Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии

О.В. Исакова, Л.А. Сайкова, М.Д. Улымжиев

Кратные интегралы

Рекомендовано учебно-методическим объединением
вузов Российской Федерации по образованию
в области геодезии и фотограмметрии
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
120100 «Геодезия и дистанционное зондирование»
с присвоением квалификации (степени) бакалавр

Москва
2014

УДК 517.37

Рецензенты:
доцент кафедры высшей математики ГСУВПО МГУПП **А.О. Тимохина**;
доцент кафедры высшей математики МИИГАиК **К.И. Лоссов**

Составители: О.В. Исакова, Л.А. Сайкова, М.Д. Улымжиев
Кратные интегралы: учебное пособие. — М.: МИИГАиК, 2014. — 36 с.

Данное учебное пособие к решению задач раздела «Кратные интегралы» по теме «Двойные интегралы» написано в соответствии с утверждённой программой курса «Математика», рекомендовано кафедрой высшей математики, утверждено к изданию редакционно-издательской комиссией геодезического факультета.

В пособии содержатся 30 вариантов индивидуальных расчётных заданий различной степени сложности, что позволяет преподавателю выбирать задачи, соответствующие уровню подготовки студентов. Приводятся необходимые теоретические сведения, дан разбор решения типовых заданий, что позволяет студентам самостоятельно работать над практическим материалом курса.

Электронная версия учебного пособия размещена на сайте библиотеки МИИГАиК http://library.miigaik.ru

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

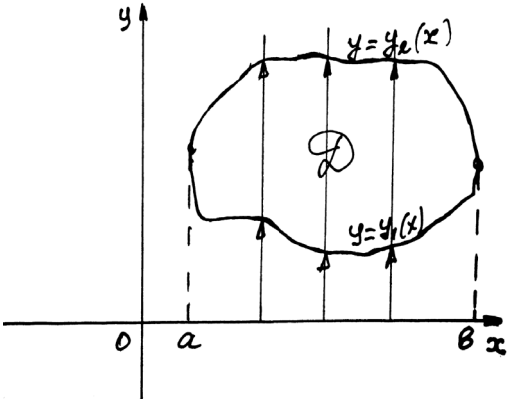
1. Основные понятия

Пусть в замкнутой ограниченной области D задана непрерывная функция $z=f(x,y)$. Разбиваем произвольным образом область D на «элементарные площадки» d_i, площади которых ΔS_i, а диаметры (наибольшее расстояние между граничными точками области d_i) — через λ_i.

На каждой элементарной площадке d_i произвольно выберем точку $M_i(\xi_i)$, найдём значение $f(M_i)=f(\xi_i)$ и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$. Будем измельчать разбитие, устремив $n\to\infty$. Тогда максимальное $\lambda_i\to 0$. Рассмотрим предел интегральной суммы.

Если $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ существует и ($max\ \lambda_i\to 0$) конечен, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x)$ по области D и обозначается $\iint_D f(x,y)dxdy$.

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов. Зададим область D неравенствами $a\le x\le b$. Для каждого значения x из этого отрезка y будет вычисляться по формулам $y=y_1(x)$ (нижняя граница рис.) и $y=y_2(x)$ (верхняя кривая).



Тогда $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$

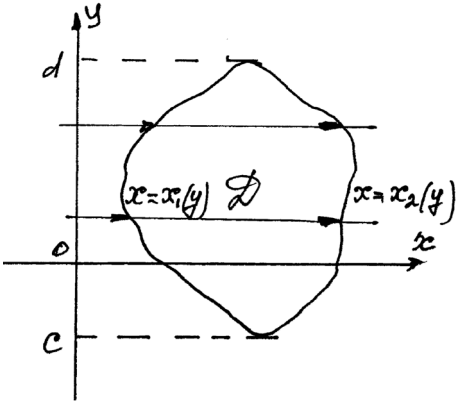
Если задать область D другой системой неравенств: $\begin{cases} c \le y \le d \\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y) \end{cases}$,

то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d d\acute{o} \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$.

При вычислении двойного интеграла следует учитывать, что в случае сложной области надо пользоваться свойством аддитивности области интегрирования, т.е.

$$\iint\limits_D fdxdy = \iint\limits_{D_1} fdxdy + \iint\limits_{D_2} fdxdy + \iint\limits_{D_3} fdxdy,$$

$$\text{если } D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$



P.S.: Надо помнить, что внешние интегралы всегда имеют постоянные пределы, а внутренние, как правило, переменные (как функции переменной внешнего интеграла).

Пример 1

Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле двумя способами.

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2 \\ y \ge -x^2 \\ x \le 0 \end{cases}$$

Решение:

$x^2 + y^2 = 2$ — окружность радиуса $\sqrt{2}$. $x^2 + y^2 \le 2$ — круг радиуса $\sqrt{2}$.

Найдём точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 2$ и параболы $y = -x^2$.

Тогда $x^2 = -\acute{o}$, подставим в уравнение окружности: $-\acute{o} + y^2 = 2$;

$$y^2 - y - 2 = 0;$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \qquad y_1 = -1, \quad y_2 = 2$$

Так как $y = -x^2 < 0$, то решением является корень $y = -1$.

Тогда $x^2 = 1$ è $x_1 = 1, x_2 = -1$.

