитываемая по всемирному времени от полудня 1 января 4713 года до нашей эры.

Для вычисления юлианской даты можно воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} \text{JD} = & 17210135 + 367y - E\{7[y + E((m+9)/12)]/4\} + \\ & + E(275m/9) + d + (\text{UT1})^d, \end{aligned} \quad (1.17)$$

в которой  $E$  — целые части значений алгебраических выражений, стоящих в скобках;  $y$  — номер года;  $m$  — номер месяца в году;  $d$  — номер дня в месяце;  $(\text{UT1})^d$  — момент по всемирному времени, выраженный в долях суток.

#### 1.4. Связь промежутков геоцентрического координатного времени TCG с промежутками земного времени TT

Формулу связи геоцентрического координатного времени TCG с земным временем TT выведем из пространственно-временной метрики, записанной во вращающейся системе координат. Для этого рассмотрим две геоцентрические системы координат. Пусть одна из них жёстко связана с Землёй и вращается относительно оси аппликата, совпадающей с осью вращения Земли, с угловой скоростью  $\omega$ , а другая система координат — неподвижна (инерциальная, т.е. равноденственная система координат).

При выводе формулы для пространственно-временной метрики во вращающейся геоцентрической системе координат, сначала формулу (1.10) запишем в полярных координатах относительно невращающейся системы координат

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2V}{c^2}\right) (dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \cos^2 \phi d\alpha^2), \quad (1.18)$$

где  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\phi$  — модуль радиус-вектора, геоцентрическое прямое восхождение и геоцентрическая широта текущей точки соответственно.

Имея в виду, что геоцентрическая долгота  $\Lambda$  во вращающейся системе координат и геоцентрическое прямое восхождение  $\alpha$  в невращающейся системе координат, связаны между собой соотношением  $\alpha = \Lambda + S$ , в котором  $S$  — момент гринвичского звёздного времени, формула для пространственно-временной метрики в полярных координатах относительно вращающейся системы координат будет иметь вид

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2V}{c^2}\right) \times \\ & \times (dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \cos^2 \phi d\Lambda^2 + r^2 \cos^2 \phi dS^2 + 2r^2 \cos^2 \phi d\Lambda dS). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Формулу (1.19) можно записать приближённо в виде

$$ds^2 \cong \left( 1 - \frac{2V}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{r^2 \cos^2 \phi \omega^2}{c^2} - \frac{2r^2 \cos^2 \phi \omega}{c^2} \frac{d\Lambda}{dt} \right) c^2 dt^2. \quad (1.20)$$

Отсюда связь между элементарными промежутками координатного и собственного времени, учитывая связь  $ds = c d\tau$ , будет представляться следующим выражением:

$$d\tau = \left( 1 - \frac{V}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{r^2 \cos^2 \phi \omega^2}{2c^2} - \frac{r^2 \cos^2 \phi \omega}{c^2} \frac{d\Lambda}{dt} \right) dt. \quad (1.21)$$

Если часы неподвижны относительно геоида, формула (1.21) принимает вид

$$d\tau = \left( 1 - \frac{W_g}{c^2} \right) dt, \quad (1.22)$$

где  $W_g = V + \frac{r^2 \cos^2 \phi \omega^2}{2}$  — гравитационный потенциал силы тяжести на геоиде.

Численное значение потенциала силы тяжести на геоиде  $W_g = 62636856 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ , следовательно, собственное время часов, установленных в какой-нибудь точке на геоиде, отстаёт от координатного геоцентрического времени на 22 миллисекунды в год.

Примем в выражении (1.22) в качестве собственного времени  $\tau$  — земное время ТТ, связанное с международным атомным временем ТАИ соотношением

$$\text{ТТ} = \text{ТАИ} + 32,184^s, \quad (1.23)$$

а в качестве координатного времени  $t$  — геоцентрическое координатное время ТCG. Тогда после интегрирования (1.22) получим разность, выраженную в секундах, между геоцентрическим координатным и земным временем, отсчитываемую от  $0^{\text{h}} 00^{\text{m}} 00^{\text{s}}$  ТАИ 1 января 1977 г. и определяемую формулой

$$\text{ТCG} - \text{ТТ} = 6,0215 \cdot 10^{-5} (\text{JD} - 2443144,5). \quad (1.24)$$

## 1.5. Всемирное, звёздное и атомное время

Первоначально промежутки времени измеряли астрономическими методами. Основной астрономической единицей времени являются



сутки — промежуток времени, за который Земля делает один оборот вокруг своей оси относительно какой-либо избранной точки на небесной сфере. В зависимости от выбранной точки отсчета (точка весеннего равноденствия, центр видимого диска Солнца, «среднее экваториальное Солнце») сутки отличаются по длительности и имеют разное название.

Звездные сутки — промежуток времени между двумя последовательными одноимёнными кульминациями точки весеннего равноденствия на меридиане пункта земной поверхности. За начало звёздных суток принимается момент верхней кульминации точки весеннего равноденствия на меридиане данного пункта. Продолжительность звёздных суток составляет 86400 секунд звёздного времени.

Промежуток времени внутри суток от момента верхней кульминации точки весеннего равноденствия до данного момента называют звездным временем в данный момент. Местное звездное время  $s$  в пункте с долготой  $\lambda$  измеряется часовым углом  $t$  точки весеннего равноденствия  $\gamma$  относительно небесного меридиана данного пункта. Звёздное время, измеренное на данном меридиане, называется местным звёздным временем данного меридиана. Местное звездное время, измеренное на Гринвичском меридиане, называется гринвичским звездным временем и обозначается  $S$ . Звездное время можно выразить и в угловых единицах с учетом того, что за 1 час звёздного времени Земля поворачивается на  $15^\circ$ . Например, местному звездному времени  $s = 2$  ч 3 мин 1 с соответствует угол, равный  $30^\circ 45' 15''$ .

Для точных расчетов следует учитывать также, что ось вращения Земли совершает медленное периодическое колебательное движение, состоящее из прецессии (движение по конусу) и нутации (небольшие колебания оси). Если учитывается только прецессионное движение оси, то полученное звездное время называют средним и соответственно звездные сутки — средними. Если же учитывается прецессия и нутация, то получаем истинное звездное время и истинные звёздные сутки.

Истинные солнечные сутки — промежуток времени между двумя последовательными одноимёнными кульминациями центра видимого диска Солнца («истинного Солнца») на меридиане пункта земной поверхности. За начало истинных солнечных суток принимается момент нижней кульминации «истинного Солнца» на меридиане данного пункта. Продолжительность истинных солнечных суток составляет 86400 секунд истинного солнечного времени.

Вследствие непостоянства скорости движения Земли по орбите продолжительность истинных солнечных суток в течение года изменяется, поэтому в повседневной жизни за основную единицу солнечного времени принимают так называемые средние солнечные сутки.

Средние солнечные сутки — промежуток времени между двумя последовательными одноимёнными кульминациями «среднего экваториального Солнца» («среднее экваториальное Солнце» — фиктивная точка, равномерно перемещающаяся по небесному экватору и совершающая полный оборот за такое же время, как и истинное Солнце по эклиптике) на меридиане пункта земной поверхности. За начало средних солнечных суток принимается момент нижней кульминации «среднего экваториального Солнца» на меридиане данного пункта. Продолжительность средних солнечных суток составляет 86400 секунд среднего солнечного времени.

Интервал времени от момента нижней кульминации «среднего экваториального Солнца» называется средним солнечным временем. Продолжительность звёздных суток приблизительно на 4 мин короче продолжительности средних солнечных суток, а именно, 24 часа звездного времени (звёздные сутки) равны примерно 23 ч 56 мин 4,091 с (или 86 164,091 с) среднего солнечного времени.

Среднее солнечное время на Гринвичском меридиане составляет основу Всемирного времени UT (Universal Time). Это время содержит год, месяц, число, отсчитываемые по общепринятому Григорианскому календарю, а также час, минуту, секунду, отсчитываемые по гринвичскому среднему солнечному времени. Эта система отсчета времени введена Международным астрономическим союзом в 1928 году.

Так как движение полюсов Земли приводит к изменению положения меридианов, то по степени учета возмущающих факторов различают следующие разновидности шкалы Всемирного времени:

UT0 — шкала Всемирного времени, определяемого на основе текущих астрономических измерений относительно, так называемого, мгновенного положения Гринвичского меридиана (мгновенного положения полюса Земли);

UT1 — шкала всемирного времени среднего Гринвичского меридиана, рассчитанного с учетом движения полюсов. Время UT1 может быть получено путем коррекции шкалы UT0 на величину  $\Delta\lambda$ , вызванную движением полюсов Земли,  $UT1 = UT0 + \Delta\lambda$ ;

UT2 — шкала времени, учитывающая дополнительно сезонные поправки, связанные с сезонным изменением скорости вращения Земли;

UTR — шкала времени, учитывающая также поправки за океанические приливы и приливы в твердом теле Земли.

Из-за неравномерности суточного вращения Земли продолжительность звездных и солнечных суток изменяется. Для точных расчетов введено равномерно текущее время — так называемое Эфемеридное время (ЕТ). В 1952 году в Риме на VIII съезде МАС принято решение: «Рекомендуется во всех случаях, когда солнечная секунда неудовлетворительна как единица времени, вследствие её изменчивости, принимать за единицу времени секунду, определяемую как  $1/31556925,9747$  или  $1/(365,24219879 \cdot 86400)$  часть тропического года на момент фундаментальной эпохи таблиц Солнца Ньюкома; время, выраженное в этих единицах, рекомендуется обозначать как «эфемеридное время; оно считается от того момента вблизи начала календарного 1900 года, когда геометрическая средняя долгота Солнца, отнесённая к среднему равноденствию даты, была  $279^{\circ}41'48'',04$ , т.е. от момента, когда по Эфемеридному времени было точно 1900, январь 0,  $12^{\text{h}}$  (фундаментальная эпоха таблиц движения Солнца)».

Создание высокостабильных атомных эталонов частоты (времени) позволило перейти к физическому (неастрономическому) способу измерения времени и ввести искусственную единицу меры времени, не зависящую от особенностей суточного вращения Земли, — атомную секунду, которая близка по продолжительности к эфемеридной секунде. Атомная секунда принята в качестве единицы измерения времени XIII Генеральной конференцией по мерам и весам в 1967 году. Атомная секунда равна интервалу времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний, возникающих при квантовых переходах электронов на определённых энергетических уровнях атома Цезия-133. Атомная секунда является основой шкалы международного Атомного времени ТАИ. Нестабильность атомной шкалы составляет величину порядка  $1 \cdot 10^{-11}$  с и не связана с нерегулярностью вращения Земли. Атомная секунда принята в настоящее время за единицу времени в системе СИ (СИ) (вместо эфемеридной секунды).

В повседневной жизни используется так называемое Всемирное координированное время UTC. Это время измеряется по атомным часам, показания которых периодически корректируются. В Российской Фе-

дерации существует Государственный эталон времени UTC: UTC(SU), являющийся российской реализацией Всемирного координированного времени. Отличие между UTC и UTC(SU) не превышает  $\sim 100$  нс.

Моменты наблюдения, например, искусственного спутника Земли фиксируются обычно к шкале Всемирного координированного или согласованного времени UTC, являющегося аналогом атомного времени и единицей измерения которого служит секунда международной системы единиц SI. Согласованным же это время называется потому, что шкала UTC подстраивается к шкале всемирного времени UT1 путём пропуска или добавления лишней секунды в начале и/или в середине года, когда абсолютная величина разности между всемирным и всемирным согласованным временем приближается к  $0,9^s$ , то есть в течение года всегда соблюдается условие  $|UT1 - UTC| \leq 0,9^s$ .

При определении компонент геоцентрического радиус-вектора спутника  $\vec{r}_s$  в равноденственной геоцентрической системе координат динамическим методом космической геодезии приходится интегрировать дифференциальные уравнения движения спутника, независимой переменной в которых должно фигурировать геоцентрическое координатное время TCG.

При наблюдениях спутника с поверхности Земли и при последующей обработке этих наблюдений необходимо также знать угол поворота Земли, например, начального меридиана, относительно точки весеннего равноденствия. Этим углом поворота является часовой угол точки весеннего равноденствия, который служит мерой измерения гринвичского звёздного времени  $S$ .

Таким образом, при обработке наблюдений спутника надо располагать моментами наблюдений в шкале земного координатного времени TCG и в шкале гринвичского звёздного времени  $S$ . Для вычисления моментов наблюдения в этих шкалах времени при последующей обработке выполненных наблюдений спутника можно использовать регулярно издающиеся бюллетени (в нашей стране это бюллетени всемирного времени и координат полюса, выпускаемые Институтом времени и пространства ГП «ВНИИФТРИ»), в которых публикуется величина разности UTC – TAI, а также на начало каждых суток даётся разность UT1 – UTC.

Первая разность позволяет вычислить момент наблюдения в шкале международного атомного времени TAI по формуле

$$\text{TAI} = \text{UTC} - (\text{UTC} - \text{TAI}). \quad (1.25)$$

Затем по формуле (1.23) вычисляется момент земного времени ТТ и, наконец, по формуле (1.24) вычисляется момент времени в шкале TCG. С помощью второй разности можно воспроизвести UT1 на моменты наблюдения спутника

$$\text{UT1} = \text{UTC} + (\text{UT1} - \text{UTC}). \quad (1.26)$$

По моменту всемирного времени UT1 вычисляется момент Гринвичского истинного звёздного времени  $S$  по формуле

$$S = 6^{\text{h}}41^{\text{m}}50,54841^{\text{s}} + 8640184,812866^{\text{s}}t + 0,093104^{\text{s}}t^2 - 6,2^{\text{s}}10^{-6}t^3 + \text{UT1} + 0,06667\Delta\psi \cos \varepsilon, \quad (1.27)$$

где

$$t = ((\text{JD} - 2451545,0)) / 36525; \quad (1.28)$$

$t$  — промежуток времени в юлианских столетиях по 36525 средних солнечных суток, отсчитываемый от стандартной эпохи J2000.0 до рассматриваемого момента;  $\Delta\psi$  — нутация в долготе;  $\varepsilon$  — наклон эклиптики к экватору.

## ГЛАВА 2 ТРЕХМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

### 2.1. Прямоугольные и полярные координаты

В настоящее время наибольшее распространение при практическом использовании получили прямоугольные системы координат в трёхмерном пространстве, для задания которых необходимо указать положение начала, масштаб по осям координат и ориентировку осей.

В дальнейшем нам часто придётся пользоваться прямоугольными и полярными координатами, поэтому в качестве справочного материала напомним основные определения и соотношения между этими системами координат (рис. 2.1).

Плоскость  $Oxy$  называется основной плоскостью, а плоскость  $Oxz$  — начальной плоскостью прямоугольной системы координат. Положение точки  $s$  в прямоугольной системе координат задаётся её алгебраическими проекциями  $x_s, y_s, z_s$  на соответствующие оси. Положение той же точки можно задать полярными координатами:  $r$  — модулем радиус-вектора точки  $s$ ;  $\alpha$  — углом между осью  $Ox$  и проекцией радиус-вектора на основную плоскость;  $\beta$  — углом между основной плоскостью и радиус-вектором. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  в различных координатных системах имеют свои названия, но вводятся они, как правило, описанным выше способом. Переход от полярных координат к прямоугольным координатам осуществляется по формулам

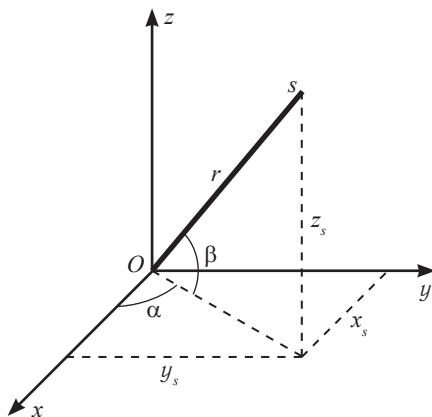


Рис. 2.1. Прямоугольные  $x_s, y_s, z_s$  и полярные  $r, \alpha, \beta$  координаты точки  $s$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $l, m, n$  — направляющие косинусы радиус-вектора.

Обратный переход от прямоугольных координат к полярным координатам можно выполнить по формулам, вытекающим из прямого преобразования (2.1)

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{m}{l}; \quad (2.2)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2}}; \quad (2.3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.4)$$

## 2.2. Преобразование координат посредством вращений

При решении тех или иных задач геодезии приходится использовать системы координат, различающиеся расположением начала систем координат (например, геоцентрические — начало в центре масс Земли, квазигеоцентрические — начало в окрестностях центра масс Земли, топоцентрические — начало в точке на поверхности Земли, спутникоцентрические — начало в центре масс спутника, барицентрические — начало в центре масс системы рассматриваемых тел и т.д.), ориентацией основной плоскости (например, экваториальные — основная плоскость параллельна плоскости экватора, горизонтные — основная плоскость параллельна плоскости математического горизонта, орбитальные — основная плоскость параллельна плоскости орбиты рассматриваемого тела), ориентацией начальной плоскости (например, гринвичские — начальная плоскость совпадает или параллельна плоскости гринвичского меридиана, равноденственные — начальная плоскость совпадает с плоскостью колюра равноденственных точек и т.д.), видом координатных систем (например, прямоугольные, полярные, сферические, сфероидические, цилиндрические и т.д.).

Пусть заданы координаты произвольного вектора  $\vec{r}$  в системе координат  $Ox_1y_1z_1$ . Требуется преобразовать эти координаты в систему

координат  $Ox_2y_2z_2$ , оси которой развёрнуты относительно осей системы  $Ox_1y_1z_1$ , начала же систем координат совпадают.

Разложение вектора по ортонормированным базисам в каждой из рассматриваемых систем координат можно представить в виде

$$x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2 = \vec{r} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_2 & \vec{j}_2 & \vec{k}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} (\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

предыдущее выражение можно преобразовать к виду:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} (\vec{i}_1 \quad \vec{j}_1 \quad \vec{k}_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_2\vec{i}_1 & \vec{i}_2\vec{j}_1 & \vec{i}_2\vec{k}_1 \\ \vec{j}_2\vec{i}_1 & \vec{j}_2\vec{j}_1 & \vec{j}_2\vec{k}_1 \\ \vec{k}_2\vec{i}_1 & \vec{k}_2\vec{j}_1 & \vec{k}_2\vec{k}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x_2x_1) & \cos(x_2y_1) & \cos(x_2z_1) \\ \cos(y_2x_1) & \cos(y_2y_1) & \cos(y_2z_1) \\ \cos(z_2x_1) & \cos(z_2y_1) & \cos(z_2z_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Из выражения (2.5) следует, что для осуществления преобразования, нужно располагать девятью направляющими косинусами (параметрами преобразования). Однако между направляющими косинусами, входящими в формулу (2.5), имеют место следующие шесть зависимостей:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1; & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0; \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1; & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0; \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1; & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned}$$



Это означает, что из девяти величин независимыми являются только три. И, таким образом, элементы матрицы преобразования можно выразить через три независимых параметра. В качестве этих трёх независимых величин используют углы, которые можно ввести различными способами. Если ввести три независимых угла, то задача по преобразованию координат сводится к трём поворотам одной из систем координат до полного совпадения её осей со второй системой координат.

Напомним вид матриц вращения  $R_i(\alpha)$ , которые образуются при поворотах против хода часовой стрелки (если смотреть с положительного конца оси, вокруг которой происходит вращение) относительно каждой из трёх осей координат на произвольный угол  $\alpha$ .

При повороте вокруг оси абсцисс ( $i=1$ ) матрица вращения имеет вид

$$R_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

При повороте вокруг оси ординат ( $i=2$ ) матрица вращения имеет вид

$$R_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

При повороте вокруг оси аппликат ( $i=3$ ) матрица вращения имеет вид

$$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим различные углы вращения, а именно: углы Эйлера и углы Кардано.

### 2.3. Преобразование прямоугольных координат с использованием углов Эйлера

Три угла Эйлера вводятся следующим образом (рис. 2.2):  $\psi$  — угол между осью  $Ox_1$  и линией пересечения основных плоскостей рассматриваемых систем координат;  $\theta$  — угол между основными плоскостями

ми или, что, то же самое, угол между осями аппликат  $Oz_1$  и  $Oz_2$ ;  $\varphi$  — угол между линией пересечения основных плоскостей и осью  $Ox_2$ .

Преобразование координат точки, заданной в системе координат  $Ox_1y_1z_1$ , к координатам той же самой точки в системе координат  $Ox_2y_2z_2$  осуществляется посредством трёх последовательных поворотов вокруг соответствующих координатных осей. Первый поворот вокруг оси аппликат  $Oz_1$  на угол  $\psi$ , второй поворот вокруг новой оси абсцисс на угол  $\theta$ , третий поворот вокруг оси аппликат  $Oz_2$  на угол  $\varphi$ . Математически это преобразование описывается следующими формулами

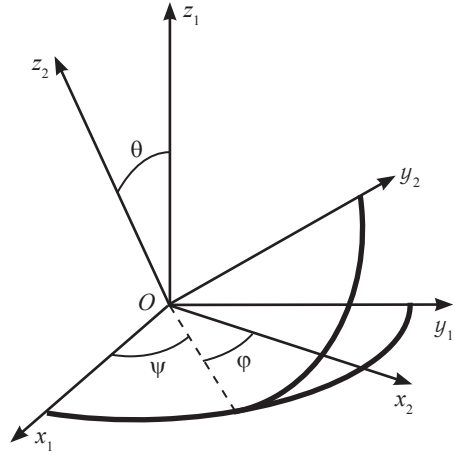


Рис. 2.2. Углы Эйлера

описывается следующими формулами

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = R_3(\varphi)R_1(\theta)R_3(\psi) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \quad (2.6)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} & \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} & \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} & \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Параметры преобразования  $a_{11} \dots a_{33}$  в (2.7) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta; \\ a_{12} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta; & a_{13} &= \sin \varphi \sin \theta; \\ a_{21} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta; \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta; & a_{23} &= \cos \varphi \sin \theta; \\ a_{31} &= \sin \psi \sin \theta; & a_{32} &= -\cos \psi \sin \theta; & a_{33} &= \cos \theta. \end{aligned}$$

В уравнении (2.6)  $A$  — матрица вращения (определитель этой матрицы равен единице,  $\det A = 1$ ), следовательно, обратный переход осуществляется транспонированием матрицы  $A$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

При малых углах Эйлера матрицу преобразования можно записать приближённо:

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & \psi + \varphi & 0 \\ -(\psi + \varphi) & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

## 2.4. Преобразование прямоугольных координат с использованием углов Кардано

Преобразование координат точки, заданной в системе координат  $Ox_1y_1z_1$ , к координатам той же самой точки в системе координат  $Ox_2y_2z_2$  осуществляется посредством трёх поворотов: первый поворот вокруг оси  $Oz_1$  на угол  $\varepsilon_z$ , второй поворот вокруг новой оси  $Oy'$  на угол  $\varepsilon_y$  и, наконец, третий поворот вокруг оси  $Ox_2$  на угол  $\varepsilon_x$ .

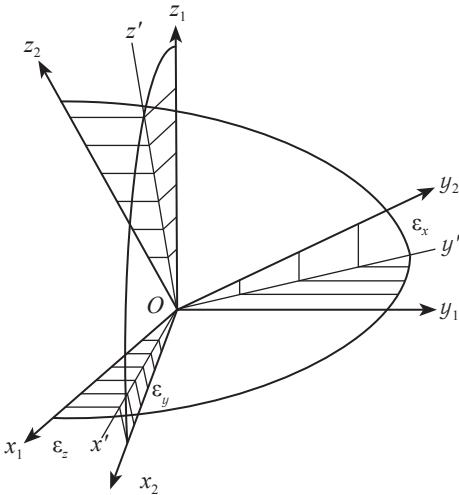


Рис. 2.3. Углы Кардано

Углы Кардано (рис. 2.3)

вводятся следующим образом:

$\varepsilon_z$  — угол между осью  $Ox_1$  и осью  $Ox'$ ;

$\varepsilon_y$  — угол между осью  $Ox'$  и осью  $Ox_2$ ;

$\varepsilon_x$  — угол между осью  $Oy'$  и осью  $Oy_2$ .

Математически преобразование координат точки, заданной в системе координат  $Ox_1y_1z_1$ , к координатам той же самой точки в системе координат  $Ox_2y_2z_2$  записывается следующим образом

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = R_1(\varepsilon_x)R_2(\varepsilon_y)R_3(\varepsilon_z) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$  и элементы  $b_{11} \dots b_{33}$  которой имеют вид:

$$b_{11} = \cos \varepsilon_y \cos \varepsilon_z; \quad b_{12} = \cos \varepsilon_y \sin \varepsilon_z; \quad b_{13} = -\sin \varepsilon_y;$$

$$b_{21} = \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_z - \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_z;$$

$$b_{22} = \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z + \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_z; \quad b_{23} = \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y;$$

$$b_{31} = \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_z + \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_z;$$

$$b_{32} = \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z - \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_z; \quad b_{33} = \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_y.$$

Обратный переход осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

При малых углах Кардано матрица преобразования принимает вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

## ГЛАВА 3 НЕБЕСНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

### 3.1. Равноденственные истинные и средние координаты

Положение внешней по отношению к Земле точки пространства (например, положение ИСЗ) удобно задавать в равноденственной (небесной) геоцентрической системе координат. Начало истинной равноденственной геоцентрической системы координат совмещается с центром масс Земли, ось аппликат  $O\tilde{z}$  направлена по мгновенной оси вращения Земли на данный момент времени, ось абсцисс  $O\tilde{x}$  направлена в истинную точку весеннего равноденствия  $\tilde{\gamma}$ , ось ординат  $O\tilde{y}$  дополняет систему до правой тройки векторов. Положение внешней точки (спутника) можно задать её алгебраическими проекциями на оси системы координат  $\tilde{x}_s, \tilde{y}_s, \tilde{z}_s$  или же полярными координатами  $\tilde{r}_s, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\delta}_s$  ( $\tilde{r}_s$  — геоцентрическое расстояние до точки  $s$ ;  $\tilde{\alpha}_s, \tilde{\delta}_s$  — истинные

геоцентрические прямое восхождение и склонение точки  $s$ ).

Наряду с истинной равноденственной геоцентрической системой координат используются также истинные равноденственные топоцентрические системы координат, отличающиеся от геоцентрической системы только положением начала, которое совмещается с пунктом земной поверхности  $i$  (рис. 3.1), оси же топоцентрических систем координат параллельны соответствующим осям геоцентрической системы. Положение точки  $s$  в топоцентрической

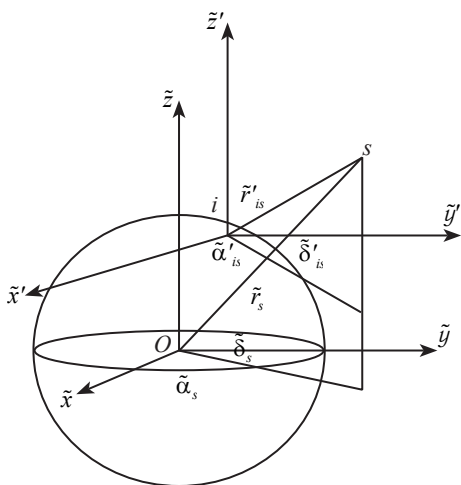


Рис. 3.1. Истинные равноденственные геоцентрическая  $\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$  и топоцентрическая  $\tilde{x}' \tilde{y}' \tilde{z}'$  системы координат

системе задаётся истинными равноденственными прямоугольными координатами  $\tilde{x}'_{is}, \tilde{y}'_{is}, \tilde{z}'_{is}$  либо истинными полярными координатами  $\tilde{\alpha}'_{is}, \tilde{\delta}'_{is}, \tilde{r}'_{is}$ .

Гравитационное воздействие на Землю со стороны Луны, Солнца, больших планет Солнечной системы приводит с течением времени к изменению ориентировки в пространстве осей истинной равноденственной системы координат. При этом перемещение истинного полюса Мира  $\tilde{p}$  (это точка пересечения мгновенной оси вращения Земли с вспомогательной геоцентрической небесной сферой) по поверхности вспомогательной небесной сферы описывает сложную траекторию. Положение истинного полюса Мира на вспомогательной небесной сфере задаётся принятой прецессионно-нутационной теорией, его называют ещё Небесным эфемеридным полюсом (рекомендации МАС 1997 г.). Исторически сложилось так, что из этого сложного движения выделяют равномерное движение фиктивной точки  $p$ , называемой средним полюсом Мира, по малому кругу вокруг полюса эклиптики  $R_0$  и колебательное движение истинного полюса Мира относительно движущегося среднего полюса Мира. Равномерное движение среднего полюса Мира называется лунно-солнечным прецессионным движением (прецессия открыта во втором веке до нашей эры Гиппархом) и происходит с периодом около 26 000 лет. Перемещение среднего полюса приводит к изменению положения среднего экватора, а значит, и средней точки весеннего равноденствия, которая смещается вдоль эклиптики со скоростью 50,39" в год.

На лунно-солнечную прецессию накладывается ещё прецессия от планет, вызывающая вековое движение плоскости эклиптики. Точка весеннего равноденствия перемещается при этом вдоль экватора со скоростью 0,11" в год. Периодическое движение истинного полюса Мира относительно среднего полюса Мира называется нутационным движением или просто нутацией (нутация открыта в XVIII веке Брадлеем). Период главного члена нутации совпадает с периодом обращения лунных узлов и составляет около 19 лет.

Международный астрономический союз рекомендовал, начиная с 1.01.2003 г. модель прецессии–нутаации МАС 2000А, основанную на передаточной функции Мэтьюза, Херринга и Баффета [16], в тех случаях, когда необходима точность 0,2 mas или её укороченную версию МАС 2000В для вычислений на уровне точности порядка 1 mas.

Признавая, что определение небесного эфемеридного полюса не принимает во внимание суточные и более высокочастотные вариации ориентации Земли, Международный астрономический союз в 2000 году рекомендовал небесным промежуточным полюсом (*Celestial Intermediate Pole, CIP*) называть полюс, положение которого в геоцентрической небесной опорной системе отсчета (*GCRS*) задается движением тиссерановых средних осей Земли с периодами, большими двух суток.

Направление небесного промежуточного полюса в стандартную эпоху J2000.0 смещено от направления полюса геоцентрической небесной опорной системы отсчета в полном соответствии с моделью прецессии-нутаии MAC 2000A.

Движение небесного промежуточного полюса в геоцентрической небесной опорной системе отсчета представляется моделью прецессии-нутаии MAC 2000A для прецессии и вынужденной нутаии с периодами, большими двух суток, и добавлением поправок, зависящих от времени и определяемых Международной службой вращения Земли на основе астрономических и геодезических наблюдений.

Положение небесного промежуточного полюса в Международной земной опорной системе отсчета (*ITRS*) определяется Международной службой вращения Земли на основе соответствующих астрономических и геодезических наблюдений и моделей, включающих в себя вариации высокой частоты.

Вынужденная нутаия с периодами менее, чем двое суток включается в модель движения небесного промежуточного полюса в Международной земной опорной системе отсчета. Понятие небесного эфемеридного полюса выходит из употребления.

Нутаию раскладывают на две составляющие: нутаию в долготе и в наклонности. Нутаия в долготе  $\Delta\psi$  и в наклонности  $\Delta\epsilon$  представляется в виде рядов [17]:

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^N (A_i + A_i' t) \sin \left( \sum_{j=1}^5 k_j F_j \right) + (A_i'' + A_i''' t) \cos \left( \sum_{j=1}^5 k_j F_j \right); \quad (3.1)$$

$$\Delta\epsilon = \sum_{i=1}^N (B_i + B_i' t) \cos \left( \sum_{j=1}^5 k_j F_j \right) + (B_i'' + B_i''' t) \sin \left( \sum_{j=1}^5 k_j F_j \right). \quad (3.2)$$

Величины  $l, l', F, D, \Omega$  называются фундаментальными аргументами Делоне, и в соответствии с моделью прецессии-нутаии MAC 2000,

вычисляются по формулам, полученным Симоном [17]:

$$F_1 \equiv l = 134,96340251^\circ + 1717915923,2178''t + 31,8792''t^2 + \\ + 0,051635''t^3 - 0,00024470''t^4;$$

$$F_2 \equiv l' = 357,52910918^\circ + 129596581,0481''t - 0,5532''t^2 + \\ + 0,000136''t^3 - 0,00001149''t^4;$$

$$F_3 \equiv F = 93,272090062^\circ + 1739527262,8478''t - 12,7512''t^2 - \\ - 0,001037''t^3 + 0,00000417''t^4;$$

$$F_4 \equiv D = 297,85019547^\circ + 1602961601,2090''t - 6,3706''t^2 + \\ + 0,006593''t^3 - 0,00003169''t^4;$$

$$F_5 \equiv \Omega = 125,04455501^\circ - 6962890,5431''t + 7,4722''t^2 + \\ + 0,007702''t^3 - 0,00005939''t^4.$$

Здесь  $t$  вычисляется по формуле (1.28) и выражено в юлианских столетиях, отсчитанных от эпохи  $J2000.0 = JD2451545,0 = 2000$  январь 1,5 ТСВ;  $k_1, \dots, k_5$  — целые числа;  $l, l'$  — средние аномалии Луны и Солнца;  $F$  — аргумент широты Луны;  $D$  — средняя элонгация Луны от Солнца (разность между средними долготами Луны и Солнца);  $\Omega$  — средняя долгота восходящего узла лунной орбиты на эклиптике, измеряемая от среднего равноденствия даты.

Разложения МАС 2000А включают 1365 членов (678 лунно-солнечных и 687 планетных). Сокращённая версия нутации МАС 2000В развита Мак Карти и Лузам [17]. Она включает 78 лунно-солнечных членов с учётом влияния планетных членов. В табл. 2 приводятся лишь главные члены для вычисления лунно-солнечной нутации. В первых пяти графах даны коэффициенты перед фундаментальными аргументами, в остальных — значения для амплитуд и их временных вариаций в миллисекундах дуги и миллисекундах дуги в столетие соответственно.

Для уяснения общего характера перемещения истинного полюса Мира можно ввести подвижную плоскую систему координат  $xy$ , начало которой совпадает с положением среднего полюса Мира, ось  $x$  направлена по касательной к кругу эклиптических широт с положительным направлением в сторону убывания эклиптических широт, а ось  $y$  — по касательной к малому кругу движения среднего полюса Мира с положительным направлением в сторону уменьшения эклиптических долгот. Тогда координаты истинного полюса Мира  $\tilde{p}$  относительно



## Лунно-солнечная нутация

$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$A_i$	$A'_i$	$B_i$	$B'_i$	$A''_i$	$A'''_i$	$B''_i$	$B'''_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
				1	-17206,4161	-17,4666	9205,2331	0,9086	3,3386	0,0029	1,5377	0,0002
		2	-2	2	-1317,0906	-0,1675	573,0336	-0,3015	-1,3696	0,0012	-0,4587	-0,0002
		2		2	-227,6413	-0,0234	97,8459	-0,0485	0,2796	0,0002	0,1374	-0,0001
				2	207,4554	0,0207	-89,7492	0,0470	-0,0698	0,0000	-0,0291	0,0000
	1				147,5877	-0,3633	7,3871	-0,0184	1,1817	-0,0015	-0,1924	0,0005
	1	2	-2	2	-51,6821	0,1226	22,4386	-0,0677	-0,0524	0,0002	-0,0174	0,0000
1					71,1159	0,0073	-0,6750	0,0000	-0,0872	0,0000	0,0358	0,0000
		2		1	-38,7298	-0,0367	20,0728	0,0018	0,0380	0,0001	0,0318	0,0000
1		2		2	-30,1461	-0,0036	12,9025	-0,0063	0,0816	0,0000	0,0367	0,0000
	-1	2	-2	2	21,5829	-0,0494	-9,5929	0,0299	0,0111	0,0000	0,0132	-0,0001

среднего полюса Мира  $p$  в этой системе координат можно вычислить по формулам

$$x = \Delta\varepsilon; \quad y = \Delta\psi \sin \varepsilon.$$

Учтя в разложении нутации только первые члены, получим формулу, описывающую так называемый брадлеев эллипс:

$$\frac{x^2}{9,20^2} + \frac{y^2}{6,86^2} = 1.$$

Это означает, что истинный полюс Мира перемещается по подвижному брадлееву эллипсу, центр которого совпадает с движущимся средним полюсом Мира. Схематические траектории движения среднего и истинного полюсов Мира представлены на рис. 3.2.

Начало геоцентрической средней равноденственной системы координат совмещается с центром масс Земли, ось аппликат  $z$  направлена

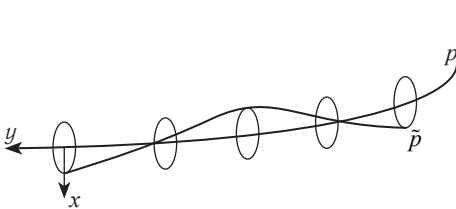


Рис. 3.2. Траектории движения среднего  $p$  и истинного  $\tilde{p}$  полюсов Мира

в положение среднего полюса Мира на данный момент времени, ось абсцисс  $x$  направлена в среднюю точку весеннего равноденствия  $\gamma$ , ось ординат  $y$  дополняет систему до правой тройки векторов. Положение внешней точки (спутника) мож-

но задать её алгебраическими проекциями на оси системы координат  $x_s, y_s, z_s$  или же полярными координатами  $r_s, \alpha_s, \delta_s$  ( $r_s$  — геоцентрическое расстояние до точки  $s$ ,  $\alpha_s, \delta_s$  — средние геоцентрические прямое восхождение и склонение точки  $s$ ).

Наряду со средней равноденственной геоцентрической системой координат используются также средние равноденственные топоцентрические системы координат, отличающиеся от средней геоцентрической системы только положением начала, которое совмещается с пунктом земной поверхности, оси же топоцентрических систем координат параллельны соответствующим осям геоцентрической системы. Положение точки  $s$  в топоцентрической системе задаётся равноденственными средними прямоугольными координатами  $x'_{is}, y'_{is}, z'_{is}$  либо средними полярными координатами  $\alpha'_{is}, \delta'_{is}, r'_{is}$ .

### 3.2. Движение экватора и эклиптики вследствие прецессии и нутации

Перемещения экватора и эклиптики с течением времени под влиянием прецессии и нутации схематично показаны на рис. 3.3.