Изобразим область интегрирования D:

1) $x^2 + y^2 \le 2$ — круг радиуса $\sqrt{2}$;

2) $y \ge -x^2$ — область, лежащая выше параболы $y = -x^2$;

3) $\tilde{o} \le 0$ — полуплоскость, расположенная слева от оси OY.

Из двух ветвей параболы $y = -x^2$, левая ветвь соответствует отрицательным значениям x. Возьмем точку (–1,0) и подставим в каждое из неравенств, получим верные числовые неравенства. Следовательно, точка расположена в нужной части плоскости.

Расставим пределы интегрирования первым способом по области слева и справа от $x = -1$:

Из уравнения окружности получим $\acute{o} = \pm\sqrt{2 - \tilde{o}^2}$, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy =$$

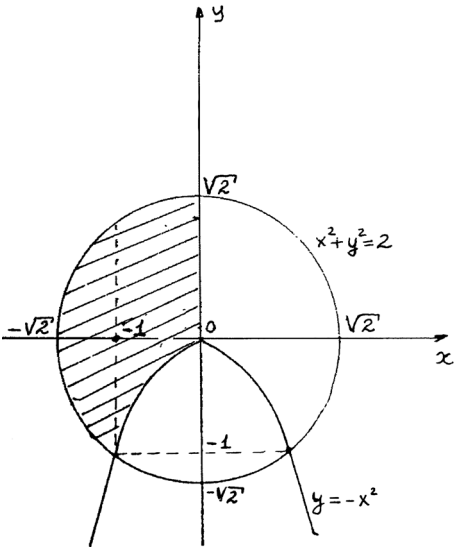
$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$$

При расстановке пределов интегрирования вторым способом опять будет два интеграла по области ниже и выше оси OX:

Из уравнения окружности получим $\tilde{o} = \pm\sqrt{2 - \acute{o}^2}$, и левая ветвь параболы $y = -x^2$ примет вид $\tilde{o} = -\sqrt{-\acute{o}}$, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{-\sqrt{-y}} fdx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-\acute{o}^2}} fdx.$$



Пример 2

Поменять пределы интегрирования в двойном интеграле (изменить порядок интегрирования):

$$\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-\tilde{o}^2}} f(\tilde{o},\acute{o})dy, \text{ ãäå } \grave{a} > 0.$$

Решение:

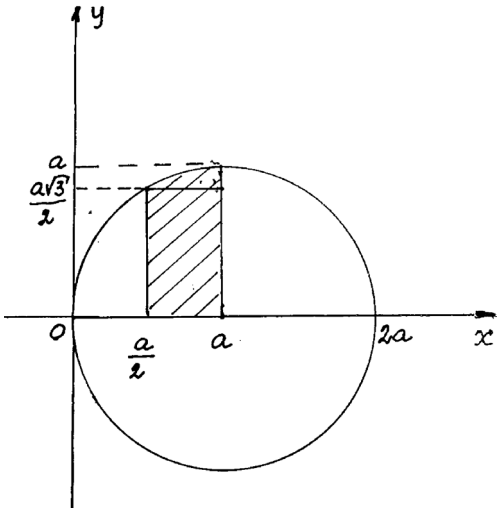
1) Сначала восстановим область интегрирования.

Из внешнего интеграла видно, что x изменяется от $\frac{a}{2}$ до a, а ордината изменяется от $y=0$ (ось OX) до $y=\sqrt{2ax-x^2}$. Отсюда $y^2=2ax-x^2$.

После выделения полного квадрата получим уравнение окружности $(x-a)^2+y^2=a^2$. Отсюда: $x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$.

Для расстановки пределов вторым способом найдем точку пересечения с прямой $\tilde{o}=\frac{a}{2}$. Подставим $\tilde{o}=\frac{a}{2}$ в уравнение окружности: $y^2=a^2-\frac{a^2}{4}$ $y^2=\frac{3a^2}{4}$. Тогда $y=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, т.к. $y>0$. При $x=a$ $y=a$.

Строим область D:



Область сложная, т.е. будет два интеграла

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{a}{2}}^{a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-\tilde{o}^2}}fdy=\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}dy\int_{\frac{a}{2}}^{a}fdx+\int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a}dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a}fdx.$$

Упражнение 1

Расставить пределы интегрирования в $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ по области D двумя способами.