Пусть в эпоху  $t_0$  (для определённости будем считать, что эпоха  $t_0$  соответствует стандартной эпохе J2000.0) средний экватор занимает положение  $\varepsilon'_0 \varepsilon_0$ , начальная эклиптика занимает положение  $E'_0 E_0$ . Точка пересечения среднего экватора и начальной эклиптики называется

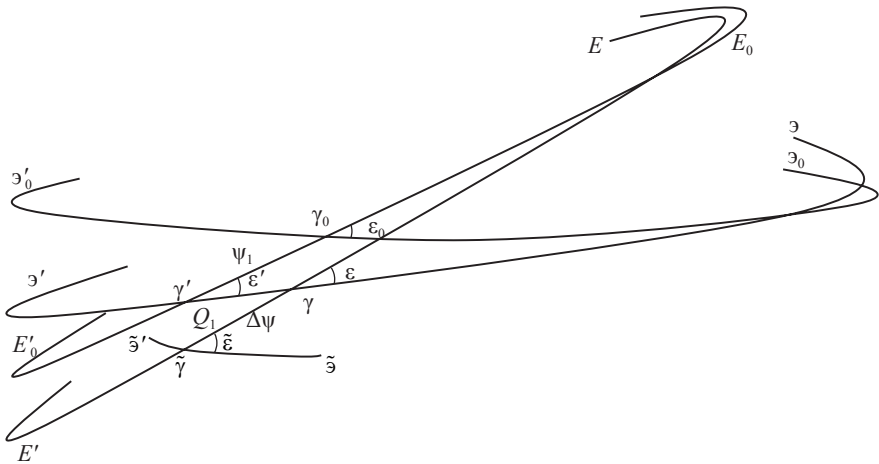


Рис. 3.3. Перемещения экватора и эклиптики из-за прецессии и нутации

средней точкой весеннего равноденствия в эпоху  $t_0$ . При этом угол наклона  $\varepsilon_0$  называется средним наклоном эклиптики к экватору в эпоху  $t_0$ .

Под влиянием лунно-солнечной прецессии средний экватор изменит своё положение и в эпоху  $t$  переместится в положение  $\varepsilon' \varepsilon'$ . В современной терминологии это перемещение называется прецессией экватора. Точка пересечения среднего экватора эпохи  $t$  и начальной эклиптики эпохи  $t_0$  есть средняя точка весеннего равноденствия  $\gamma'$ . Угол наклона  $\varepsilon'$  называется лунно-солнечным наклоном, и он слегка отличается от среднего наклона  $\varepsilon_0$  эклиптики к экватору в эпоху  $t_0$ . Из-за прецессии экватора точка весеннего равноденствия перемещается вдоль начальной эклиптики на величину  $\psi_1 = 50,39''(t-t_0)$ , здесь  $(t-t_0)$  выражено в годах.

Под влиянием планетной прецессии начальная эклиптика сместится и в эпоху  $t$  займёт положение  $E'E$ . Ныне такое перемещение называется прецессией эклиптики. Эклиптика  $E'E$  называется подвижной эклиптической. Точка пересечения среднего экватора и подвижной эклиптики эпохи  $t$  есть средняя точка весеннего равноденствия  $\gamma$  в эпоху  $t$ . Угол наклона  $\varepsilon$  подвижной эклиптики к среднему экватору называется средним наклоном в эпоху  $t$ . Из-за прецессии эклиптики точка весеннего равноденствия перемещается вдоль среднего экватора на величину  $Q_1 = 0,11''(t-t_0)$ . В эпоху  $t$  из-за влияния нутации истинный экватор займёт положение  $\tilde{\varepsilon}' \tilde{\varepsilon}'$ .

Точка пересечения истинного экватора и подвижной эклиптики называется истинной точкой весеннего равноденствия в эпоху  $t$ . При этом угол наклона  $\tilde{\varepsilon}$  называется истинным наклоном эклиптики к экватору в эпоху  $t$ . Составляющие нутации в долготе  $\Delta\psi$  и в наклонности  $\Delta\varepsilon = \tilde{\varepsilon} - \varepsilon$  вычисляются по формулам (3.1) и (3.2) соответственно.

### 3.3. Учёт влияния прецессии

Пусть заданы средние равноденственные геоцентрические координаты точки  $s$  в системе координат  $x_0 y_0 z_0$ , определённой на эпоху  $t_0$ . В качестве эпохи  $t_0$  для определённости примем стандартную эпоху J2000.0. Требуется вычислить средние равноденственные геоцентрические координаты той же точки  $s$  в системе координат  $xyz$ , определённой на другую эпоху  $t$ . Различие в ориентировке осей рассматриваемых систем координат вызвано влиянием прецессий экватора и эклиптики (рис. 3.4).

Напомним, что под влиянием прецессии экватора средняя точка весеннего равноденствия  $\gamma_0$  эпохи  $t_0$  перемещается в плоскости на-

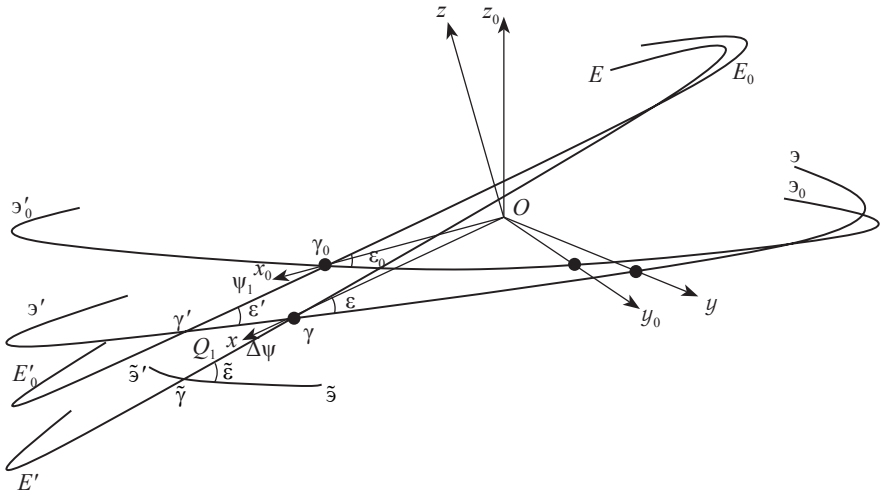


Рис. 3.4. Две средние равноденственные системы координат:  $Ox_0y_0z_0$  на эпоху  $t_0$  и  $Oxyz$  на эпоху  $t$

чальной эклиптики  $E'_0E_0$  по дуге большого круга и в эпоху  $t$  занимает положение  $\gamma'$ . Под влиянием прецессии эклиптики средняя точка весеннего равноденствия  $\gamma'$  перемещается в плоскости среднего экватора  $\varepsilon'\varepsilon$  эпохи  $t$  и занимает положение  $\gamma$ .

Преобразование координат произвольной точки, определённой в средней равноденственной системе координат  $x_0y_0z_0$  эпохи  $t_0$  к координатам той же точки, но в средней равноденственной системе координат  $xyz$  эпохи  $t$  можно осуществить посредством четырёх поворотов по формулам

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = R_3(Q_1)R_1(-\varepsilon')R_3(-\psi_1)R_1(\varepsilon_0) \begin{pmatrix} x_{t_0} \\ y_{t_0} \\ z_{t_0} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_{t_0} \\ y_{t_0} \\ z_{t_0} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Прецессионные параметры в соответствии с моделью МАС 2000 вычисляются по формулам, полученным Капитейн [17]:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 5038,247875''t - 1,07259''t^2 - 0,001147''t^3; \\ \varepsilon' &= \varepsilon_0 - 0,02524''t + 0,05127''t^2 - 0,007726''t^3; \\ Q_1 &= 10,5526''t - 2,38064''t^2 - 0,001125''t^3; \\ \varepsilon_0 &= 84381,448''; \quad t = \frac{JD - 2451545,0}{36525}. \end{aligned}$$

Вместо рассмотренных четырёх поворотов можно обойтись тремя поворотами, если ввести прецессионные параметры Ньюкома–Андуайе, аналогичные углам Эйлера и связанные с ними соотношениями:

$$\zeta_A = 90^\circ - \psi; \quad z_A = 270^\circ - \varphi; \quad \theta_A = \theta.$$

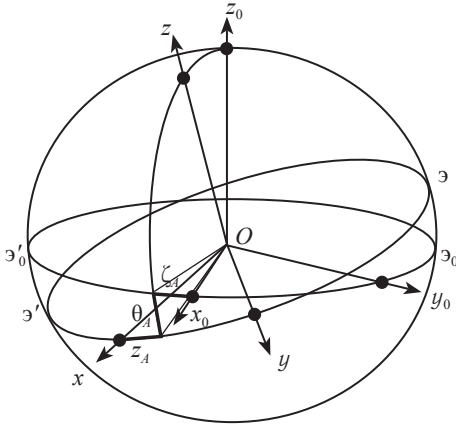


Рис. 3.5. Прецессионные углы Ньюкома–Андуайе

Углы Ньюкома–Андуайе показаны на рис. 3.5. Они вводятся следующим образом. Угол  $\zeta_A$  — угол между осью  $Ox_0$  и линией пересечения плоскостей  $\varepsilon'_0\varepsilon_0$  и  $Oz_0z$ . Угол  $\theta_A$  — двугранный угол между плоскостями  $\varepsilon'_0\varepsilon_0$  и  $\varepsilon'\varepsilon$  или плоский угол между осями  $Oz_0$  и  $Oz$ . Угол  $z_A$  — угол между линией пересечения плоскостей  $\varepsilon'\varepsilon$  и  $Oz_0z$  и осью  $Ox$ .

Эти три поворота представляются в виде:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = R_3(-z_A)R_2(\theta_A)R_3(-\zeta_A) \begin{pmatrix} x_{t_0} \\ y_{t_0} \\ z_{t_0} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_{t_0} \\ y_{t_0} \\ z_{t_0} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Сами же прецессионные параметры Ньюкома–Андуайе вычисляются по формулам модели прецессии–нутаии МАС 2000:

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 2,5976176'' + 2306,0809506''t + 0,3019015''t^2 + 0,0179663''t^3 - \\ &\quad - 0,0000327''t^4 - 0,0000002''t^5; \\ \theta_A &= 2004,1917476''t - 0,4269353''t^2 - 0,0418251''t^3 - \\ &\quad - 0,0000601''t^4 - 0,0000001''t^5; \\ z_A &= -2,5976176'' + 2306,0803226''t + 1,0947790''t^2 + 0,0182273''t^3 + \\ &\quad + 0,0000470''t^4 - 0,0000003''t^5. \end{aligned}$$

Здесь  $t$  выражено в юлианских столетиях, отсчитываемых от эпохи J2000.0.

### 3.4. Учёт влияния нутации

Пусть заданы средние равноденственные геоцентрические координаты точки  $s$  в системе координат  $Oxyz$ , определённой на эпоху  $t$ . Требуется вычислить истинные равноденственные геоцентрические координаты той же точки  $s$  в системе координат  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , определённой на ту же самую эпоху  $t$ . Различие в ориентировке осей рассматриваемых систем координат вызвано влиянием нутации (рис. 3.6).

Напомним, что под влиянием нутации средняя точка весеннего равноденствия  $\gamma$  эпохи  $t$  перемещается в плоскости эклиптики  $E'E$  по дуге большого круга и занимает положение  $\tilde{\gamma}$  (истинная точка весеннего равноденствия эпохи  $t$ ).

Преобразование координат произвольной точки, определённой в средней равноденственной системе координат  $Oxyz$  эпохи  $t$  к координатам той же точки, но в истинной равноденственной системе координат  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  той же эпохи  $t$  можно осуществить посредством трёх поворотов по формулам

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{y}_t \\ \tilde{z}_t \end{pmatrix} = R_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon)R_3(-\Delta\Psi)R_1(\varepsilon) \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}; \quad (3.5)$$

$$\varepsilon = 84381448'' - 46,84024''t - 0,00059''t^2 + 0,001813''t^3. \quad (3.6)$$

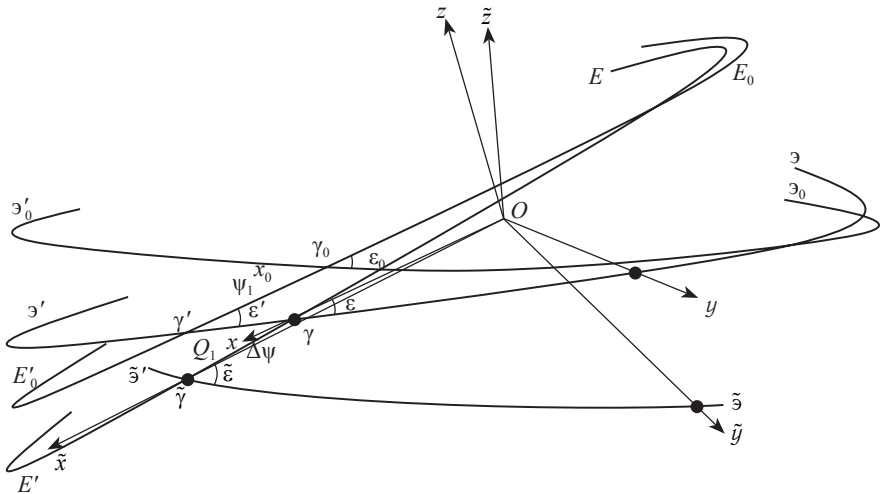


Рис. 3.6. Средняя равноденственная система координат  $Oxyz$  на эпоху  $t$  и истинная равноденственная система координат  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  на ту же эпоху  $t$

## ГЛАВА 4 ЗЕМНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

### 4.1. Гринвичские средние и мгновенные координаты

Положение точек земной поверхности удобно задавать в системе координат, жёстко связанной с Землёй, — в средней гринвичской (земной) геоцентрической системе координат. Начало этой системы координат совмещается с центром масс Земли. По международной договорённости ось аппликат первоначально проходила через точку, называемую Международным условным началом (МУН). Эта точка определена значениями астрономических широт станций Международной службы широты (МСШ), осреднёнными на промежутке времени 1900–1905 гг. В настоящее время ось аппликат направляется в точку, именуемую Условным земным полюсом (УЗП). Ось абсцисс лежит в плоскости среднего земного экватора и направлена в точку начала счёта долгот. Точка начала счёта долгот определена средними астрономическими долготами обсерваторий, сотрудничающих с Международной службой

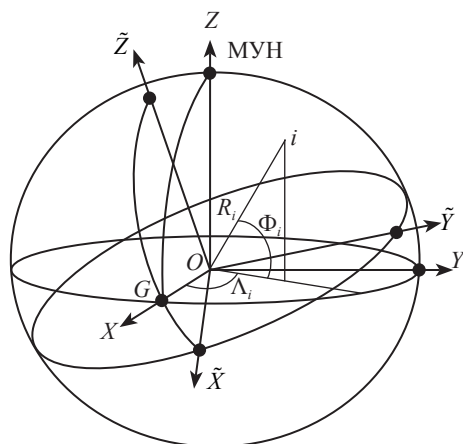


Рис. 4.1. Средняя  $OXYZ$  и мгновенная  $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  гринвичские системы координат

вращения Земли. Ось ординат дополняет систему до правой тройки векторов (рис. 4.1). Тогда положение точки  $i$  земной поверхности можно задать её алгебраическими проекциями  $X_i, Y_i, Z_i$  на оси системы координат  $OXYZ$  или же полярными координатами  $R_i, \Lambda_i, \Phi_i$  ( $R_i$  — модуль геоцентрического радиус-вектора точки  $i$ ;  $\Lambda_i, \Phi_i$  — средние геоцентрические долгота и широта точки  $i$ ).

При решении некоторых задач геодезии приходится ис-

пользовать также мгновенную геоцентрическую гринвичскую систему координат, которая задаётся следующим образом. Начало этой системы совпадает с центром масс Земли, ось аппликат направлена по мгновенной (истинной) оси вращения Земли, ось абсцисс лежит на пересечении плоскости мгновенного земного экватора и плоскости мгновенного начального меридиана, проходящего через мгновенный полюс и точку начала счёта долгот, ось ординат дополняет систему до правой тройки векторов. Положение точки  $i$  земной поверхности можно задать её алгебраическими проекциями  $\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i, \tilde{Z}_i$  на оси системы координат  $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  или же полярными координатами  $\tilde{R}_i, \tilde{\Lambda}_i, \tilde{\Phi}_i$  ( $\tilde{R}_i$  — модуль геоцентрического радиус-вектора точки  $i$ ;  $\tilde{\Lambda}_i, \tilde{\Phi}_i$  — мгновенные геоцентрические долгота и широта точки  $i$ ).

## 4.2. Учёт движения земных полюсов

До сих пор не существует удовлетворительной аналитической теории движения земного полюса, поэтому ещё в 1899 году Международная ассоциация геодезии организовала Международную службу широты для изучения явления движения полюса. В первые годы существования МСШ движение полюса определялось по непрерывным рядам наблюдений широты способом Талькотта на станциях Мицузава (Япония), Чарджоу (Туркменистан) (из-за разливов реки Аму-Дарья эта станция прекратила своё существование и была перебазирована в Китаб (Узбекистан) в 20-е годы XX века), Карлофорте (Италия), Юкайя, Гейтерсберг (США), расположенных на одной и той же параллели  $39^{\circ}08'N$ . В наблюдениях принимала участие также станция Цинциннати (США), расположенная на этой же параллели. Усредненное положение земного полюса за период с 1900 по 1905 годы было принято за среднее положение земного полюса и названо Международным условным началом. Шестилетний промежуток для осреднения выбран по той причине, что он содержит целое число Эйлеровых (305 суток) и Чандлеровых (428 суток) периодов в движении полюса. Реальное положение МУН задавалось назначением широт станций МСШ.

В 1961 году МСШ была реорганизована в Международную службу движения полюса (МСДП), а в 1988 году — в Международную службу вращения Земли (МСВЗ, IERS), которая в 2003 году была переименована в Международную службу вращения Земли и референчных систем.



МСВЗ продолжает работу, начатую МСШ и МСДП в духе времени, расширив сеть станций, участвующих в наблюдениях, почти до 50 и привлекая новые способы наблюдений.

Одна из задач, решаемых МСВЗ — установление координат мгновенного полюса Земли  $x_p, y_p$ , которые являются координатами небесного промежуточного полюса относительно Условного земного полюса. Понятие Условного земного полюса является «преемником» по отношению к понятию Международного условного начала.

Усредненное на некотором интервале времени положение УЗП обычно выбирается так, чтобы он находился недалеко от положения промежуточного полюса. Ось  $x_p$  направлена по касательной к начальному меридиану, а ось  $y_p$  — под углом  $90^\circ$  на запад (рис. 4.2). Средние квадратические погрешности определения  $x_p, y_p$  по данным МСВЗ составляют  $0,0003''$ .

В движении оси вращения Земли в земной системе координат выделяют свободные и вынужденные колебания. Период свободных колебаний (Чандлеров период), амплитуда порядка  $0,4''$  (12 м), вынужденные колебания с периодом в один год возникают из-за сезонных перемещений масс в атмосфере и океанах, их амплитуда около  $0,15''$  (4 м). Существуют также вынужденные колебания из-за влияния приливов и других геофизических факторов с суточными и полусуточными

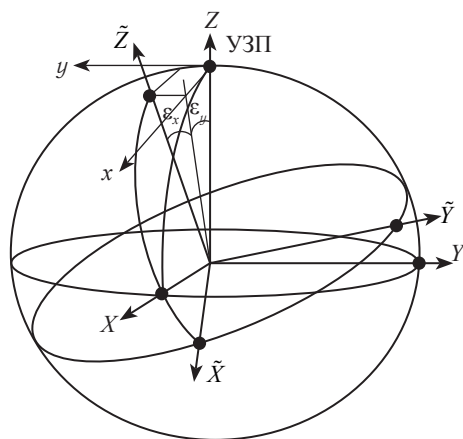


Рис. 4.2. Прямоугольная система координат  $x, y$  для задания положения мгновенного полюса относительно среднего полюса

периодами и с амплитудой около  $0,5$  м. Преобладающие в них лунно-солнечные эффекты могут хорошо моделироваться в координатах полюса и всемирном времени UT1. Кроме периодических колебаний ось вращения Земли имеет и небольшое вековое движение со скоростью  $0,0037''/\text{столетие}$  в направлении на запад. Это явление пока не получило удовлетворительного научного объяснения. Описываемая мгновенным полюсом кривая называется полодией.