1. 1) D: $x^2+y^2 \le 1;\ y \ge 0;\ \ y \le x$

   2) D: $x=1;\ y=\sqrt[3]{x}\ ;\ y=-x^2$

2. 1) D: $x^2+y^2 \le 4;\ \ y \ge x;\ \ x \ge 0$

   2) D: $x^2+y^2 = 1\ ;\ x=\sqrt{y}\ ;\ \ x \ge 0$

3. 1) D: $x^2+y^2 \le 9;\ \ y \ge x;\ \ x \le 0$

   2) D: $x^2+y^2 = 2;\ \ x=\sqrt{y}\ ;\ \ y \ge 0$

4. 1) D: $x^2+y^2 \le 1;\ y \le -x;\ \ y \ge 0$

   2) D: $x=2\ ;\ \ y = x^3;\ \ y = -\sqrt[3]{x}$

5. 1) D: $x^2+y^2 \le 16;\ \ y \ge x;\ \ y \le 0$

   2) D: $x^2+y^2= 4;\ \ x= -\sqrt{y}\ ;\ \ x \le 0$

6. 1) D: $x^2+y^2 \ge 9;\ \ y \ge x;\ \ y \ge -2$

   2) D: $x^2+y^2=1;\ \ x= -\sqrt{y}\ ;\ \ y \ge 0$

7. 1) D: $x^2+y^2 \le 4;\ \ y \le x;\ \ y \ge 0$

   2) D: $x^2+y^2=1;\ \ y= x^2;\ \ y=0$

8. 1) D: $x^2+y^2 \le 1;\ \ y \ge x;\ \ x \ge 0$

   2) D: $x=3\ ;\ \ y= x^2;\ \ y = -\sqrt[3]{x}$

9. 1) D: $x^2+y^2 \le 9;\ \ y \ge -x;\ \ x \le 0$

   2) D: $x= -1;\ \ y= -\sqrt[3]{x}\ ;\ \ y= -x^2$

10. 1) D: $x^2+y^2 \le 4;\ \ y \le -x;\ \ y \ge 0$

    2) D: $x^2+y^2=4;\ \ x=\sqrt{-y}\ ;\ \ x \ge 0$

11. 1) D: $x^2+y^2 \le 3;\ \ y \ge x;\ \ y \ge 0$

    2) D: $x=1;\ \ y= x^2;\ \ y= -\sqrt{x}$

12. 1) D: $x^2+y^2 \le 1;\ \ y \le x;\ \ x \le 0$

    2) D: $x^2+y^2=4\ ;\ x= \sqrt{-y}\ ;\ \ x \le 0$

13. 1) D: $x^2+y^2 \ge 4;\ \ y \le x\ ;\ \ y \ge -2$

    2) D: $x^2+y^2=1;\ \ x= -\sqrt{-y}\ ;\ \ x \le 0$

14. 1) D: $x^2+y^2 \ge 9;\ \ y \le x;\ \ x \le 3$

    2) D: $x=1;\ \ y= \sqrt{x}\ ;\ \ y = -x^3$

15. 1) D: $x^2+y^2 \ge 1;\ \ y \ge -x;\ \ x \le 1$

    2) D: $x^2+y^2=4;\ x= -\sqrt{-y}\ ;\ \ y \le 0$

16. 1) D: $x^2+y^2 \ge 4;\ \ y \ge x;\ \ y<2$

    2) D: $x^2+y^2=1;\ \ y= \sqrt{x}\ ;\ \ y \ge 0$

17. 1) D: $x^2+y^2 \geq 9$; $y=-x$; $-3 \leq x \leq 0$

2) D: $x=2$; $y=\sqrt{x}$; $y=-x^2$

18. 1) D: $x^2+y^2 \geq 4$; $y \geq x$; $x \geq -2$

2) D: $x^2+y^2=4$; $y=x^3$; $x \geq 0$

19. 1) D: $x^2+y^2 \leq 1$; $y \geq x$; $x \geq 0$

2) D: $x=-2$; $y=-x^3$; $y=\sqrt[3]{x}$

20. 1) D: $x^2+y^2 \leq 3$; $y \leq x$; $x \leq 0$

2) D: $x^2+y^2=9$; $x=-\sqrt{-y}$; $x \leq 0$

21. 1) D: $x^2+y^2 \leq 9$; $y \geq -x$; $x \geq 0$

2) D: $x^2+y^2=1$; $y=\sqrt{x}$; $x \geq 0$

22. 1) D: $x^2+y^2 \geq 4$; $y \leq x$; $x \leq 2$

2) D: $x=1$; $y=x^3$; $y=-\sqrt{x}$

23. 1) D: $x^2+y^2 \geq 2$; $y \geq x$; $x \geq 2$

2) D: $x^2+y^2=9$; $x=-\sqrt{-y}$; $y \leq 0$

24. 1) D: $x^2+y^2 \geq 4$; $y \geq x$; $y \leq 2$

2) D: $x^2+y^2=4$; $y=-\sqrt{x}$; $x \geq 0$

25. 1) D: $x^2+y^2 \geq 4$; $y \geq -x$; $y \leq 2$

2) D: $x=2$; $y=$; $y=x^2$; $y=\sqrt[3]{x}$

26. 1) D: $x^2+y^2 \geq 1$; $y \leq -x$; $x \geq -2$

2) D: $x^2+y^2=4$; $y=-\sqrt{x}$; $y \leq 0$

27. 1) D: $x^2+y^2 \geq 9$; $y \leq -x$; $y \geq -3$

2) D: $y=1$; $y=\sqrt{-x}$; $y=-x^3$

28. 1) D: $x^2+y^2 \leq 4$; $y \leq x$; $x \leq 0$

2) D: $x^2+y^2=9$; $y=\sqrt{-x}$; $x \leq 0$

29. 1) D: $x^2+y^2 \leq 1$; $y \geq x$; $x \geq 0$

2) D: $x^2+y^2=2$; $y=\sqrt{-x}$; $y \geq 0$

30. 1) D: $x^2+y^2 \leq 4$; $y \leq -x$; $y \geq -1$

2) D: $y=1$; $y=-\sqrt{x}$; $x=-\sqrt{y}$

Упражнение 2

Поменять пределы интегрирования.

1. 1) $\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx$

2) $\int_1^0 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f dy$

2. 1) $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx$

2) $\int_1^0 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f dy$

3. 1) $\int_{0}^{\sqrt{3}} dy \int_{\sqrt{4-x^2-2}}^{y^3} fdx + \int_{\sqrt{3}}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdx$

2) $\int_{-1}^{0} dx \int_{-x^2 2}^{x^2} fdy$

4. 1) $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} fdx$

2) $\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x^2} fdy$

5. 1) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} fdx + \int_{1}^{b} dy \int_{\ln y}^{0} fdx$

2) $\int_{0}^{1} dx \int_{\sin x}^{\cos x} fdy$

6. 1) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} fdx + \int_{1}^{b} dy \int_{\ln y}^{0} fdx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{y} fdx$

7. 1) $\int_{0}^{\frac{1}{4}} dx \int_{0}^{\sin x} fdy + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{0}^{\cos x} fdy$

2) $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{-\sqrt{y}} fdx$

8. 1) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} fdx$

2) $\int_{0}^{1} dx \int_{x^2-2}^{-x^2} fdy$

9. 1) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^3} fdy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} fdy$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{-\sqrt{4-(y+2)^2}} fdx$

10. 1) $\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} fdy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} fdy$

2) $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{1-y}}^{b} fdx$

11. 1) $\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} fdy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{0} fdy$

2) $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} fdx$

12. 1) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} fdy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} fdy$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-(2+y)}^{y^3} fdx$

13. 1) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} fdx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} fdx$

2) $\int_1^0 dx \int_{x^2}^{b} fdy$

14. 1) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} fdy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} fdx$

2) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} fdx$

15. 1) $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} fdx$

2) $\int_{-1}^{0} dx \int_{x^3}^{2-x^2} fdy$

16. 1) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx$

2) $\int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{2-x^2} fdy$

17. 1) $\int_0^1 dy \int_0^{y} fdx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} fdx$

2) $\int_1^0 dx \int_{x^2}^{b} fdy$

18. 1) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} fdx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} fdx$

2) $\int_1^0 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} fdy$

19. 1) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} fdy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} fdy$

2) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{2-x} fdy$

20. 1) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\arcsin y} fdx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_0^{\arccos y} fdx$

2) $\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{-\sqrt{2-x^2}} fdy$

21. 1) $\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_0^{\sqrt{-y}} fdx$

2) $\int_{-2}^{0} dy \int_{-\sqrt{4-(y+2)^2}}^{-\sqrt{2-y^2}} fdx$

22. 1) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int_1^b dy \int_{-1}^{\ln y} fdx$

2) $\int_{-1}^{0} dx \int_{-2-x}^{x^3} fdy$

23. 1) $\int_{\sqrt{-2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} fdy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} fdy$

2) $\int_{0}^{\sqrt{-2}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-y} fdx$

24. 1) $\int_{-2}^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2-2}}^{0} fdy$

2) $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} fdx$

25. 1) $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} fdy + \int_{1}^{b} dx \int_{\ln x}^{1} fdy$

2) $\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} fdy$

26. 1) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} fdx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} fdx$

2) $\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} fdy$

27. 1) $\int_{0}^{\frac{1}{4}} dy \int_{0}^{\sin y} fdx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{0}^{\cos y} fdx$

2) $\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} fdy$

28. 1) $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} fdy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} fdy$

2) $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} fdx$

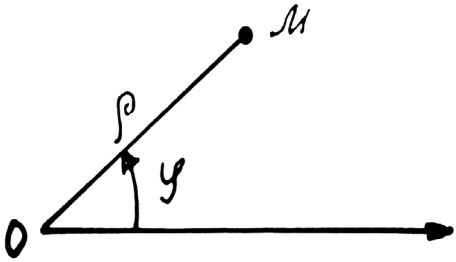
29. 1) $\int_{0}^{1} dy \int_{-(2+y)}^{\sqrt{y}} fdx + \int_{1}^{b} dy \int_{\ln y}^{1} fdx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{y^2-\sqrt{4-(y-2)^2}}^{2-y^2} fdx$

30. 1) $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} fdx$

2) $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{2-\sqrt{4-(y-2)^2}} fdx$

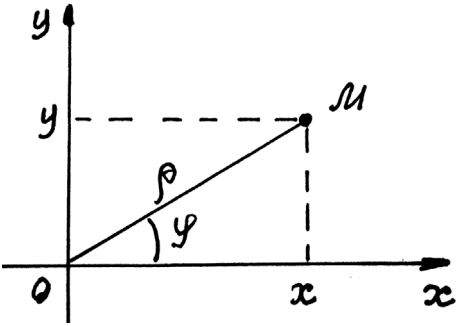
2. Расстановка пределов в полярной системе координат



В полярной системе координат положение точки на плоскости задается углом φ и расстоянием ρ (ρ≥0) от точки до полюса. Положительное направление отсчета углов против хода часовой стрелки.

При совмещении полярной системы координат с декартовой, полюс совмещается с началом координат и ось *OX* — с полярной осью, а ось *OУ* — числовая прямая, перпендикулярная оси *OX* и проходящая через полюс.