Параллельно с МСДП опре-

делением положения полюса до 1988 года занималось Международное бюро времени (МБВ, ВИН), в настоящее время вошедшее в состав МСВЗ. В СССР и затем в России определение координат полюса входит в задачи Госстандарта СССР (РФ), который выводит, прогнозирует и публикует свои значения, несколько отличающиеся от системы МСВЗ. Для их вывода Госстандарт России использует радиодальномерные наблюдения спутников ГЛОНАСС, доплеровские наблюдения спутника Гео-ИК и данные астрооптических наблюдений обсерваторий России и ряда других стран. Средние квадратические погрешности определения координат полюса Госстандартом РФ составляют  $0,002''$ .

Итак, различие в ориентировке мгновенной и средней геоцентрических гринвичских систем координат вызвано движением земных полюсов.

Если ориентировку осей мгновенной системы координат относительно средней системы координат задать углами Кардано  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z = 0$ , то преобразование координат произвольной точки, заданной в мгновенной гринвичской системе координат  $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  к средним гринвичским координатам относительно системы координат  $OXYZ$  осуществляется посредством двух поворотов. Математически эти преобразования с учётом малости углов  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  записываются в виде

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_2(-\varepsilon_y)R_1(-\varepsilon_x) \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon_y \\ 0 & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Практически положение мгновенного полюса Земли относительно среднего полюса Земли в настоящее время принято задавать в плоской прямоугольной системе координат  $xu$ , при этом начало системы координат совпадает с положением среднего полюса Земли, ось абсцисс направлена по касательной к среднему начальному меридиану, ось ординат — под прямым углом к западу (см. рис. 4.2). Из-за малости углов Кардано можно принять, что  $\varepsilon_x = y_p$ ,  $\varepsilon_y = x_p$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_2(-x_p)R_1(-y_p) \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Матрицу  $\Pi$  называют матрицей движения полюса. Первоначально координаты полюса вычисляли по результатам астрономических на-

блюдений звёзд методом Галькотта на обсерваториях МСШ из решения по методу наименьших квадратов уравнений вида

$$\Delta\varphi_p = -x_p \cos \lambda + y_p \sin \lambda,$$

где  $\Delta\varphi_p = \varphi - \tilde{\varphi}$  — разность между известной средней астрономической широтой обсерватории и мгновенной астрономической широтой обсерватории, полученной из обработки выполненных наблюдений.

В настоящее время координаты полюса вычисляют по результатам лазерных наблюдений ИСЗ и Луны, доплеровских наблюдений ИСЗ и радиоинтерференционных наблюдений квазаров. Координаты мгновенного полюса Земли  $x_p, y_p$  относительно среднего полюса регулярно публикуются в специальных бюллетенях.

### 4.3. Геодезические криволинейные и прямоугольные координаты

Исходной системой координат, в которой задаются положения пунктов на поверхности Земли (рис. 4.3), является геодезическая, определяемая принятым общеземным эллипсоидом, например, рекомендованным XVII Генеральной ассамблеей Международного геодезического и геофизического союза (Канберра, 1979 г.). Геодезическая система относимости (1980 г.) задаётся параметрами:

$a_e = 6378137$  м — большая полуось общеземного эллипсоида;

$$GE = \mu = 3,9860048 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$$

— геоцентрическая гравитационная постоянная;

$J_2 = 0,00108263$  — коэффициент второй зональной гармоники геопотенциала;

$\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  — угловая скорость вращения Земли.

Этим значениям соответствуют:

$b = 6356752,314$  м — малая полуось общеземного эллипсоида;

$f = 1/298,257222101$  — сжатие общеземного эллипсоида.

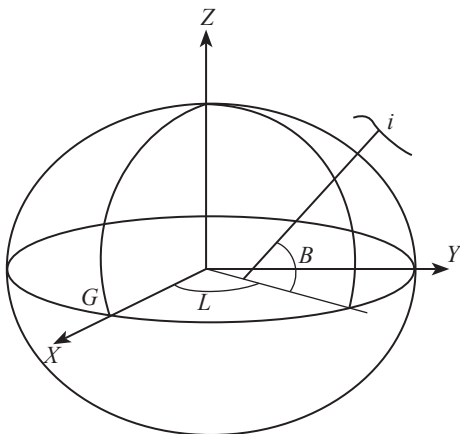


Рис. 4.3. Прямоугольная и эллипсоидальная общеземные системы координат

В этой системе координаты точек земной поверхности задаются геодезической широтой  $B$  (угол между нормалью к эллипсоиду, проходящей через данную точку, и плоскостью экватора), геодезической долготой  $L$  (двугранный угол между плоскостью начального меридиана, проходящей через малую ось эллипсоида и точку начала счёта долгот, и плоскостью меридиана пункта, проходящей через пункт и малую ось эллипсоида), геодезической высотой  $H$  (длина нормали от эллипсоида до пункта). Эллипсоид ориентируется так, чтобы его малая ось проходила через Международное условное начало.

Переход от геодезических эллипсоидальных координат  $B, L, H$  к прямоугольным  $X, Y, Z$  осуществляется по формулам:

$$X = (N + H) \cos B \cos L; \quad Y = (N + H) \cos B \sin L;$$

$$Z = [N(1 - e^2) + H] \sin B; \quad N = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; \quad e^2 = 2f - f^2, \quad (4.3)$$

где  $N$  — радиус кривизны первого вертикала эллипсоида в данной точке;  $e$  — эксцентриситет меридианного эллипса;  $f$  — сжатие эллипсоида.

Обратный переход от прямоугольных координат  $X, Y, Z$  к эллипсоидальным  $B, L, H$  осуществляется немного сложнее перехода от прямоугольных координат к полярным. Известно несколько способов этих преобразований. Рассмотрим два из них.

Геодезическая долгота вычисляется просто:

$$L = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}. \quad (4.4)$$

Геодезическую широту можно вычислить по формуле Боуринга

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z + a_e e e' \sin^3 \theta}{\sqrt{X^2 + Y^2 - a_e e^2 \cos^3 \theta}}, \quad (4.5)$$

в которой  $e' = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}$  — второй эксцентриситет, а вспомогательный

угол  $\theta$  находится из выражения  $\operatorname{tg} \theta = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2} \sqrt{1 - e^2}}$ .

Наибольшая ошибка определения широты этим методом не превосходит  $0,002''$ .

Для вычисления геодезической широты можно воспользоваться также методом последовательных приближений. В нулевом прибли-

жении геодезическую широту вычисляют по приближённой формуле

$$B_0 = \operatorname{arctg} \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (4.6)$$

В последующих приближениях широту вычисляют итерациями по формуле

$$B_k = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}}{\left( 1 - \frac{a_e e^2 \cos B_{k-1}}{\sqrt{X^2 + Y^2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_{k-1}}} \right)} \right]. \quad (4.7)$$

После вычисления геодезической широты с заданной точностью (для достижения точности 0,01" обычно бывает достаточно трёх-четырёх приближений), можно найти геодезическую высоту, например, по формуле

$$H = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (4.8)$$

#### 4.4. Связь между общеземной и референцной системами координат

В общем случае начала общеземной  $XYZ$  и референцной  $X_r Y_r Z_r$  систем координат не совпадают, имеет место также различие в ориентировке осей этих систем координат (рис. 4.4).

Если воспользоваться углами Кардано, то связь между рассматриваемыми системами координат будет выражаться формулами

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

В этих соотношениях учтён ещё масштабный множитель  $m$ . Часто  $m$  представляют в виде  $m = 1 + \beta_0$ . Тогда формулы преобразования, записанные в координатной форме, будут иметь вид

$$\begin{aligned} X &= X_r + \beta_0 X_r - \varepsilon_z Y_r + \varepsilon_y Z_r + \Delta X_0; \\ Y &= Y_r + \beta_0 Y_r + \varepsilon_z X_r - \varepsilon_x Z_r + \Delta Y_0; \\ Z &= Z_r + \beta_0 Z_r - \varepsilon_y X_r + \varepsilon_x Y_r + \Delta Z_0. \end{aligned}$$

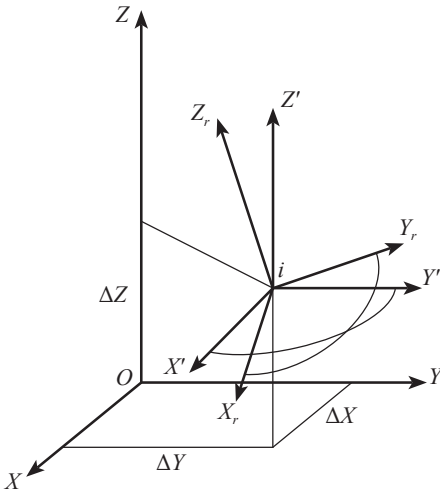


Рис. 4.4. Общеземная и референсная прямоугольные системы координат

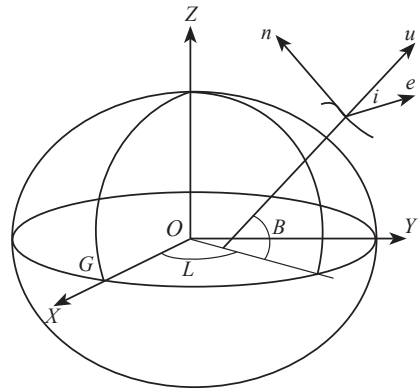


Рис. 4.5. Прямоугольные геодезическая XYZ и локальная *epi* системы координат

Часто возникает задача по определению параметров преобразования координат. В этом случае уравнения связи удобно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & Z_r & -Y_r & X_r & 1 & 0 & 0 \\ -Z_r & 0 & X_r & Y_r & 0 & 1 & 0 \\ Y_r & -X_r & 0 & Z_r & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \beta_0 \\ \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - X_r \\ Y - Y_r \\ Z - Z_r \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Легко видеть, что для определения семи параметров преобразования  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \beta_0, \Delta X_0, \Delta Y_0, \Delta Z_0$  необходимо располагать координатами минимум трёх пунктов в обеих системах координат.

#### 4.5. Локальные системы координат *epi*

При геодинимических исследованиях часто используется локальная топоцентрическая система координат (рис. 4.5). Начало этой системы координат совмещается с исследуемым пунктом земной поверхности,

положение которого  $X_0 Y_0 Z_0$  определено на некоторую эпоху  $t_0$ . Одна из осей  $n$  направляется по касательной к меридиану пункта с положительным направлением к северу, другая ось  $e$  лежит в плоскости, перпендикулярной к нормали к эллипсоиду и проходящей через данный пункт и направлена к востоку, третья ось  $u$  направлена по нормали к эллипсоиду с положительным направлением вверх.

Тогда положение этого пункта в локальной топоцентрической системе координат в текущий момент времени  $t$  можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_t \\ n_t \\ u_t \end{pmatrix} &= R_1 \left( \frac{\pi}{2} - B_0 \right) R_3 \left( \frac{\pi}{2} + L_0 \right) \begin{pmatrix} X_t - X_0 \\ Y_t - Y_0 \\ Z_t - Z_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\sin L_0 & \cos L_0 & 0 \\ -\sin B_0 \cos L_0 & -\sin B_0 \sin L_0 & \cos B_0 \\ \cos B_0 \cos L_0 & \cos B_0 \sin L_0 & \sin B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t - X_0 \\ Y_t - Y_0 \\ Z_t - Z_0 \end{pmatrix}, \quad (4.11) \end{aligned}$$

где  $X_t Y_t Z_t$  — прямоугольные координаты пункта в гринвичской системе координат в эпоху  $t$ .

## ГЛАВА 5 СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕБЕСНЫМИ И ЗЕМНЫМИ КООРДИНАТАМИ

### 5.1. Связь между истинными равноденственными и мгновенными гринвичскими координатами

Положение внешней относительно Земли точки, например, спутника  $s$  можно задать и во вращающейся системе координат её алгебраическими проекциями  $\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s$  на оси системы координат  $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  или же полярными координатами  $\tilde{R}_s, \tilde{\gamma}_s, \tilde{\delta}$  ( $\tilde{R}_s$  — модуль геоцентрического радиус-вектора точки  $s$ ;  $\tilde{\gamma}_s = 24^h - \tilde{t}_s$  — дополнение до 24 часов мгновенного геоцентрического гринвичского часового угла точки  $s$ ;  $\tilde{\delta}_s$  — мгновенное геоцентрическое склонение точки  $s$ ).

Можно ввести также мгновенную топоцентрическую гринвичскую систему координат, отличающуюся от мгновенной геоцентрической гринвичской системы лишь положением начала, которое в этом случае совмещается с пунктом земной поверхности, тогда положение точки задаётся прямоугольными координатами  $\tilde{X}'_{is}, \tilde{Y}'_{is}, \tilde{Z}'_{is}$  либо полярными координатами  $\tilde{R}'_{is}, \tilde{\gamma}'_{is}, \tilde{\delta}'_{is}$ .

Различие в ориентировке осей истинной равноденственной и мгновенной гринвичской систем координат вызвано суточным вращением Земли вокруг своей оси (рис. 5.1). Переход от координат  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  к координатам  $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  осуществляется единственным поворотом вокруг оси аппликат на

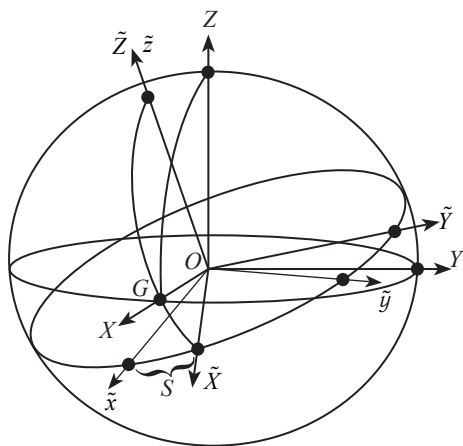


Рис. 5.1. Средняя  $OXYZ$ , мгновенная  $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  гринвичские системы координат и истинная равноденственная система координат  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$



угол, равный часовому углу истинной точки весеннего равноденствия относительно истинного начального меридиана. А этот угол, как известно, является мерой истинного гринвичского звёздного времени  $S$ .

Таким образом, рассматриваемое преобразование координат будет выражаться следующими формулами

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{pmatrix} = R_3(S) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где  $W = \begin{pmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  — матрица суточного вращения Земли.

С помощью точной процедуры истинное гринвичское звёздное время  $S$  может быть преобразовано во Всемирное время UT1 (и наоборот UT1 в  $S$ ).

Истинное гринвичское звёздное время вычисляется по формуле (1.27).

## 5.2. Преобразование координат точки, заданных в небесной системе, к координатам точки в земной системе

Вообще говоря, для изучения вращения земной системы координат относительно небесной системы координат достаточно знать три независимых угла, например, три угла Эйлера. Однако исторически сложилось, что удобнее оказалось ввести промежуточную систему координат, движение которой относительно небесной системы координат определяется принятой прецессионно-нутационной теорией, а движение земной системы координат относительно промежуточной системы координат задаётся параметрами вращения Земли, поэтому для связи этих систем координат пришлось ввести восемь параметров ( $\zeta_A, \theta_A, z_A, \Delta\psi, \varepsilon + \Delta\varepsilon, x_p, y_p, S$ ).

Наблюдения, проводимые с поверхности Земли, определяют положение полюса земной системы координат (тиссерановой оси  $OZ$ ), относительно полюса промежуточной системы координат. Этот полюс и был назван небесным промежуточным полюсом. Очевидно, что положение небесного промежуточного полюса на небесной сфере опре-

деляется теорией прецессии–нутации.

Классическое преобразование координат точки, заданных в средней равноденственной системе координат на эпоху J2000.0 (вектор  $\vec{r}$ ) к координатам той же точки в средней гринвичской системе координат (вектор  $\vec{R}$ ), задаётся формулой

$$\vec{R} = \Pi W N P \vec{r}, \quad (5.2)$$

где  $\Pi$  — матрица движения полюса;  $W$  — матрица суточного вращения Земли;  $N$  — матрица нутации;  $P$  — матрица прецессии.

### 5.3. Концепция невращающегося начала

Классическое описание вращения Земли относительно выбранной опорной системы координат, связанной со звёздами или квазарами, требует знания прецессионно–нутационных параметров и гринвичского звёздного времени. При этом единый процесс движения полюса по небесной сфере искусственно разделяется на прецессию и нутацию, что уже невозможно сделать при точности выше тысячной доли секунды дуги.

Для устранения этого недостатка в конце 70-х годов XX века Б. Гино выдвинул идею использования вместо точки весеннего равноденствия некоторой опорной точки на небесном экваторе. Эта концепция получила название «невращающегося начала» [15].

XXIV Генеральная ассамблея Международного астрономического союза, проходившая в Англии в 2000 году, приняла во внимание необходимость строгого определения понятия вращения Земли относительно звезд и возможность описания вращения Земли независимо от её орбитального движения, рекомендовала в качестве альтернативы классическому описанию вращения Земли использовать понятие «невращающейся начальной точки» на подвижном экваторе.

XXIV Генеральная ассамблея Международного астрономического союза рекомендовала использовать «невращающуюся начальную точку» в геоцентрической небесной системе координат и обозначать её как небесное промежуточное начало (*Celestial Intermediate Origin, CIO*) на экваторе, соответствующем небесному промежуточному полюсу и использовать «невращающуюся начальную точку» в геоцентрической земной системе координат и обозначать её как земное промежуточное

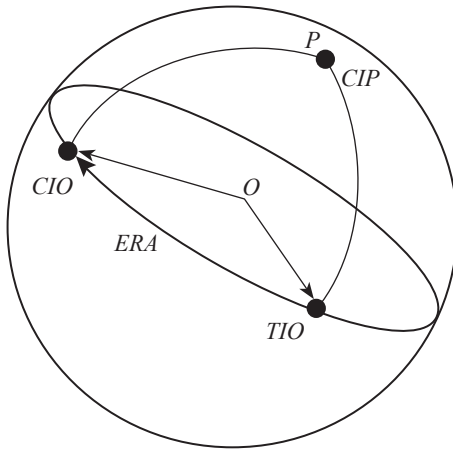


Рис. 5.2. Небесный промежуточный полюс  $CIP$ , небесная и земная невращающиеся точки  $CIO$  и  $TIO$

начало (*Terrestrial Intermediate Origin, TIO*) на экваторе, соответствующем небесному промежуточному полюсу (рис. 5.2).

Положение  $CIO$  может быть вычислено на основе модели MAC 2000A прецессии и нутации промежуточного небесного полюса и текущих значений смещения промежуточного небесного полюса относительно полюса международной небесной системы координат в стандартную эпоху J2000.0.

Положение  $TIO$  имеет слабую зависимость от движения полюса и может быть экстраполировано с использованием данных Международной службы вращения Земли.