Из решения прямоугольного треугольника получаем формулы перехода из декартовой системы координат в полярную: $\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{matrix}$



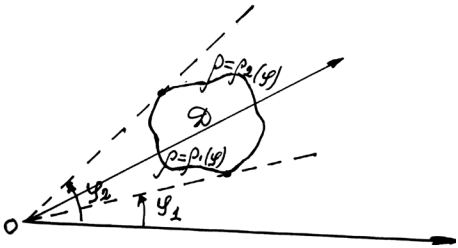
Если функции $x=\varphi(u,v)$ и $y=\psi(u,v)$ имеют в некоторой области D^* плоскости OUV непрерывные частные производные и отличный от нуля определитель (якобиан): $J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$,

а функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то справедлива формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(x(u,v);y(u,v))\left|J\right|dudv.$$

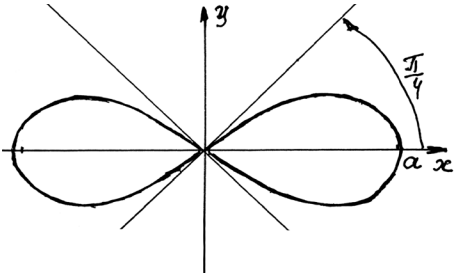
В введённой выше полярной системе координат области D и D^* выглядят одинаково. Якобиан $J(\rho;\varphi)=\rho$. Тогда формула замены переменных имеет вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\rho\text{ños}\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$



Пусть область D имеет вид, изображенный на рисунке. Все ее точки лежат между лучами φ_1 и φ_2, а луч, выходящий из полюса, пересекает границу D не более чем в двух точках, т.е. на кривой $\rho=\rho_1(\varphi)$, ближайшей к полюсу, и на $\rho=\rho_2(\varphi)$.

Тогда $\iint\limits_D f(\rho;\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho.$



Пример 1

Расставить пределы интегрирования в полярной системе координат по области D: правый лепесток лемнискаты Бернулли $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

Решение:

Перейдем к полярной системе координат:

$$(\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi)^2 = a^2(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi); \qquad (a>0);$$

$$\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) \Rightarrow \rho^2 = a^2\cos 2\varphi \Rightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi};$$

$$\iint\limits_D f(\rho;\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho;\varphi)\,\rho d\rho.$$

Пример 2

Расставить пределы интегрирования по области D: $\rho=-\cos\varphi$; $\rho=-2\sin\varphi$.

Решение:

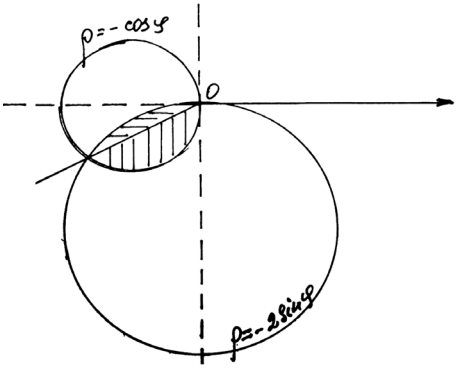
Найдем угол, соответствующий точке пересечения кривых

$$\begin{cases}\rho=-\cos\varphi\\ \rho=-2\sin\varphi\end{cases} \Rightarrow -\cos\varphi=-2\sin\varphi \Rightarrow tg\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{1}{2}+\pi.$$

Тогда наша область состоит из 2-х частей: выше луча $\varphi = arctg\frac{1}{2} + \pi$ расположена кривая $\rho = -2\sin\varphi$; ниже — $\rho = -\cos\varphi$.

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\pi}^{\pi + arctg\frac{1}{2}} d\varphi \int\limits_0^{-2\sin\varphi} f(\rho;\varphi)\rho d\rho +$$

$$+ \int\limits_{\pi + arctg\frac{1}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{-Cos\varphi} f(\rho;\varphi)\rho d\rho$$



Замечание:

Получить в полярной системе координат уравнения окружностей

1) $x^2 + y^2 = R^2$;

2) $x^2 + ax + y^2 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + ay = 0$.

Решение:

1) $x^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = R^2$

$$\rho^2 = R^2 \qquad \rho = R$$

$$x^2 + ax + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi + a\rho\cos\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 0$$

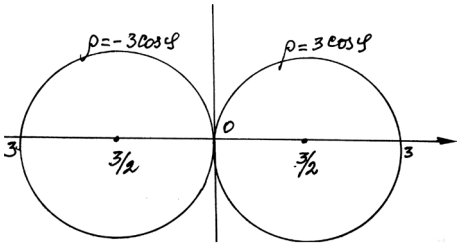
2) $(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + a\,p\cos\varphi = 0$

$$\rho^2 + a\rho\cos\varphi = 0 \Rightarrow \rho = -a\cos\varphi$$

Например:

$\rho = 3\cos\varphi$ è $\rho = -3\cos\varphi$.

При $a < 0$ — окружность расположена справа от полюса, проходит через полюс; центр $\frac{|a|}{2}$, где $|a|$ — диаметр.



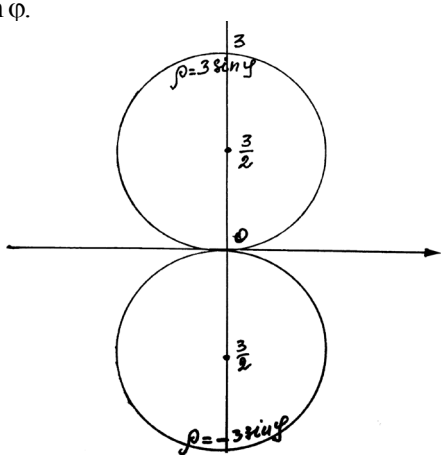
При $a>0$ — окружность проходит через полюс, расположена слева, диаметр a, радиус $\frac{a}{2}$.

3) $$x^2+y^2+ay=0 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi+a\rho\sin\varphi+\rho^2\sin\varphi=0$$
$$x^2+(y+\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4} \Rightarrow \rho=-a\sin\varphi.$$

Окружность лежит выше полярной оси при $a<0$, ниже полярной оси при $a>0$; проходит через полюс, радиус $\frac{a}{2}$, диаметр a.

Например:

$\rho=3\sin\varphi$ è $\rho=-3\sin\varphi$.



Упражнение 3

Расставить пределы интегрирования в полярной системе координат.

1. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$; $y\ge x$; $y\ge -x$ b) D: $\rho=\cos\varphi$; $\rho=3\cos\varphi$

2. a) D: $x^2+y^2=3$; $x^2+y^2=6$; $y\ge \frac{x}{\sqrt{3}}$; $y\ge -x$ b) D: $\rho=\sin\varphi$; $\rho=3\sin\varphi$

3. a) D: $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=9$; $y\le x$; $y\le \frac{x}{\sqrt{3}}$ b) D: $\rho=-\cos\varphi$; $\rho=-2\cos\varphi$

4. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=9$; $y\le x$; $y\ge \frac{x}{\sqrt{3}}$ b) D: $\rho=-\sin\varphi$; $\rho=-2\sin\varphi$

5. a) D: $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=16$
$y \le -x$; $y \le x\sqrt{3}$

b) D: $\rho = 2\cos\varphi$; $\rho = 4\cos\varphi$;
$\varphi = \frac{\pi}{4}$

6. a) D: $x^2+y^2=2$; $x^2+y^2=8$
$y \ge x$; $y \le -\sqrt{3}x$

b) D: $\rho = \cos\varphi$; $\rho = 3\cos\varphi$
$\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$

7. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$
$y \le x$; $y \le -x$

b) D: $\rho = 2\cos\varphi$; $\rho = 6\cos\varphi$
$\varphi = 0$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

8. a) D: $x^2+y^2=3$; $x^2+y^2=6$
$y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$; $y \ge -x$

b) D: $\rho = \cos\varphi$; $\rho = 4\cos\varphi$
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

9. a) D: $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=9$
$y \ge x$; $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$

b) D: $\rho = \sin\varphi$; $\rho = -2\sin\varphi$
$\varphi = 0$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$

10. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$
$y \le x$; $y \le -\sqrt{3}x$

b) D: $\rho = 2\sin\varphi$; $\rho = 4\sin\varphi$
$\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

11. a) D: $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=16$
$y \ge -x$; $y \ge x\sqrt{3}$

b) D: $\rho = \sin\varphi$; $\rho = 3\sin\varphi$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

12. a) D: $x^2+y^2=2$; $x^2+y^2=8$
$y \le x$; $y \ge x\sqrt{3}$

b) D: $\rho = 2\sin\varphi$; $\rho = 5\sin\varphi$
$\varphi = \frac{3\pi}{4}$; $\varphi = \pi$

13. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$
$y \ge x$; $y \le -x$

b) D: $\rho = -\cos\varphi$; $\rho = -\cos\varphi$
$\varphi = \frac{3\pi}{4}$; $\varphi = \pi$

14. a) D: $x^2+y^2=3$; $x^2+y^2=6$
$y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$; $y \le -x$

b) D: $\rho = -2\cos\varphi$; $\rho = -4\cos\varphi$
$\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

15. a) D: $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=9$
$y \le x$; $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$

b) D: $\rho=-2\cos\varphi$; $\rho=-6\cos\varphi$
$\varphi=-\frac{3\pi}{4}$; $\varphi=-\frac{3\pi}{2}$

16. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=9$
$y \ge x$; $y \ge x\sqrt{3}$

b) D: $\rho=-2\cos\varphi$; $\rho=-5\cos\varphi$
$\varphi=-\frac{3\pi}{4}$; $\varphi=-\frac{\pi}{2}$

17. a) D: $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=16$
$y \le x$; $y \le x\sqrt{3}$

b) D: $\rho=\cos\varphi$; $\rho=\sin\varphi$

18. a) D: $x^2+y^2=2$; $x^2+y^2=8$
$y \le x$; $y \le -x\sqrt{3}$

b) D: $\rho=\cos\varphi$; $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$

19. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=5$
$y \ge x\sqrt{3}$; $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$

b) D: $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$; $\rho=\sin\varphi$

20. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$
$y \le x$; $y \ge -x$

b) D: $\rho=-2\cos\varphi$; $\rho=2\sin\varphi$

21. a) D: $x^2+y^2=3$; $x^2+y^2=6$
$y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$; $y \le -x$

b) D: $\rho=-\cos\varphi$; $\rho=\sqrt{3}\sin\varphi$

22. a) D: $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=9$
$y \le x$; $y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$

b) D: $\rho=-\sqrt{3}\cos\varphi$; $\rho=\sin\varphi$

23. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$
$y \ge x$; $y \le x\sqrt{3}$

b) D: $\rho=\cos\varphi$; $\rho=-\sin\varphi$

24. a) D: $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=16$
$y \ge -x$; $y \le x\sqrt{3}$

b) D: $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$; $\rho=-\sin\varphi$

25. a) D: $x^2+y^2=2$; $x^2+y^2=8$
$y \ge x$; $y \le -\sqrt{3}x$

b) D: $\rho=\cos\varphi$; $\rho=-\sqrt{3}\sin\varphi$

26. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=5$
$y \le x\sqrt{3}$; $y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

b) D: $\rho=-2\cos\varphi$; $\rho=-2\sin\varphi$

27. a) D: $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=16$
$y \ge x\sqrt{3}$; $y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

b) D: $\rho=-\cos\varphi$; $\rho=-\sqrt{3}\sin\varphi$

28. a) D: $x^2+y^2=3$; $x^2+y^2=8$
$y \ge x\sqrt{3}$; $y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

b) D: $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$; $\rho=-\sin\varphi$