Использование «невращающейся начальной точки» позволяет дать определение Всемирного времени UT1, нечувствительное к изменениям в моделях прецессии и нутации на микросекундном уровне точности. Всемирное время UT1 прямо пропорционально углу вращения Земли, определяемому как угол, измеряемый вдоль небесного промежуточного экватора между единичными векторами, направленными в небесную и земную невращающиеся начальные точки (см. рис. 5.2).

Угол вращения Земли  $ERA$  (*Earth Rotation Angle*) вычисляется по формуле

$$ERA(UT1) = 2\pi \left( 0,7790572732640 + \right. \\ \left. +1,00273781191135448(JD - 2451545,0) \right). \quad (5.3)$$

Преобразование между земной и небесной системами координат определяется положением небесного промежуточного полюса  $CIP$  в этих системах координат и углом вращения Земли. Дугами больших кругов  $d$ ,  $E$  задаётся положение  $CIP$  в небесной системе координат, точка  $P_{ICRF}$  — полюс небесной системы координат. Дугами больших кругов  $g$ ,  $F$  задаётся положение  $CIP$  в земной системе координат, точка

$P_{ITRF}$  — полюс земной системы координат (рис. 5.3).

Кинематическое условие, сформулированное Б. Гино: любое бесконечно малое смещение небесного промежуточного полюса  $CIP$  в Небесной системе координат не должно приводить к угловому вращению мгновенной земной системы координат  $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  вокруг оси  $O\tilde{Z}$ . Выберем на мгновенном экваторе точку  $S$ , удовлетворяющую этому условию. Это означает, что  $\cup SN = \cup \Sigma N$ , где точка  $N$  — восходящий узел мгновенного экватора на фундаментальном экваторе (рис. 5.4).

Обозначим единичные векторы, направленные из точки  $O$  в точки  $CIP$ ,  $N$ ,  $S$ ,  $\sigma$  как  $\vec{n}_p, \vec{n}_N, \vec{n}_S, \vec{n}_\sigma$ , а орты небесной системы координат — через  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Единичные векторы  $\vec{n}_S$  и  $\vec{n}_\sigma$  можно связать между собой. Для этого воспользуемся тождеством Лагранжа для двойного векторного произведения  $\vec{n}_S \times (\vec{n}_\sigma \times \vec{n}_S) = \vec{n}_\sigma - \vec{n}_S \cdot (\vec{n}_S \cdot \vec{n}_\sigma)$ .

$$\begin{aligned} \text{Учитывая, что } \vec{n}_\sigma \cdot \vec{n}_S = \cos s; \quad \vec{n}_\sigma \times \vec{n}_S = \vec{n}_p \sin s, \text{ где } s = \cup \sigma S, \text{ получим} \\ \vec{n}_\sigma = \vec{n}_S \cos s + (\vec{n}_S \times \vec{n}_p) \sin s. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Направляющие косинусы вектора  $\vec{n}_p$  и их производные по времени (или, что всё равно, координаты и составляющие скорости небесного промежуточного полюса на сфере единичного радиуса) в небесной

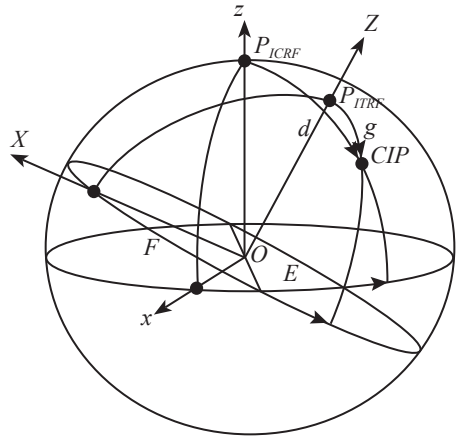


Рис. 5.3. Дуги, определяющие положение мгновенного полюса в небесной и земной системах координат

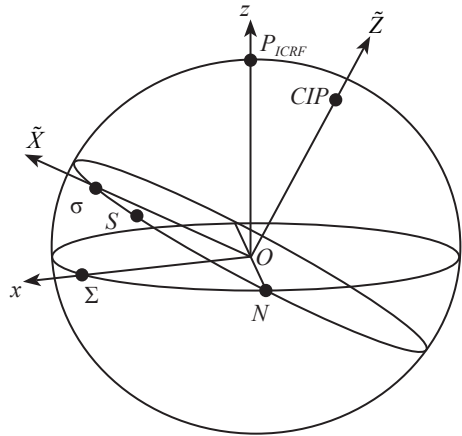


Рис. 5.4. Невращающееся начало

системе координат вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} X &= \sin d \cos E; & Y &= \sin d \sin E; & Z &= \cos d = \sqrt{1 - X^2 - Y^2}; \\ \dot{X} &= \dot{d} \cos d \cos E - \dot{E} \sin d \sin E; \\ \dot{Y} &= \dot{d} \cos d \sin E + \dot{E} \sin d \cos E; \\ \dot{Z} &= -\dot{d} \sin d. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Вектор мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  системы  $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$  вследствие движения полюса в небесной системе координат равен

$$\vec{\omega} = \dot{E}\vec{k} - (\dot{E} + \dot{s})\vec{n}_p + d\vec{n}_N. \quad (5.6)$$

Проекция вектора  $\vec{\omega}$  на ось  $O\tilde{Z}$ :

$$\vec{\omega} \cdot \vec{n}_p = \dot{E} \cos d - (\dot{E} + \dot{s}) = \dot{E}(\cos d - 1) - \dot{s}. \quad (5.7)$$

Учитывая сформулированное выше условие, то есть  $\vec{\omega} \cdot \vec{n}_p = 0$ , получаем

$$\dot{s} = \dot{E}(\cos d - 1). \quad (5.8)$$

Параметр  $s$  представляет собой интеграл

$$s = \int_{t_0}^t \dot{E}(\cos d - 1) dt. \quad (5.9)$$

С учётом формул

$$\dot{E}(\cos d - 1) = -\frac{\dot{E} \sin^2 d}{1 + \cos d};$$

$$\dot{E} \sin^2 d = \dot{Y} \sin d \cos E - \dot{X} \sin d \sin E$$

подынтегральное выражение можно представить через направляющие косинусы и их производные по времени

$$s = -\int_{t_0}^t \frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{1 + Z} dt. \quad (5.10)$$

По аналогии с выражением (5.9) в земной системе координат можно записать

$$s' = \int_{t_0}^t \dot{F}(\cos g - 1) dt, \quad (5.11)$$

где  $F, g$  — дуги (см. рис. 5.3).

Координаты полюса  $CIP$  в земной системе координат по соглашению равны

$$x_p = g \cos F; \quad y_p = -g \sin F. \quad (5.12)$$

Координатное преобразование от средней гринвичской системы координат к средней равноденственной системе координат при использовании концепции невращающейся начальной точки имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q(t)R(t)W(t) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

В этом преобразовании  $W(t) = R_3(-s')R_1(y_p)R_2(x_p)$  — матрица, учитывающая движение полюса;  $s' = -0,0015 \left( \frac{a_c^2}{1,2} + a_a^2 \right) t$ ;  $a_c, a_a$  — амплитуды чандлерова и годового колебаний на рассматриваемом интервале времени, выраженные в секундах дуги; значение  $s'$  можно вычислить по приближённой формуле  $s' = -0,000047'' t$ ;  $R(t) = R_3(-ERA)$  — матрица, описывающая сидерическое вращение Земли вокруг оси;  $Q(t) = R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)$  — матрица прецессионно-нutationного движения полюса.

Выпишем в явном виде произведение трёх матриц:

$$R_3(-E)R_2(-d)R_3(E) = \begin{pmatrix} \cos^2 E \cos d + \sin^2 E & \cos E \sin E \cos d - \sin E \cos E & \cos E \sin d \\ \sin E \cos E \cos d - \sin E \cos E & \sin^2 E \cos d + \cos^2 E & \sin E \sin d \\ -\cos E \sin d & -\sin E \sin d & \cos d \end{pmatrix}.$$

Используя тождественные преобразования

$$\begin{aligned} \cos^2 E \cos d + \sin^2 E &= \cos^2 E \cos d + \sin^2 E + \cos^2 E - \cos^2 E = \\ &= 1 - \cos^2 E(1 - \cos d) = \\ &= 1 - \cos^2 E \sin^2 d \frac{1 - \cos d}{1 - \cos^2 d} = \\ &= 1 - X^2 \frac{1}{1 + \cos d} = 1 - aX^2, \end{aligned}$$

где  $a = \frac{1}{1 + \cos d}$ ;

$$\begin{aligned} \sin^2 E \cos d + \cos^2 E &= \sin^2 E \cos d + \sin^2 E + \cos^2 E - \sin^2 E = \\ &= 1 - \sin^2 E(1 - \cos d) = 1 - \sin^2 E \sin^2 d \frac{1 - \cos d}{1 - \cos^2 d} = \\ &= 1 - Y^2 \frac{1}{1 + \cos d} = 1 - aY^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos d &= 1 - (1 - \cos d) = 1 - \frac{(1 - \cos d)(1 + \cos d)}{1 + \cos d} = 1 - \frac{1 - \cos^2 d}{1 + \cos d} = \\ &= 1 - \frac{\sin^2 d}{1 + \cos d} = 1 - a(X^2 + Y^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin E \cos E \cos d - \sin E \cos E &= -\sin E \cos E(1 - \cos d) = \\ &= -\sin E \cos E \sin^2 d \frac{1 - \cos d}{\sin^2 d} = \\ &= -XY \frac{1 - \cos d}{1 - \cos^2 d} = -XY \frac{1}{1 + \cos d} = -aXY \end{aligned}$$

матрицу  $Q$  можно записать в виде

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} R_3(s).$$

В соответствии с обозначением коэффициент

$$a = \frac{1}{1 + \cos d} = \frac{1}{1 + 1 - a(X^2 + Y^2)}$$

может быть найден из решения квадратного уравнения

$$a^2(X^2 + Y^2) - 2a + 1 = 0;$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (X^2 + Y^2)}}{X^2 + Y^2} \cong \frac{1 \pm \left[ 1 - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{1}{8}(X^2 + Y^2)^2 \right]}{X^2 + Y^2},$$

$$a = \frac{2 - \left[ \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{1}{8}(X^2 + Y^2)^2 \right]}{X^2 + Y^2} \text{ — посторонний корень;}$$

$$a = \frac{\left[ \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{1}{8}(X^2 + Y^2)^2 \right]}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(X^2 + Y^2).$$

Численные выражения для вычисления параметров  $X$ ,  $Y$ ,  $s$  получены Н. Капитейн и имеют вид:

$$\begin{aligned} X = & -6844,31844 \sin F_5 - 523,90804 \sin(2F_3 - 2F_4 + 2F_5) - \\ & -90,55222 \sin(2F_3 + 2F_5) + 82,16876 \sin 2F_5 + 58,70702 \sin F_2 - \\ & -3,32848t \sin F_5 + 0,19753t \sin(2F_3 - 2F_4 + 2F_5) + \\ & +1,32867 \cos F_5 - 0,54476 \cos(2F_3 - 2F_4 + 2F_5) + \\ & +0,47005 \cos F_2 + 205,83315t \cos F_5 - 16,61699 + \\ & +2004191,74288t - 427,21905 t^2 - 198,62054 t^3 \text{ mas}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = & 1,59818 \sin F_5 - 0,45866 \sin(2F_3 - 2F_4 + 2F_5) + \\ & +0,13741 \sin(2F_3 + 2F_5) - 0,02905 \sin 2F_5 + 153,04182 t \sin F_5 + \\ & +11,71449 t \sin(2F_3 - 2F_4 + 2F_5) + 9205,23626 \cos F_5 + \\ & +573,03342 \cos(2F_3 - 2F_4 + 2F_5) + 97,84669 \cos(2F_3 + 2F_5) - \\ & -89,61824 \cos 2F_5 + 22,43842 \cos(F_2 + 2F_3 - 2F_4 + 2F_5) + \\ & +0,87889t \cos F_5 - 0,28932t \cos(2F_3 - 2F_4 + 2F_5) - 6,95078 - 25,38199t - \\ & -22407,25099t^2 - 1,84228t^3 \text{ mas}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s = & -2640,73 \sin F_5 - 63,53 \sin 2F_5 - 11,75 \sin(2F_3 - 2F_4 + 3F_5) - \\ & -11,21 \sin(2F_3 - 2F_4 + F_5) + 4,57 \sin(2F_3 - 2F_4 + 2F_5) - 2,02 \sin(2F_3 + 3F_5) - \\ & -1,98 \sin(2F_3 + F_5) + 1,72 \sin 3F_5 + 1,41 \sin(F_2 + F_5) + \\ & +1,26 \sin(F_2 - F_5) + 0,63 \sin(F_1 - F_5) + 94 - XY/2 + \\ & +3808,35t - 119,94t^2 - 72574,09 t^3 + 3,57t \cos 2F_5 + 743,53t^2 \sin F_5 + \\ & +56,91t^2 \sin(2F_3 - 2F_4 + 2F_5) + 1,71t \sin F_5 + 9,84t^2 \sin(2F_3 + 2F_5) - \\ & -8,85t^2 \sin 2F_5 \text{ } \mu\text{s} \text{ (}\mu\text{s — микросекунда дуги)}. \end{aligned}$$



## ГЛАВА 6

# ИСТОРИЯ СОЗДАНИЯ И СОВРЕМЕННАЯ КОНЦЕПЦИЯ РАЗВИТИЯ РОССИЙСКОЙ КООРДИНАТНОЙ ОСНОВЫ

Физическое воплощение той или иной координатной основы зависит от технических средств и технологий, имеющихся в наличии на том или ином этапе развития общества.

В этой связи сделаем обзор координатных систем и их практических реализаций в исторической ретроспективе, опишем методы построения координатных систем. Под геодезической координатной основой будем понимать дискретный набор точек земной поверхности, для каждой из которых известны соответствующие значения координат. Источниками этих данных служат результаты геодезических методов, которые применяются для изучения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли. Геодезические методы сами по себе не предоставляют возможности получить непрерывное описание фигуры физической поверхности Земли, однако они позволяют определить положение дискретного набора опорных точек, размещённых на Земле с различной степенью плотности, в единой системе пространственных координат.

### 6.1. Системы координат СК-42 и СК-95

*Плановая составляющая СК-42.* Система координат 1942 года (СК-42) до 2002 года была основной системой координат, принятой для использования в России (а ранее в Советском Союзе). После 1946 года, когда были приняты параметры нового эллипсоида, более подходящего на территории нашей страны для обработки астрономо-геодезических построений и картографирования взамен использовавшегося ранее эллипсоида Бесселя, была установлена также система исходных геодезических дат с началом в пункте Пулково и поверхностью относимости в виде референц-эллипсоида Красовского. Работы по выводу параметров нового референц-эллипсоида велись в течение 10 лет в ЦНИИГАиК под руководством проф. Ф.Н. Красовского. Впервые для вывода параметров

эллипсоида были привлечены гравиметрические данные как на территории СССР, так и на зарубежной территории. Данная система получила название «Система 1942 года» (СК-42).

По теоретическому определению начало системы координат 1942 года близко к центру масс Земли, но не совпадает с ним и отстоит от геоцентра примерно на 200 м. Ось  $Z_{42}$  параллельна оси  $Z$  общеземной системы, ось  $X_{42}$  определяется положением нуля-пункта принятой системы счета долгот, ось  $Y_{42}$  дополняет систему до правой тройки векторов.

Центр референц-эллипсоида СК-42 совпадает с началом прямоугольной системы координат  $(X_{42}, Y_{42}, Z_{42})$ , ось вращения совпадает с осью  $Z_{42}$ , плоскость начального меридиана совпадает с плоскостью  $(XZ)_{42}$ . Линейные и угловые элементы ориентирования задают координаты центра референц-эллипсоида Красовского и ориентировку осей системы 1942 года в общеземной системе координат. Координатная основа была реализована на территории страны системой 87 уравненных полигонов триангуляции 1 класса, полностью покрывавших Европейскую часть страны и распространявшихся на восток в виде узкой цепочки полигонов. Сеть триангуляции уравнивалась отдельными блоками. На границе блоков результаты предыдущего уравнивания принимались за безошибочные и таким образом координаты постепенно передавались все далее на восток. В каркас полигонов 1 класса вставлялась заполняющая сеть триангуляции 2 класса.

При построении системы координат 1942 года использовался в основном астрономо-геодезический метод, включающий в себя линейно-угловые геодезические измерения, астрономические наблюдения звёзд и гравиметрические измерения. В этом методе путём построения астрономо-геодезической сети (АГС) решается задача определения взаимного положения пунктов земной поверхности в пределах территорий протяжённостью до тысяч километров. Астрономо-геодезическими сетями покрыто более двух третей поверхности суши. Из больших сетей самая точная создана в нашей стране по научно обоснованной программе, разработанной в 1928 году Ф.Н. Красовским. Взаимное пространственное положение пунктов значительной части АГС определено для расстояний порядка 6000 км с относительной точностью около 1:1 000 000 по каждой из координат [7, 10].

Вся обработка астрономо-геодезической сети ведётся на поверхности референц-эллипсоида и решается как двухмерная задача. Для

перехода от непосредственно измеренных величин (длин сторон и астрономических азимутов), выполненных на физической поверхности Земли, к соответствующим им величинам на поверхности референц-эллипсоида приходится вводить следующие редукции:

за уклонения отвеса, т.е. за переход от астрономического зенита, соответствующего направлению отвесной линии, по которой ориентируется вертикальная ось астрономического или геодезического прибора к геодезическому зениту – направлению нормали к референц-эллипсоиду;

за высоту над поверхностью референц-эллипсоида.

Из обработки гравиметрических наблюдений получают составляющие гравиметрического уклонения отвеса. По составляющим гравиметрического уклонения отвеса  $\xi_{гр}$ ,  $\eta_{гр}$  можно вычислить составляющие астрономо-геодезического уклонения отвеса  $\xi$ ,  $\eta$  по формулам  $\xi = \xi_{гр} + \Delta B$ ;  $\Delta B = 0,171'' H \sin 2B$ ;  $\eta = \eta_{гр}$ , где  $H$  — геодезическая высота точки, выраженная в км.

Это даёт возможность при наличии астрономических определений широты  $\varphi$  и долготы  $\lambda$  вычислить геодезические координаты точки земной поверхности по формулам

$$B = \varphi - \xi_{гр} - \Delta B; \quad L = \lambda - \eta_{гр} \sec B. \quad (6.1)$$

После двухмерной обработки АГС на референц-эллипсоиде становятся известными плановые компоненты пространственных координат пунктов этой сети. Под плановыми компонентами понимаются геодезическая широта  $B$  (угол между нормалью к эллипсоиду, проходящей через данную точку, и плоскостью экватора эллипсоида) и геодезическая долгота  $L$  (двугранный угол между плоскостью начального меридиана, проходящей через малую ось эллипсоида и точку начала счёта долгот, и плоскостью меридиана пункта, проходящей через пункт и малую ось эллипсоида).

Получение третьей координаты — геодезической высоты  $H$  (длина нормали от эллипсоида до пункта) — рассматривается как независимая задача. Принцип раздельного определения планового положения пунктов и вертикальной координаты является основным при создании астрономо-геодезических сетей старыми методами наблюдений.

После строгой математической обработки (уравнивания) астрономо-геодезическая сеть представляет собой пространственное построение. Астрономические наблюдения, выполняемые на некоторых

пунктах сети, позволяют отнести это построение к единой экваториальной системе координат. Линейные измерения в сети задают масштаб. Задав параметры референц-эллипсоида и выбрав координаты исходного пункта (исходные геодезические даты), тем самым жёстко определяют положение референц-эллипсоида относительно астрономо-геодезической сети, закреплённой на физической поверхности Земли.