29. a) D: $x^2+y^2=5$; $x^2+y^2=9$
$y \le x\sqrt{3}$; $y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

b) D: $\rho=\sqrt{2}\sin\varphi$; $\rho=\sqrt{6}\cos\varphi$

30. a) D: $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=5$
$y \ge x\sqrt{3}$; $y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

b) D: $\rho=\sqrt{2}\cos\varphi$; $\rho=-\sqrt{6}\sin\varphi$

3. Вычисление двойных интегралов

Двойной интеграл сводится к повторным:

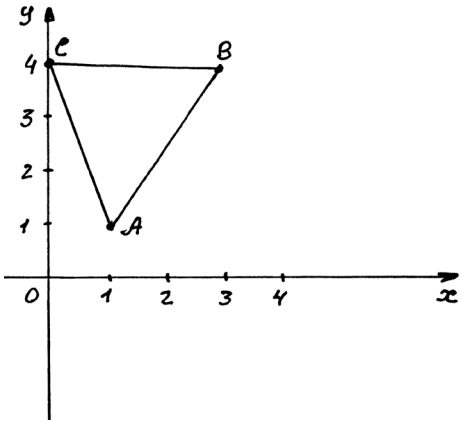
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

В повторных интегралах сначала считается внутренний определенный интеграл либо по переменной y (в 1-ом случае), либо по переменной x (во 2-ом случае). Затем по формуле Ньютона–Лейбница подставляются пределы интегрирования, результат выносится во внешний интеграл и досчитывается. Результатом вычисления является число.

Пример 1

Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D \frac{\tilde{o}+1}{\acute{o}}\,dxdy$, где область D — треугольник с вершинами $A(1,1)$; $B(3,4)$ и $C(0,4)$.

Решение:



Если внимательно посмотреть на область D, то ясно, что расстановку пределов надо начинать с переменной y, т.к. прямая BC параллельна оси OX. Для вычисления интегралов надо получить уравнение прямых (AC) и (AB).

Уравнение прямой, проходящей через 2 точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Тогда

$$(AB):\ \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}(y-1)+1 \Rightarrow \tilde{o} = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3};$$

$$(AC):\ \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-1}{4-1} \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow x = -\frac{y-1}{3}+1 \Rightarrow x = -\frac{y}{3}+\frac{4}{3}.$$

Тогда

$$\iint\limits_D \frac{x+1}{y}\,dxdy = \int\limits_1^4 \frac{dy}{y} \int\limits_{-\frac{y}{3}+\frac{4}{3}}^{\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}} (x+1)\,dx = \int\limits_1^4 \frac{dy}{y} \frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-\frac{y}{3}+\frac{4}{3}}^{\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \frac{1}{ó}\left(\left(\frac{2}{3}ó+\frac{1}{3}+1\right)^2 -\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{ó}{3}+\frac{4}{3}+1\right)^2\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \frac{1}{y}\left(\frac{4}{9}y^2+\frac{16}{9}y+\frac{16}{9}-\frac{49}{9}+\frac{14}{9}y-\right.$$

$$\left.-\frac{y^2}{9}\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \frac{1}{y}\left(\frac{1}{3}y^2+\frac{10}{3}y-\frac{11}{3}\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \left(\frac{1}{3}y+\frac{10}{3}-\frac{11}{3y}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{6}+\frac{10}{3}y-\frac{11}{3}\ln y\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{6}-\frac{1}{6}+\frac{40}{3}-\frac{1}{3}-\frac{11}{3}\ln 4\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{15}{6}+\frac{39}{3}-\frac{11}{3}\ln 4\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+13-\frac{11}{3}\ln 4\right) = \frac{31}{4}-\frac{11}{3}\ln 2.$$

Упражнение 4

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, если D — треугольник с — вершинами *A, B, C*.

1. $\iint\limits_D xydxdy$ — D: A (0, 0), B(1, 0), C(1, 2)
2. $\iint\limits_D (x+y)^2\,dxdy$ — D: A (0, 0), B(2, 0), C(2, 2)
3. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ — D: A (0, 0), B(-1, 0), C(-1, 2)
4. $\iint\limits_D xdxdy$ — D: A (0, 0), B(-2, 2), C(0, 2)
5. $\iint\limits_D ydxdy$ — D: A (0, 0), B(-1, 0), C(-1, 2)
6. $\iint\limits_D (2x+y)dxdy$ — D: A (0, 0), B(-1,-2), C(-0,-2)
7. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ — D: A (0, 0), B(-1,-2), C(-1, 0)
8. $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$ — D: A (0, 0), B(1,-2), C(0,-2)

9. $\iint\limits_D (x-2y)dxdy$ D: A (0, 0), B(1, 0), C(0, 3)

10. $\iint\limits_D (2x+\frac{y}{2})dxdy$ D: A (0, 0), B(-1, 0), C(0, 4)

11. $\iint\limits_D (x+\frac{y}{3})dxdy$ D: A (0, 0), B(-2, 0), C(0,-4)

12. $\iint\limits_D (\frac{x}{2}-y)dxdy$ D: A (0, 0), B(3, 0), C(0,-3)