Существующие в нашей стране геодезические сети подразделяют на четыре вида: государственные, сгущения, съёмочные и специальные.

*Государственные* плановые геодезические сети в РФ разделяются на четыре класса. Схема построения государственных плановых геодезических сетей основана на методе триангуляции. Астрономические определения широты и долготы выполнены на всех пунктах Лапласа как в триангуляции 1 класса, созданной в виде полигонов, так и в заполняющей её сети 2 класса. Дополнительные астрономические определения выполнены, как правило, в средних пунктах звеньев 1 класса. В среднем расстояние между астропунктами составляет 100 км. Сети *сгущения* строят для дальнейшего увеличения плотности государственных сетей. Плановые сети сгущения подразделяют на 1-й и 2-й разряды. *Съёмочные* сети — это тоже сети сгущения, но с ещё большей плотностью. *Специальные* геодезические сети создают для геодезического обеспечения строительства сооружений.

Точки геодезических сетей закрепляются на местности знаками. По местоположению знаки бывают грунтовые и стенные, заложенные в стены зданий и сооружений; по материалу изготовления — металлические, железобетонные, деревянные, в виде откраски и т.д.; по назначению — постоянные, к которым относятся все знаки государственных геодезических сетей, и временные, устанавливаемые на период изысканий, строительства, реконструкции, наблюдений и т.д.

Постоянные знаки закрепляются подземными знаками — центрами. Конструкции центров обеспечивают их сохранность в неизменном положении в течение длительного времени. Как правило, подземный центр представляет собой бетонный монолит, закладываемый ниже глубины промерзания грунта. У поверхности земли в монолите устанавливают чугунную марку, на которой наносят центр в виде креста или точки. Положению этого центра соответствуют плановые координаты и во многих случаях высотные отметки.

Точки съёмочных, а иногда и разбивочных сетей закрепляют вре-

менными знаками — деревянными или бетонными столбами, металлическими штырями, отрезками рельсов и т.д. В верхней части такого знака крестом, точкой или рискуй отмечают местоположение центра или точки с высотной отметкой.

Для того, чтобы с одного знака был виден другой (смежный) над подземными центрами приходилось устанавливать наружный знак в виде металлических или деревянных трёх- или четырёхгранных пирамид или сигналов. Пирамиды или сигналы имеют высоту 3–30 м и более. Верх сигнала или пирамиды заканчивается визирной целью, на которую при измерении углов наводят зрительную трубу теодолита.

**Высотная составляющая СК-42.** В качестве поверхностей, относительно которых отсчитываются высоты точек физической поверхности Земли, могут быть приняты геоид, квазигеоид или эллипсоид.

Поверхность геоида — это уровенная поверхность поля силы тяжести, проходящая через начало отсчёта высот. Эта поверхность близка к невозмущённому уровню океанов. Определение поверхности геоида под материками принципиально невозможно из-за неизвестного закона изменения плотности Земли. Неопределённость фигуры геоида под материками заставила перейти к определению фигуры квазигеоида — поверхности, совпадающей с геоидом на океанах и очень близко подходящей к нему на суше. Отступление фигуры квазигеоида от геоида под материками оценивается в несколько сантиметров в равнинной местности и доходит до нескольких метров под горами.

Кроме квазигеоида для научного и практического использования необходима простая математическая аппроксимация фигуры Земли. Наиболее удобной аппроксимацией оказался эллипсоид вращения, параметры которого подбираются под условием наилучшего соответствия фигуре квазигеоида либо в пределах всей Земли в целом (общеземной эллипсоид), либо в пределах ограниченных её областей (референц-эллипсоид).

*Динамические высоты.* Разность потенциалов силы тяжести  $dW$  между бесконечно близкими точками земной поверхности равна произведению ускорения силы тяжести  $g$  (эту величину называют обычно силой тяжести, подразумевая по умолчанию пробную массу, равную единице) на элементарное превышение  $dh$  (длина нормали между уровнями поверхностями) между этими точками

$$dW = -g dh. \quad (6.2)$$

Интегрируя уравнение (6.2), получаем формулу для разности потенциалов силы тяжести в точке начала отсчёта высот (нуль-пункте)  $O$  и в текущей точке  $M$

$$W_M - W_0 = - \int_O^M g dh.$$

Заметим, что получающаяся при этом разность потенциалов, численно равная работе при перемещении единичной массы из точки  $O$  в точку  $M$  в поле действия силы тяжести определяется однозначно и не зависит от пути интегрирования.

Разделив разность потенциалов на некоторое постоянное значение силы тяжести (обычно используют значение нормальной силы тяжести на широте в  $45^\circ$ ), получают динамические высоты:

$$H^d = \frac{1}{\gamma_{45}} \int_O^M g dh. \quad (6.3)$$

Динамические высоты не нашли широкого применения при практическом использовании в нашей стране, так как реальные значения силы тяжести существенно отличаются от постоянного нормального значения.

*Ортометрические высоты.* Ортометрическими высотами называют высоты точек физической поверхности над поверхностью геоида, отложенные по силовым линиям поля силы тяжести. Ортометрическая высота точки  $M$  равна отрезку  $MC$  (рис. 6.1). Можно записать

$$\int_O^M g dh = W_0 - W_M = \int_O^C g dh + \int_C^M g dh.$$

Первый интеграл правой части равен нулю, так как обе точки  $O$  и  $C$  лежат на геоиде. Второй интеграл можно представить в виде  $\int_C^M g dh = g_m H^g$ , где  $g_m$  — среднее интегральное значение силы тяжести

вдоль силовой линии  $CM$ .

Отсюда получаем

$$H^g = \frac{\int_C^M g dh}{g_m}. \quad (6.4)$$

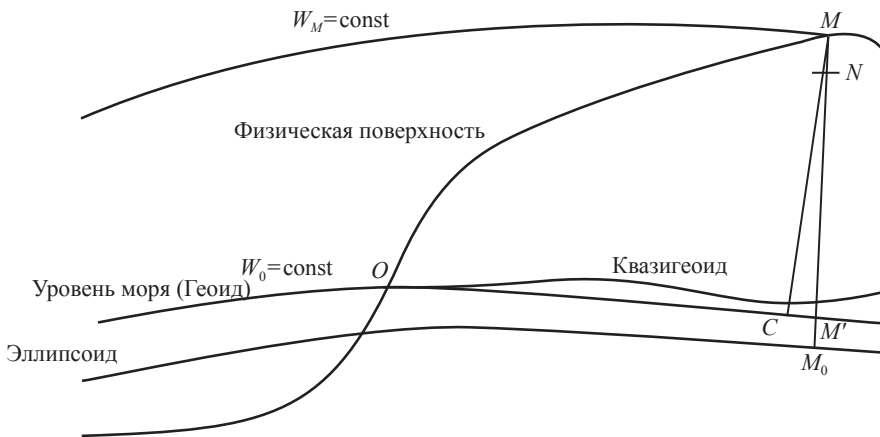


Рис. 6.1. Схематическое изображение физической поверхности Земли, геоида, квазигеоида и эллипсоида

Среднее значение силы тяжести вдоль линии  $CM$  вообще говоря неизвестно, поэтому геометрически ясное понятие ортометрической высоты точно реализовать невозможно [7, 10]. При практическом использовании системы ортометрических высот приходится прибегать к тем или иным моделям распределения плотности Земли с глубиной.

*Нормальные и геодезические высоты.* Геодезической высотой точки земной поверхности называется её высота над урванным эллипсоидом, отсчитанная по нормали к эллипсоиду. Геодезическая высота могла бы быть вычислена из соотношения

$$H = \frac{U_0 - U_m}{\gamma_m},$$

где  $\gamma_m$  — среднее значение нормальной силы тяжести на отрезке  $MM_0$ .

Однако в результате измерений может быть определена разность  $W_0 - W_M$ , в которой  $W_0$  — значение реального потенциала силы тяжести в точке  $O$ , а  $W_M$  — значение того же потенциала в точке  $M$ . Вследствие отличия реального гравитационного поля от нормального, через разность  $W_0 - W_M$  определяется не геодезическая высота, а лишь её составляющая  $M_0N$ , получившая название нормальной высоты.

Таким образом

$$H^{\gamma} = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m} = \frac{1}{\gamma_m} \int_o^M g dh. \quad (6.5)$$

Среднее значение нормальной силы тяжести можно вычислить по формуле Гельмерта

$$\gamma_m = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 2B_m - \beta_1 \sin^2 2B_m) - 3,0855 \cdot 10^{-5}(1 + 0,00071 \cos 2B_m) \frac{H^\gamma}{2}, \quad (6.6)$$

где  $\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}$ ;  $\beta_1 = \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha\beta}{4}$ ;  $\alpha = \frac{a-b}{a}$ ;  $\gamma_e, \gamma_p$  — значения нормальной силы тяжести  $\gamma$  на экваторе и на полюсе соответственно;  $\beta$  — гравиметрическое сжатие;  $\alpha$  — геометрическое сжатие эллипсоида;  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллипсоида.

Геодезическая же высота  $H$  представляет собой сумму двух составляющих

$$H = H^\gamma + \zeta. \quad (6.7)$$

Величина  $\zeta = NM = M_0M'$ , называется *аномалией высоты*.

Государственные высотные геодезические сети создают для распространения по всей территории страны единой системы высот. За начало высот в РФ и ряде других стран принят средний уровень Балтийского моря, определение которого проводилось с 1825 по 1840 г. Этот уровень отмечен горизонтальной чертой на медной пластине, укрепленной в устье моста через обводной канал в Кронштадте. Между пунктами государственных высотных геодезических сетей высокой точности (I класса) размещают пункты высотных сетей низших классов (II, III и т.д.). Государственные высотные сети всех классов закрепляют на местности грунтовыми реперами. Стенные реперы закрепляют в фундаментах устойчивых сооружений — водонапорных башен, капитальных зданий, каменных устоев мостов и т.д.

Таким образом, в результате применения астрономо-геодезического и гравиметрического методов получают положения пунктов физической поверхности Земли в криволинейной системе координат  $B, L, H$ .

В 1942–1945 гг. в ЦНИИГАиК выполнено уравнивание триангуляции на эллипсоиде Красовского с применением метода проектирования. Полученные в результате уравнивания координаты пунктов триангуляции образовали систему координат 1942 года (СК-42). Эта система геодезических координат введена Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. № 760.



В 1991 г. построенная на территорию страны астрономо-геодезическая сеть (АГС) из 164 000 пунктов была уравнена как единое целое. Результаты уравнивания выявили наличие значительных деформаций в сети, достигавших на севере и на востоке 20–30 м. Локальные деформации на границах блоков иногда достигали 10 м. Точность взаимного положения пунктов в уравненной сети характеризуется средними квадратическими погрешностями в 6; 20; 60 и 200 см при расстояниях соответственно в 10; 100; 1000 и 10 000 км.

Практически одновременно с завершением построения астрономо-геодезической сети, основанной на градусных измерениях, были созданы доплеровская и космическая геодезические сети методами космической геодезии. Доплеровская геодезическая сеть (ДГС) представляет собой каркасное геодезическое построение, выполненное на основе доплеровских наблюдений спутников системы TRANSIT. Космическая геодезическая сеть (КГС) основана на фотографических, доплеровских, радиодальномерных, лазерных и альтиметрических наблюдениях спутников ГЕО-ИК, ГЛОНАСС и ЭТАЛОН.

Таким образом, на территории России разными методами созданы сопоставимые по точности независимые геодезические сети — астрономо-геодезическая, доплеровская геодезическая и космическая геодезическая.

Проведенное уравнивание АГС показало необходимость в новой системе с однородной точностью координат по всей стране. Для повышения точности было решено использовать результаты высокоточных спутниковых измерений на 26 пунктах КГС, построенной Военно-топографическим управлением, и 134 пунктах ДГС, созданной Роскартографией. В качестве дополнительных измерений в общее решение вошли геоцентрические расстояния геодезических пунктов, с использованием гравиметрических высот квазигеоида.

В результате совместного уравнивания этих трёх сетей была получена система координат 1995 года (СК-95). Одним из принципов, положенных в основание системы СК-95, было минимальное изменение координат в этой системе по сравнению с системой координат 1942 года. В СК-95 в качестве отчётного сохранён эллипсоид Красовского. Ориентировки эллипсоида Красовского в системах координат 1942 года и 1995 года отличаются незначительно. Расхождение координат пунктов в этих системах обусловлено, в основном, искажениями координат

системы 1942 года [10].

Оси системы СК-95 параллельны осям общеземной системы ПЗ-90, то есть связь между этими системами устанавливается только тремя параметрами переноса. Другое условие реализации системы заключалось в неизменности геодезических координат пункта Пулково, то есть координаты начала геодезической сети в системах СК-42 и СК-95 были приняты одинаковыми. Это нестандартное решение привело к тому, что поправки в координаты пунктов на Европейской части России и на юге Сибири оказались настолько минимальными, что не потребовалось переиздание карт до масштаба 1:10 000. А для районов северо-востока страны карты этого масштаба практически отсутствуют.

Точность привязки ее к центру масс Земли характеризуется средней квадратической ошибкой порядка 1 м. Координаты пунктов государственной геодезической сети (ГГС) в системе СК-95 имеют одинаковую точность для всей сети. Точность взаимного положения для смежных пунктов составляет 3–5 см, для пунктов, удаленных на 200–300 км — 20–30 см, для 500 км и более ошибка возрастает до 50–80 см. За отчетную поверхность принят референц-эллипсоид Красовского.

Постановлением Правительства РФ от 28 июля 2000 г. введена система геодезических координат 1995 г. (СК-95) для использования при осуществлении геодезических и картографических работ, начиная с 1 июля 2002 г. Введение системы координат СК-95 не решает полностью проблемы перевода всей системы геодезического обеспечения на современные спутниковые технологии. Для геодезического обеспечения территории России разработана программа создания государственной геодезической спутниковой сети.

В нашей стране с этой целью принята концепция построения трёх уровней государственной геодезической спутниковой сети. Эта концепция предусматривает построение:

- фундаментальной астрономо-геодезической сети (ФАГС);
- высокоточной геодезической сети (ВГС);
- спутниковой геодезической сети 1 класса (СГС-1).

ФАГС реализуется в виде системы закреплённых на всей территории России 50–70 пунктов со средними расстояниями между ними 600–1000 км. Часть этих пунктов (10–15) должны стать постоянно действующими астрономическими обсерваториями, оснащёнными радиотелескопами для наблюдений квазаров и спутниковыми приёмниками

GPS/ГЛОНАСС. Взаимное положение этих пунктов будет определяться с точностью в 1–2 см.

ВГС должна заменить звенья триангуляции 1 класса и представлять собой однородные по точности пространственные построения с расстояниями между смежными пунктами 150–300 км. Общее число пунктов ВГС должно составлять 500–700. При этом часть пунктов будет совмещена с пунктами ФАГС. Взаимное положение таких пунктов будет определяться с точностью 2–3 см.

СГС-1 должна заменить триангуляции 1–2 классов со средними расстояниями между пунктами 30–35 км, общим числом 10 000–15 000 и средней квадратической погрешностью взаимного положения 1–2 см.

По отношению к спутниковым сетям ФАГС, ВГС, СГС-1 существующие наземные геодезические сети 1–4 классов будут фактически являться сетями сгущения. Для спутниковых измерений сигналы и пирамиды не требуются.

## 6.2. Системы координат *WGS-84* и *ПЗ-90*

К началу космической эры в мире существовало несколько геодезических референчных систем, начала которых совмещались с геометрическими центрами различных эллипсоидов. Параметры референц-эллипсоидов (большая полуось  $a$  и сжатие  $f$ ), а также ориентировка различались между собой, поскольку они аппроксимировали лишь локальную поверхность Земли, как правило, в пределах территории той или иной страны. Например, национальная референчная система США *NAD-27* (начало в геометрическом центре эллипсоида Кларка  $a=6\,378\,249$  м,  $f=1:293,5$ ), национальная референчная система СССР (начало в геометрическом центре эллипсоида Красовского  $a=6\,378\,245$  м,  $f=1:298,3$ ).

В спутниковом геометрическом методе, который применялся в начале космической эры, искусственный спутник Земли рассматривался как подвижная визирная цель, и теория его движения в гравитационном поле Земли не использовалась.

Тем не менее, разнообразие средств спутниковых измерений (фотографические наблюдения на фоне звёзд, лазерные, доплеровские) делало спутниковые геометрические построения весьма надёжными. В результате таких наблюдений в 70-е годы прошлого века удалось построить мировую триангуляцию с длинными сторонами. При этом достигнута точность передачи координат на большие расстояния спутниковым гео-

метрическим методом порядка нескольких дециметров.

Методы космической геодезии позволили уже к середине семидесятых годов XX века соединить все имеющиеся референчные системы и построить общеземную систему координат. Первой такой системой была система *WGS-72* (*World Global System-72*), созданная в США на базе спутниковых измерений. В середине восьмидесятых годов была построена общеземная глобальная система *WGS-84* со следующими параметрами:  $a = 6\,378\,137$  м,  $f = 1:298,257223563$ .

Мировая геодезическая система *WGS-84* (*World Geodetic System-84*) была разработана Военно-картографическим агентством Министерства обороны США в результате модификации координатной системы *NSWC-9Z-2*, путем приведения ее в соответствие с данными Международного бюро времени. Для этого система *NSWC-9Z-2* была сдвинута на  $-4,5$  м по оси  $Z$ , повернута к западу на  $0,814''$  и масштабирована на  $-0,6 \cdot 10^{-6}$ . Начало системы *WGS-84* находится в центре масс Земли, ось  $Z$  направлена в Условный земной полюс (УЗП), установленный Международным бюро времени на эпоху 1984.0. Ось  $X$  находится на пересечении плоскости опорного меридиана *WGS-84* и плоскости экватора УЗП. Опорный меридиан является начальным (нулевым) меридианом, определенным МБВ на эпоху 1984.0. Ось  $Y$  дополняет систему до правой тройки векторов. Начало координатной системы *WGS-84* и ее оси также служат геометрическим центром и осями референц-эллипсоида *WGS-84*. Этот эллипсоид является эллипсоидом вращения. Его параметры почти идентичны параметрам международного эллипсоида *GRS 80*.

Система *WGS-84* используется как система для бортовых эфемерид спутников *GPS* с 23 января 1987 года, заменив собою *WGS-72*. Обе системы были получены на основе доплеровских измерений спутников *TRANSIT*. Носителями системы были пять станций Контрольного сегмента *GPS*. Точность привязки начальной реализации системы *WGS-84* к центру масс Земли не хуже, чем 1 м.

С середины 90-х годов XX века сеть станций *WGS-84* значительно выросла. В 1994 году Министерство обороны США ввело реализацию *WGS-84*, которая полностью базировалась на *GPS*-измерениях, а не на доплеровских измерениях. Эта новая реализация известна как *WGS-84(G730)*, где буква  $G$  стоит для обозначения *GPS*, а 730 обозначает номер недели (начиная с 0<sup>h</sup> UTC 2 января 1994 года), когда Национальное управление по отображению и картографированию (*NIMA*) начало

представлять свои орбиты *GPS* в этой системе. Следующая реализация *WGS-84*, названная *WGS-84(G873)*, также полностью основывалась на *GPS*-наблюдениях. Вновь буква *G* отражает этот факт, а 873 относится к номеру недели *GPS*, начавшейся в 0<sup>h</sup> UTC 29 сентября 1996 г. Хотя *NIMA* начало вычисление орбит *GPS* в этой системе с этой даты, сегмент Операционного контроля *GPS* не принимал *WGS-84(G873)* до 29 января 1997 г. Начало, ориентировка и масштаб *WGS-84(G873)* определены относительно принятых координат для 15 станций слежения *GPS*: 5 из них поддерживаются BBC, а 10 — *NIMA*. Система *WGS-84(G873)* приближена к *ITRF94* с субдециметровой точностью.

В 2001 г. Национальное управление по отображению и картованию совместно с Дальгреневским дивизионом военно-морского центра надводных вооружений провело 15-суточный сеанс наблюдений, в ходе которого выполнена привязка глобальной сети из 11 постоянных станций и шести станций Контрольного сегмента, управляемых BBC, к сети станций Международной *GPS*-службы. Координаты этих станций составили оперативную реализацию системы *WGS-84*, используемую МО США для высокоточных геодезических работ. Получены улучшенные оценки координат этих станций, привязанных к системе *ITRF-2000*, которые включены в оперативное использование *NIMA* и BBC в январе 2002 г. Стандартные отклонения станций по каждой координате составляют около 1 см. Полученному набору координат 17 станций было дано обозначение *WGS84(G1150)*; он включает в себя также набор принятых скоростей тектонических движений для станций на эпоху 2001.0. Это обозначение указывает, что координаты были получены с помощью *GPS* и были применены для образования точных *GPS*-эфемерид *NIMA*, начиная с 1150 недели *GPS*. Практически отсчетная основа *WGS-84(G1150)* идентична отсчетной основе *ITRF2000*.

Система *WGS* была построена при помощи спутниковых измерений, а ориентация её осей уточнялась с помощью РСДБ-наблюдений. Точность координат наземных пунктов в *WGS*-системе достигает 1–2 см, а точность расположения геометрического центра *WGS*-эллипсоида по отношению к центру масс Земли составляет около 10 см.

Такого же рода работа проводилась в СССР, а затем и в РФ. На основе наземных и спутниковых наблюдений, выполненных в период 1960–1990 гг. была создана общеземная система координат ПЗ-90 с

параметрами:  $a = 6\,378\,136$  м,  $f = 1:298,257839303$ . Постановлением Правительства РФ от 28 июля 2000 г. введена геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90) для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полётов и решения навигационных задач.

Параметры Земли 1990 года ПЗ-90 были определены Топографической службой Вооруженных сил Российской Федерации и включают:

фундаментальные астрономические и геодезические постоянные; характеристики координатной основы (параметры земного эллипсоида вращения, координаты пунктов, закрепляющих систему, параметры связи с другими системами координат);

планетарные модели нормального и аномального гравитационных полей Земли, локальные характеристики гравитационных полей (высоты геоида над общим земным эллипсоидом и аномалии силы тяжести).

Входящая в состав ПЗ-90 система координат иногда называется СГС-90 (Спутниковая геоцентрическая система 1990 г.). Параметры Земли ПЗ-90 заменили предыдущие модели ПЗ-77 и ПЗ-85. Параметры Земли ПЗ-90 получены по результатам почти 30 млн фотографических, радиодальномерных, доплеровских, лазерных и альтиметрических измерений со спутника Гео-ИК с привлечением радиотехнических и лазерных измерений дальностей до спутников системы ГЛОНАСС и «Эталон» [11]. Начало системы расположено в центре масс Земли. Ось  $Z$  направлена к среднему северному полюсу на среднюю эпоху 1900–1905 гг. (МУН). Ось  $X$  лежит в плоскости земного экватора эпохи 1900–1905 гг., и плоскость  $XOZ$  определяет положение нуля-пункта принятой системы счета долгот. Ось  $Y$  дополняет систему координат до правой тройки векторов. Спутниковая геоцентрическая система координат закреплена на территории СНГ координатами 30 опорных пунктов космической геодезической сети со средними расстояниями 1–3 тыс. км. Точность взаимного расположения пунктов характеризуется погрешностями в 10; 20 и 30 см для расстояний соответственно в 100; 1000 и 10000 км. Погрешности привязки СГС-90 к центру масс Земли по абсолютной величине не превышают 1,5 м. Планетарные модели гравитационного поля Земли получены в виде разложений в ряд по сферическим функциям до 36 и 200 степени и порядка, а также в виде системы точечных масс. Средняя квадратическая погрешность высоты геоида над эллипсоидом равна 1,5 м.

У систем координат ПЗ-90 и СК-95 соответствующие оси параллельны, масштабы одинаковы, а начала координат не совпадают, поэтому уравнения связи этих систем координат записываются в виде [9]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ПЗ-90}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{СК-95}} + \begin{bmatrix} 25,90 \\ -130,94 \\ -81,76 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Общеземные системы *WGS-84* и ПЗ-90 близки друг к другу и используются в глобальных навигационных спутниковых системах GPS и ГЛОНАСС. Различие систем *WGS-84* и ПЗ-90 сводится к небольшому развороту относительно оси аппликат и смещению начал координат по трём осям. Формулы для перехода от ПЗ-90 к *WGS-84* имеют вид [12]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{WGS-84}} = 0,88 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 1 & -0,82 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0,82 \cdot 10^{-6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ПЗ-90}} - \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,3 \\ 0,9 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

28 декабря 2012 года принято Постановление Правительства РФ № 1463 «О единых государственных системах координат». В соответствии с этим Постановлением устанавливаются следующие единые государственные системы координат:

геодезические системы координат 2011 года (ГСК-2011) — для использования при осуществлении геодезических и картографических работ;

общеземная геоцентрическая система координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90.11) — для использования в целях геодезического обеспечения орбитальных полётов и решения навигационных задач.

В этом же Постановлении устанавливается, что СК-95 и СК-42 применяются до 1 января 2017 года в отношении материалов, созданных с их использованием.

## ГЛАВА 7

# ПЛОСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА–КРЮГЕРА

### 7.1 Общие положения

При создании топографических карт используются различные картографические проекции, так как картографируемую поверхность Земли, принимаемую за эллипсоид вращения, нельзя развернуть на плоскости. По-другому можно сказать, что картографическая проекция представляет собой отображение поверхности эллипсоида на плоскости.

Общие уравнения картографических проекций имеют вид [1]:

$$x = f_1(B, L); \quad y = f_2(B, L), \quad (7.1)$$

где  $B, L$  — геодезические криволинейные координаты текущей точки на эллипсоиде;  $x, y$  — прямоугольные координаты изображения этой точки на плоскости в проекции, определяемой функциями  $f_1$  и  $f_2$ .

Свойства проекции задают функции  $f_1$  и  $f_2$ , вид которых может быть различен, поэтому и картографические проекции бывают разнообразными. В качестве примера можно назвать проекцию Гаусса–Крюгера, универсальную поперечно-цилиндрическую проекцию Меркатора (*UTM*), равноугольную коническую проекцию Ламберта, стереографическую проекцию Руссиля. Эти проекции имеют много общего, как по структуре используемых функций, так и по величине неизбежных искажений, появляющихся при использовании любой проекции.

В Российской Федерации для создания топографических карт используют в основном равноугольную проекцию Гаусса–Крюгера. Решение о применении этой проекции было принято Геодезическим комитетом в 1928 году [2]. В проекции Гаусса–Крюгера поверхность эллипсоида на плоскости отображается по меридианным зонам, ширина которых принимается равной шести градусам (для карт масштабов 1:500 000–1:10 000) и трём градусам (для карт масштабов 1:5 000–1:2 000).



Плоские прямоугольные координаты  $x, y$  в проекции Гаусса зависят от параметров координатной сетки. К параметрам координатной сетки относятся:

- долгота осевого меридиана первой зоны  $L_1^0$ ;
- координаты условного начала  $x_0, y_0$ ;
- ширина координатной зоны  $\Delta L$ ;
- масштаб на осевом меридиане  $m$ .

В России в шестиградусной проекции Гаусса–Крюгера эти параметры принимают следующие значения:  $L_1^0 = 3^\circ$ ;  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 500$  км;  $\Delta L = 6^\circ$ ;  $m = 1$ .

В проекции *UTM* они несколько иные:  $L_1^0 = 183^\circ$ ;  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 500$  км;  $\Delta L = 6^\circ$ ;  $m = 0,9996$ .

При вычислениях в проекции Гаусса применяется два вида плоских координат – истинные координаты  $x', y'$  и условные координаты  $x, y$ .

Начало истинных плоских прямоугольных координат каждой зоны находится в точке пересечения осевого меридиана зоны с экватором. На территории Российской Федерации принята нумерация зон, отличающаяся от нумерации колонн карты масштаба 1:1 000 000 на тридцать единиц, т.е.  $n = N - 30$ , где  $N$  — номер колонны листа карты масштаба 1:1 000 000.

В российских проекциях Гаусса в значениях ординат впереди обычно указывают номер соответствующей зоны. Тогда условные и истинные координаты связываются формулами

$$x = x_0 + x'; \quad y = n10^6 + y_0 + y'. \quad (7.2)$$

Долгота осевого меридиана зоны с номером  $n$  определяются по формуле

$$L_n^0 = L_1^0 + \Delta L(n - 1). \quad (7.3)$$

Масштаб в текущих точках российских проекций Гаусса–Крюгера вычисляется по формуле

$$m = 1 + \frac{l^2}{2} \cos^2 B + e'^2 \frac{l^2}{2} \cos^4 B + \frac{l^4}{24} (5 \cos^4 B - \sin^2 2B), \quad (7.4)$$

где  $l = L - L_n^0$  — долгота точки относительно осевого меридиана зоны;

$e' = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}$  — второй эксцентриситет.

С прямоугольными ординатами точки масштаб связан формулой

$$m = 1 + \frac{y'^2}{2R^2} + \frac{y'^4}{24R^4}, \quad (7.5)$$

где  $R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B}$  — средний радиус кривизны.

## 7.2. Методика вычисления прямоугольных координат Гаусса–Крюгера по криволинейным геодезическим координатам

Пусть даны геодезические координаты  $B, L$  какой-либо точки, расположенной в  $n$ -й зоне с осевым меридианом  $L_n^0$ , требуется вычислить плоские прямоугольные координаты  $x, y$  этой точки. Для вычисления прямоугольных координат  $x, y$  по геодезическим координатам можно применить следующие формулы, пригодные для любого эллипсоида [2].

Истинная абсцисса точки вычисляется по формуле

$$x' = X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + a_8 l^8 + \dots \quad (7.6)$$

Длину дуги меридиана  $X$  от экватора до параллели с широтой  $B$  данной точки можно вычислить по формуле

$$X = a_0 B - \sin 2B(p_1 + p_2 \sin^2 B + p_3 \sin^4 B). \quad (7.7)$$

Коэффициенты разложения вычисляются по следующим формулам:

$$p_1 = \frac{a_2^0 - a_4^0 + a_6^0}{2}; \quad p_2 = a_4^0 - \frac{8}{3}a_6^0; \quad p_3 = \frac{8}{3}a_6^0;$$

$$a_0 = a(1-e^2)C_0; \quad a_2^0 = a(1-e^2)C_2;$$

$$a_4^0 = a(1-e^2)C_4; \quad a_6^0 = a(1-e^2)C_6;$$

$$C_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8;$$

$$C_2 = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8;$$

$$C_4 = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8; \quad C_6 = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8;$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \sin 2B(k_1 + k_2 \sin^2 B + k_3 \sin^4 B + k_4 \sin^6 B); \\
a_4 &= \sin 2B(k_5 - k_6 \sin^2 B + k_7 \sin^4 B - k_8 \sin^6 B); \\
a_6 &= \sin 2B(k_9 - k_{10} \sin^2 B + k_{11} \sin^4 B - k_{12} \sin^6 B); \\
a_8 &= \sin 2B(k_{13} - k_{14} \sin^2 B + k_{15} \sin^4 B - k_{16} \sin^6 B);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{a}{4}; \quad k_2 = \frac{ae^2}{8}; \quad k_3 = \frac{3ae^4}{32}; \quad k_4 = \frac{5ae^6}{64}; \quad k_5 = \frac{a(5-e^2)}{48(1-e^2)^2}; \\
k_6 &= \frac{a(12+7e^2+e^4)}{96(1-e^2)^2}; \quad k_7 = \frac{a(16e^2+5e^4)}{128(1-e^2)^2}; \quad k_8 = \frac{7ae^4}{192(1-e^2)^2}; \\
k_9 &= \frac{a(61+270e^2)}{1440}; \quad k_{10} = \frac{a(360+2219e^2)}{2880}; \quad k_{11} = \frac{a(2+23e^2)}{24}; \\
k_{12} &= \frac{3ae^2}{8}; \quad k_{13} = \frac{277a}{16128}; \quad k_{14} = \frac{1211a}{13440}; \quad k_{15} = \frac{91a}{672}; \quad k_{16} = \frac{a}{16}.
\end{aligned}$$

Истинную ординату точки можно вычислить с помощью разложения

$$y' = b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + b_7 l^7 + \dots \quad (7.8)$$

Коэффициенты разложения вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \cos B(n_1 + n_2 \sin^2 B + n_3 \sin^4 B + n_4 \sin^6 B); \\
b_3 &= \cos B(n_5 - n_6 \sin^2 B + n_7 \sin^4 B - n_8 \sin^6 B); \\
b_5 &= \cos B(n_9 - n_{10} \sin^2 B + n_{11} \sin^4 B - n_{12} \sin^6 B); \\
b_7 &= \cos B(n_{13} - n_{14} \sin^2 B + n_{15} \sin^4 B - n_{16} \sin^6 B);
\end{aligned}$$

$$n_1 = a; \quad n_2 = \frac{ae^2}{2}; \quad n_3 = \frac{3ae^4}{8}; \quad n_4 = \frac{5ae^6}{16}; \quad n_5 = \frac{a}{6(1-e^2)};$$

$$n_6 = \frac{a(4-e^2)}{12(1-e^2)}; \quad n_7 = \frac{ae^4}{16(1-e^2)}; \quad n_8 = \frac{ae^4}{24(1-e^2)};$$

$$n_9 = \frac{a(5+4e^2+4e^4)}{120(1-e^2)^2}; \quad n_{10} = \frac{a(56+83e^2+59e^4)}{240(1-e^2)^2};$$

$$n_{11} = \frac{a(4+16e^2+9e^4)}{20(1-e^2)^2}; \quad n_{12} = \frac{a(24e^2+11e^4)}{48(1-e^2)^2}; \quad n_{13} = \frac{a(61+231e^2)}{5040(1-e^2)};$$

$$n_{14} = \frac{a(1324+5339e^2)}{10080(1-e^2)}; \quad n_{15} = \frac{a(22+95e^2)}{84(1-e^2)}; \quad n_{16} = \frac{a(12+55e^2)}{84(1-e^2)}.$$

### 7.3. Методика вычисления криволинейных геодезических координат по прямоугольным координатам Гаусса–Крюгера

Пусть даны прямоугольные координаты точки  $x, y$  и долгота осевого меридиана  $n$ -й зоны  $L_n^0$ . Требуется вычислить геодезические криволинейные координаты этой точки. Решение этой задачи для произвольного эллипсоида можно выполнить по формулам, приведённым в работе [2].

Геодезическая широта точки и геодезическая долгота точки относительно осевого меридиана зоны вычисляются по формулам:

$$B = B_0 + A_2 y'^2 + A_4 y'^4 + A_6 y'^6 + A_8 y'^8 + \dots; \quad (7.9)$$

$$l = B_1 y' + B_3 y'^3 + B_5 y'^5 + B_7 y'^7 + B_9 y'^9 + \dots, \quad (7.10)$$

где  $B_0$  — широта вспомогательной точки на осевом меридиане зоны с заданной абсциссой,

$$B_0 = \beta + \sin 2\beta(p'_1 - p'_2 \sin^2 \beta + p'_3 \sin^4 \beta); \quad \beta = \frac{x'}{a_0}. \quad (7.11)$$

Коэффициенты разложения можно вычислить по формулам:

$$a_0 = a(1 - e^2)C_0; \quad C_0 = 1 + \frac{3e^2}{4} + \frac{45e^4}{64} + \frac{175e^6}{256} + \frac{11025e^8}{16384};$$

$$p'_1 = q_2 + 2q_4 + 3q_6; \quad p'_2 = 4q_4 + 16q_6; \quad p'_3 = 16q_6;$$

$$q_2 = \frac{C_2}{2A_0} + \frac{C_2 C_4}{8A_0^2} - \frac{C_2^3}{16A_0^3}; \quad C_2 = \frac{3e^2}{4} + \frac{15e^4}{16} + \frac{525e^6}{512} + \frac{2205e^8}{2048};$$

$$q_4 = -\frac{C_4}{4A_0} + \frac{C_2^2}{4A_0^2}; \quad C_4 = \frac{15e^4}{64} + \frac{105e^6}{256} + \frac{2205e^8}{4096};$$

$$q_6 = \frac{C_6}{6A_0} - \frac{3C_2 C_4}{8A_0^2} + \frac{3C_2^3}{16A_0^3}; \quad C_6 = \frac{35e^6}{512} + \frac{315e^8}{2048};$$

$$A_2 = -\frac{1}{a^2 \cos^2 B} \sin 2B_0 (k'_1 - k'_2 \sin^2 B_0 + k'_3 \sin^4 B_0);$$

$$A_4 = \frac{1}{a^4 \cos^4 B} \sin 2B_0 (k'_4 - k'_5 \sin^2 B_0 + k'_6 \sin^4 B_0 - k'_7 \sin^6 B_0);$$

$$A_6 = -\frac{1}{a^6 \cos^6 B} \sin 2B_0 (k'_8 - k'_9 \sin^2 B_0 + k'_{10} \sin^4 B_0 - k'_{11} \sin^6 B_0);$$

$$A_8 = \frac{1}{a^8 \cos^8 B} \sin 2B_0 (k'_{12} - k'_{13} \sin^2 B_0 + k'_{14} \sin^4 B_0 - k'_{15} \sin^6 B_0);$$

$$B_1 = \frac{1}{a \cos B} (1 - n'_1 \sin^2 B_0 - n'_2 \sin^4 B_0 - n'_3 \sin^6 B_0);$$

$$B_3 = -\frac{1}{a^3 \cos^3 B} (n'_4 + n'_5 \sin^2 B_0 - n'_6 \sin^4 B_0 - n'_7 \sin^6 B_0);$$

$$B_5 = \frac{1}{a^5 \cos^5 B} (n'_8 + n'_9 \sin^2 B_0 + n'_{10} \sin^4 B_0 - n'_{11} \sin^6 B_0);$$

$$B_7 = -\frac{1}{a^7 \cos^7 B} (n'_{12} + n'_{13} \sin^2 B_0 + n'_{14} \sin^4 B_0 - n'_{15} \sin^6 B_0);$$

$$B_9 = \frac{1}{a^9 \cos^9 B} (n'_6 + n'_{17} \sin^2 B_0 + n'_{18} \sin^4 B_0 + n'_{19} \sin^6 B_0);$$

$$k'_1 = \frac{1}{4(1-e^2)}; \quad k'_2 = \frac{e^2}{2(1-e^2)}; \quad k'_3 = \frac{e^4}{4(1-e^2)}; \quad k'_4 = \frac{5+6e^2+3e^4}{48};$$

$$k'_5 = \frac{1+14e^2+15e^4}{24}; \quad k'_6 = \frac{8e^2+31e^4}{24}; \quad k'_7 = \frac{2e^4}{3}; \quad k'_8 = \frac{61+107e^2}{1440};$$

$$k'_9 = \frac{16+333e^2}{720}; \quad k'_{10} = \frac{2+87e^2}{180}; \quad k'_{11} = \frac{17e^2}{90}; \quad k'_{12} = \frac{277-1108e^2}{16128};$$

$$k'_{13} = \frac{29-116e^2}{4480}; \quad k'_{14} = \frac{41-164e^2}{3360}; \quad k'_{15} = \frac{17-68e^2}{5040};$$

$$n'_1 = \frac{e^2}{2}; \quad n'_2 = \frac{e^4}{8}; \quad n'_3 = \frac{e^6}{16}; \quad n'_4 = \frac{1}{6(1-e^2)}; \quad n'_5 = \frac{2-9e^2}{12(1-e^2)};$$

$$n'_6 = \frac{4e^2-39e^4}{48(1-e^2)}; \quad n'_7 = \frac{3e^4}{16(1-e^2)}; \quad n'_8 = \frac{5+6e^2+3e^4}{120};$$

$$n'_9 = \frac{192-240e^2-123e^4}{1280}; \quad n'_{10} = \frac{32-1376e^2+609e^4}{3840};$$

$$n'_{11} = \frac{e^2-69e^4}{240}; \quad n'_{12} = \frac{61+46e^2}{5040(1-e^2)}; \quad n'_{13} = \frac{958-1361e^2}{10080(1-e^2)};$$

$$n'_{14} = \frac{358 - 4395e^2}{10080(1 - e^2)}; \quad n'_{15} = \frac{815e^2 - 2}{10080(1 - e^2)}; \quad n'_{16} = 0,0038;$$

$$n'_{17} = 0,0524; \quad n'_{18} = \frac{18270 - 113789e^2}{362880}; \quad n'_{19} = \frac{1636 - 72123e^2}{362880}.$$

*Примечание.* В приложениях 2 и 3 использованы формулы преобразования координат применительно к эллипсоиду Красовского с параметрами:  $a=6\,378\,245$  м,  $\alpha=1:298,3$ .

**ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ  
КООРДИНАТ ИСЗ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ  
СТАНДАРТНОЙ ЭПОХИ ПО ЕГО ИСТИННЫМ  
ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ, ЗАДАНЫМ  
В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ЭПОХИ НАБЛЮДЕНИЯ**

**Формулировка задачи**

Из обработки наблюдений искусственного спутника Земли на момент времени  $UTC_s = 19^h 01^m 56,511^s$  получены истинные топоцентрические координаты ИСЗ  $\tilde{\alpha}'_{is} = 17^h 23^m 10,97^s$ ,  $\tilde{\delta}'_{is} = 63^\circ 36' 12,88''$ ,  $\tilde{r}'_{is} = 5882645,68$  м в системе координат эпохи наблюдения.

Требуется вычислить средние геоцентрические координаты ИСЗ  $(\alpha_s, \delta_s, r_s)$ , соответствующие положению средней точки весеннего равноденствия в стандартную эпоху J2000.0.

Геодезические координаты  $B_i = 44^\circ 57' 18,0''$ ,  $L_i = 2^h 16^m 15,867^s$   $H_i = 253,7$  м пункта земной поверхности заданы относительно референц-эллипсоида с параметрами  $a_e = 6\,378\,245$  м,  $f = 1/298,3$ . Координаты центра референц-эллипсоида  $\Delta X_0 = 25,0$  м,  $\Delta Y_0 = -141,0$  м,  $\Delta Z_0 = -80,0$  м в системе координат общего земного эллипсоида, ориентировка осей координат референцной системы  $\varepsilon_x = 0,10''$ ,  $\varepsilon_y = 0,35''$ ,  $\varepsilon_z = 0,66''$  относительно системы координат общего земного эллипсоида и масштабный коэффициент  $\beta_0 = 2,5 \cdot 10^{-7}$  заданы.

Координаты мгновенного полюса  $x_p = -0,0132''$ ,  $y_p = 0,1664''$  относительно Международного условного начала и поправка за переход от всемирного согласованного времени к всемирному времени  $\Delta UT1 = -0,3994^s$  известны.

**Алгоритм вычислений**

Вычисляем квадрат эксцентриситета референц-эллипсоида, радиус кривизны первого вертикала и координаты вектора пункта в референцной системе координат

$$e^2 = 2f - f^2 = 0,006693422;$$

$$N = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i}} = 6388928,086;$$

$$\vec{R}_{ref_i} = \begin{pmatrix} (N + H_i) \cos B_i \cos L_i \\ (N + H_i) \cos B_i \sin L_i \\ [N(1 - e^2) + H_i] \sin B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3745474,577 \\ 2532647,502 \\ 4484069,269 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем координаты вектора пункта в средней общеземной системе координат

$$\vec{R}_i = (1 + \beta_0) \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \vec{R}_{ref_i} + \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3745500,514 \\ 2532507,135 \\ 4483990,390 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем координаты вектора пункта в мгновенной общеземной системе координат

$$\vec{\tilde{R}}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{pmatrix} \vec{R}_i = \begin{pmatrix} 3745500,514 \\ 2532507,135 \\ 4483990,390 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем момент наблюдения ИСЗ по шкале всемирного времени, юлианскую дату, соответствующую моменту наблюдения, составляющую нутации в долготу  $\Delta\psi$  по формуле (3.1) и составляющую нутации в наклонности  $\Delta\varepsilon$  по формуле (3.2)

$$UT1 = UTC + \Delta UT1 = 19^h 01^m 56,1116^s;$$

$$JD = 17210135 + 367y - E \left\{ 7 \left[ \frac{y + E \frac{m+9}{12}}{4} \right] \right\} + E \frac{275m}{9} +$$

$$+ d + (UT1)^d = 2456119,293011^d;$$

$$\Delta\psi = +16,156''; \quad \Delta\varepsilon = -4,544''.$$

Вычисляем гринвичское звёздное время, соответствующее моменту наблюдения, формируем матрицу вращения Земли и вычисляем координаты вектора пункта в истинной равноденственной системе координат



на момент наблюдения

$$S = 6^h 41^m 50,54841^s + 8640184,812866^s t + 0,093104^s t^2 - 6,2^s 10^{-6} t^3 + \\ + UT1 + 0,06667 \Delta \psi \cos \varepsilon = 1174701,216^s;$$

$$W = \begin{pmatrix} -0,823251327 & -0,567677067 & 0 \\ 0,567677067 & -0,823251327 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{r}'_i = W^T \tilde{R}'_i = \begin{pmatrix} -1645842,046 \\ -4211124,606 \\ 4483990,390 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем истинные топоцентрические координаты вектора спутника в равноденственной системе координат на момент наблюдения

$$\tilde{r}'_{is} = \begin{pmatrix} \tilde{r}'_{is} \cos \tilde{\alpha}'_{is} \cos \tilde{\delta}'_{is} \\ \tilde{r}'_{is} \sin \tilde{\alpha}'_{is} \cos \tilde{\delta}'_{is} \\ \tilde{r}'_{is} \sin \tilde{\delta}'_{is} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -418330,994 \\ -2581628,302 \\ 5269318,237 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем истинные геоцентрические координаты вектора спутника в равноденственной системе координат на момент наблюдения

$$\tilde{r}'_s = \tilde{r}'_i + \tilde{r}'_{is} = \begin{pmatrix} -2064173,040 \\ -6792752,908 \\ 9753308,627 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем промежуток времени в юлианских столетиях, протекший от стандартной эпохи до момента наблюдения

$$t = \frac{JD - 2451545,0}{36525} = 0,125237317.$$

Вычисляем прецессионные параметры Ньюкома–Андруайе:

$$\zeta_A = 288,829''; \quad z_A = 288,842''; \quad \theta_A = 251,008''.$$

Формируем матрицу прецессии

$$P = \begin{pmatrix} 0,999995338 & -0,002800624 & -0,001216918 \\ 0,002800624 & 0,999996078 & -0,000001704 \\ 0,001216918 & -0,000001704 & 0,999999926 \end{pmatrix}.$$

Формируем матрицу нутации

$$N = \begin{pmatrix} 0,999999997 & -0,000071866 & -0,000031155 \\ 0,000071866 & 0,999999997 & 0,000022029 \\ 0,000031154 & -0,000022031 & 0,999999999 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем средние геоцентрические координаты вектора спутника в равноденственной системе координат на стандартную эпоху J2000.0

$$\vec{r}_s = P^T N^T \vec{r}_s = \begin{pmatrix} -2071502,985 \\ -6787027,913 \\ 9755739,801 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем полярные средние геоцентрические координаты спутника в равноденственной системе координат на стандартную эпоху J2000.0

$$\alpha_s = \arctg \frac{y_s}{x_s} = 253,027022594^\circ;$$

$$\delta_s = \arctg \frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} = 53,968657893^\circ;$$

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2} = 12063553,854 \text{ м.}$$

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ГАУССА-КРЮГЕРА ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ

### Формулировка задачи

Заданы криволинейные геодезические координаты  $B=53^{\circ} 10' 41,811''$ ,  $L=50^{\circ} 24' 05,989''$  пункта, относительно эллипсоида Красовского с параметрами  $a=6378245$  м — большая полуось,  $f=1:298,3$  — сжатие. Пункт расположен в 9-й зоне с осевым меридианом  $L_9^0=51^{\circ}$ .

Требуется вычислить плоские прямоугольные координаты  $x_{42}$ ,  $y_{42}$  этого пункта в системе координат СК-42.

### Алгоритм вычислений

1. Вычисляем радиус кривизны первого вертикала  $N$  для точки с заданной геодезической широтой

$$N = 6399698,902 - [21562,267 - (108,973 - 0,612 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B = 6391967,919 \text{ м.}$$

2. Вычисляем коэффициенты разложения  $a_k$

$$a_0 = 32140,404 - [135,3302 - (0,7092 - 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B = 32091,886;$$

$$a_3 = (0,3333333 + 0,001123 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,1666667 = -0,047;$$

$$a_4 = (0,25 + 0,00252 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,04166 = 0,048;$$

$$a_5 = 0,0083 - [0,1667 - (0,1968 + 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B = -0,026;$$

$$a_6 = (0,166 \cos^2 B - 0,084) \cos^2 B = -0,009.$$

3. Вычисляем долготу пункта относительно осевого меридиана зоны

$$l = L - L_9^0 = -0,01044294 \text{ рад.}$$

4. Вычисляем абсциссу пункта в системе координат СК-42

$$x = x_{42} = 6367558,4969B - \{a_0 - [0,5 + (a_4 + a_6 l^2) l^2] l^2 N\} \sin B \cos B = \\ = 5894731,543 \text{ м.}$$

5. Вычисляем ординату пункта относительно осевого меридиана зоны

$$y = [1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2] l N \cos B = -40005,441 \text{ м.}$$

6. Вычисляем ординату пункта в системе координат СК-42

$$y_{42} = y + \frac{L_9^0 + 3}{6} 1000000 + 500000 = 9459994,559 \text{ м.}$$

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ПО ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ ГАУССА–КРЮГЕРА

### Формулировка задачи

Даны прямоугольные координаты точки  $x_{42} = 5894731,543$  м,  $y_{42} = 9459994,559$  м в системе координат СК-42 и долгота осевого меридиана 9-й зоны  $L_9^0 = 51^\circ$ . Требуется вычислить геодезические криволинейные координаты этой точки относительно эллипсоида Красовского с параметрами  $a = 6378245$  м — большая полуось,  $f = 1:298,3$  — сжатие.

### Алгоритм вычислений

1. Вычисляем широту точки, находящейся на осевом меридиане с заданной абсциссой  $x_{42}$

$$\beta = \frac{x_{42}}{6367558,4969} = 0,92574439;$$

$$B_x = \beta + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22 \cos^2 \beta) \cos^2 \beta] \cos^2 \beta\} \times \\ \times \sin \beta \cos \beta \cdot 10^{-10} = 0,92816232.$$

2. Вычисляем коэффициенты разложения  $b_k$

$$b_2 = (0,5 + 0,003369 \cos^2 B_x) \sin B_x \cos B_x = 0,24045877;$$

$$b_3 = 0,333333 - (0,166667 - 0,001123 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x = 0,27361645;$$

$$b_4 = 0,25 + (0,16161 + 0,00562 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x = 0,30877010;$$

$$b_5 = 0,2 - (0,1667 - 0,0088 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x = 0,14126194.$$

3. Вычисляем радиус кривизны первого вертикала точки, находящейся на осевом меридиане с заданной абсциссой  $x_{42}$

$$N_x = 6399698,902 - [21562,267 - (108,973 - 0,612 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x] \times \\ \times \cos^2 B_x = 6391968,459.$$

4. Вычисляем долготу точки относительно осевого меридиана

$$z = \frac{y}{N_x \cos B_x} = -0,01044325;$$

$$l = [1 - (b_3 - b_5 z^2) z^2] z = -0,01044294 \text{ рад.}$$

5. Вычисляем долготу и широту точки относительно эллипсоида Красовского

$$L = L_9^0 + l = 0,87967498 \text{ рад} = 50^\circ 24' 05,989'';$$

$$B = B_x - [1 - (b_4 - 0,12 z^2) z^2] z^2 b_2 = 0,92813609 \text{ рад} = 53^\circ 10' 41,811''.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вахрамеева Л.А.* Картография: учебник для вузов. –М.: Недра, 1981, 224 с.
2. *Герасимов А.П.* Спутниковые геодезические сети. –М: ООО «Издательство «Проспект», 2012. –176 с.
3. *Жаров В.Е.* Сферическая астрономия. –М.: Издательство Век 2, 2006. –480 с.
4. *Одуан К., Гино Б.* Измерение времени. Основы GPS. –М.: Техносфера, 2002. –400 с.
5. *Крылов В.И.* Космическая геодезия: учебное пособие – М.: МИИГАиК. 2002, –168 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: учебное пособие. В 10 томах, Т.2. Теория поля. –М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1988, –512 с.
7. *Огородова Л.В.* Высшая геодезия. Часть III. Теоретическая геодезия: учебник для вузов. –Геодезкартиздат, 2006. –384 с.
8. *Дирак П.А.М.* Общая теория относительности. Бишкек.: Айнштайн, 1997, 64 с.
9. *Паули В.* Теория относительности / Пер. с нем. и англ., под ред. В.Л. Гинзбурга и В.П. Фролова. –М.: Наука. 1991. –328 с.
10. *Пеллинен Л.П.* Высшая геодезия (Теоретическая геодезия). —М.: Недра, 1978. –264 с.
11. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности. –Волгоград.: Изд-во Платон. 2000. –696 с.
12. *Система геодезических параметров Земли «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90) /* Галазин В.Ф., Каплан Б.Л., Лебедев М.Г., Максимов В.Г., Петров Н.В., Сидорова-Бирюкова Т.Л. / Под общей ред. Хвостова В.В. –М.: 1998.
13. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике /* Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. –М.: Наука, 1976.

14. Расширенное объяснение к «Астрономическому ежегоднику» / Труды ИПА РАН. Вып. 10. –СПб.: ИПА РАН, 2004, –488 с.

15. *Capitaine, N., Guinot, B., McCarthy, D.D.* 2000, “Determination of the Celestial Ephemeris of Origin and of UT1 in the International Celestial Reference Frame”, *Astron. Astrophys.*, 355, 398–405.

16. *Mathews, P.M., Herring, T.A. and Buffet, B.A.* 2002, “Modeling of nutation series for nonrigid Earth, and insights into the Earth’s interior”, *J. Geophys. Res.*, 107, B4,10.1029/2001JB000390.

17. *McCarthy, D.D., Petit, G.* (eds), 2004, *IERS Conventions (2003)*, IERS Technical Note 32, BKG, Frankfurt am Main.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ГЛАВА 1

<b>Релятивистские системы координат и шкалы времени</b> .....	3
1.1. Системы координат ICRS, ITRS и их практические реализации ICRF, ITRF .....	3
1.2. Четырёхмерная метрика в Солнечной системе .....	10
1.3. Связь промежутков барицентрического координатного времени TCB с промежутками геоцентрического координатного времени TCG .....	12
1.4. Связь промежутков геоцентрического координатного времени TCG с промежутками земного времени TT .....	14
1.5. Всемирное, звёздное и атомное время .....	15

### ГЛАВА 2

<b>Трёхмерные системы координат и их преобразования</b> .....	21
2.1. Прямоугольные и полярные координаты .....	21
2.2. Преобразование координат посредством вращений .....	22
2.3. Преобразование прямоугольных координат с использованием углов Эйлера .....	24
2.4. Преобразование прямоугольных координат с использованием углов Кардано .....	26

### ГЛАВА 3

<b>Небесные системы координат</b> .....	28
3.1. Равноденственные истинные и средние координаты .....	28
3.2. Движение экватора и эклиптики вследствие прецессии и нутации .....	33
3.3. Учёт влияния прецессии .....	34
3.4. Учёт влияния нутации .....	37

### ГЛАВА 4 .....

<b>Земные системы координат</b> .....	38
4.1. Гринвичские средние и мгновенные координаты .....	38
4.2. Учёт движения земных полюсов .....	39
4.3. Геодезические криволинейные и прямоугольные координаты .....	42

4.4. Связь между общеземной и референцной системами координат .....	44
4.5. Локальные системы координат <i>епи</i> .....	45
ГЛАВА 5.....	47
<b>Связь между небесными и земными координатами</b> .....	47
5.1. Связь между истинными равноденственными и мгновенными гринвичскими координатами .....	47
5.2. Преобразование координат точки, заданных в небесной системе, к координатам точки в земной системе .....	48
5.3. Концепция невращающегося начала .....	49
ГЛАВА 6	
<b>История создания и современная концепция развития Российской координатной основы</b> .....	56
6.1. Системы координат СК-42 и СК-95 .....	56
6.2. Системы координат <i>WGS-84</i> и ПЗ-90 .....	66
ГЛАВА 7	
<b>Плоские прямоугольные координаты в проекции Гаусса–Крюгера</b> .....	71
7.1 Общие положения .....	71
7.2. Методика вычисления прямоугольных координат Гаусса– Крюгера по криволинейным геодезическим координатам .....	73
7.3. Методика вычисления криволинейных геодезических координат по прямоугольным координатам Гаусса–Крюгера.....	75
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	
<b>Вычисление средних геоцентрических координат ИСЗ в системе координат стандартной эпохи по его истинным топоцентрическим координатам, за- данным в системе координат эпохи наблюдения</b> .....	78
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	
<b>Вычисление прямоугольных координат Гаусса–Крюгера по криволинейным геодезическим координатам</b> .....	82
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 .....	84
<b>Вычисление криволинейных геодезических координат по прямоугольным координатам Гаусса–Крюгера</b> .....	84
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	86

*Учебное издание*

**Виктор Иванович Крылов**

**КООРДИНАТНО-ВРЕМЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В ГЕОДЕЗИИ**

Редактор *Е.А. Евтеева*

Компьютерная верстка *Б.В. Кузнецов*

Графика *А.Ю. Боков*

Подписано в печать 20.08.2014. Гарнитура Таймс

Формат 60×90/16. Объем 7,0 усл. печ. л.

Тираж 300 экз. Заказ №117 Цена договорная

Издательство МИИГАиК

105064, Москва, Гороховский пер., 4

Отпечатано в типографии МИИГАиК