13. $\iint\limits_D (\frac{x}{2}+y)dxdy$ D: A (1, 1), B(1, 4), C(5, 1)

14. $\iint\limits_D (3x-1)dxdy$ D: A (-1, 4) B(-1,4) C-2,-1)

15. $\iint\limits_D (x+1)dxdy$ D: A (-1,-1), B(-1, 0), C(-1, 2)

16. $\iint\limits_D (3x+1)xdxdy$ D: A (-1,-1), B(-1,-5), C(3,-1)

17. $\iint\limits_D (x-3y)dxdy$ D: A (2, 2), B(2, 6), C(0, 2)

18. $\iint\limits_D (x+3y)dxdy$ D: A (-2, 1), B(-2, 4), C(4, 1)

19. $\iint\limits_D \frac{x+y}{2}dxdy$ D: A (-1, 1), B(-1, 5), C(-6, 1)

20. $\iint\limits_D (x-y+1)dxdy$ D: A (1, 1), B(1, 5), C(0, 1)

21. $\iint\limits_D (x+3y-1)dxdy$ D: A (-1, 1), B(-1, 6), C(7, 1)

22. $\iint\limits_D (\frac{x-3y}{2}+1)dxdy$ D: A (1, 1), B(1, 4), C(2, 1)

23. $\iint\limits_D (x+4y)dxdy$ D: A (-2,-2), B(-2, 4), C(5,-2)

24. $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$ D: A (-2, 2), B(-2,-4), C(-4, 2)

25. $\iint\limits_D (x-4y)dxdy$ D: A (1, 1), B(1,-6), C(4,-1)

26. $\iint\limits_D (2x-3y)dxdy$ D: A (1, 4), B(1, 5), C(5, 4)

27. $\iint\limits_D (3x+2y)dxdy$ D: A (2,-2), B(2, 5), C(6,-2)

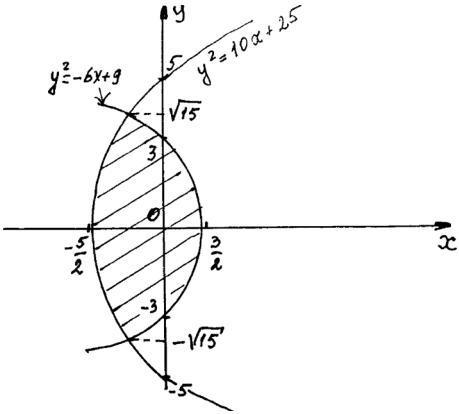
28. $\iint\limits_D (x-\frac{y}{2})dxdy$ D: A (-2,-2), B(-2, 6), C(6,-2)

29. $\iint\limits_D (2x+2y-1)dxdy$ D: A (-1,-3), B(-1,-5), C(-7,-3)

30. $\iint\limits_D (y+2)dxdy$ D: A (1,-3), B(1,-1), C(5,-3)

4. Вычисление площадей

а) Площадь плоской фигуры D в прямоугольных координатах выражается двойным интегралом $S=\iint\limits_D dxdy$



Пример 1

Найти площадь, ограниченную параболами $y^2=10x+25$ и $y^2=-6x+9$.

Решение:

Точки пересечения парабол

$$\begin{cases} y^2=10x+25 \\ y^2=-6x+9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x+25=-6x+9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x=-16 \Rightarrow x=-1; y=\pm\sqrt{15}.$$

Для упрощения вычислений расстановку пределов надо начинать с ординаты.

$$S=\int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int\limits_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx=\int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy\cdot \tilde{o}\Big|_{\frac{\tilde{o}^2-25}{10}}^{\frac{9-\tilde{o}^2}{6}}=\int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}}(-\frac{y^2}{10}+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}-\frac{y^2}{6})dy=$$

$$=\int\limits_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}}(4-\frac{4}{15}y^2)dy=(-\frac{4}{15})\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}}+4y\Big|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}}=-\frac{4}{45}\cdot 2(\sqrt{15})^3+4\cdot 2\sqrt{15}=$$

$$=-\frac{8\cdot 15\sqrt{15}}{45}+8\sqrt{15}=-\frac{8\sqrt{15}}{3}+8\sqrt{15}=\frac{16\sqrt{15}}{3}.$$

б) Площадь плоской фигуры D в полярной системе координат выражается двойным интегралом $S = \iint\limits_{D^*} \rho d\rho d\varphi$.

Пример 2

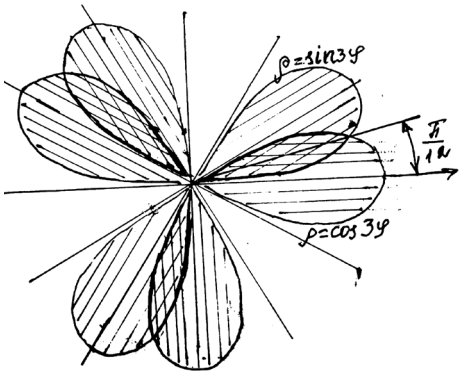
Найти площадь одного лепестка фигуры заданной в полярной системе координат. D: $\rho = \sin 3\varphi$; $\rho = \cos 3\varphi$.

Решение:

n — лепестковая «роза» строится следующим образом: каждая четверть делится на n частей; величина угла между двумя соседними лучами: $\dfrac{\pi}{2n}$.

Первый лепесток $\rho = \cos n\varphi$ строится по полярной оси между лучами, ближайшими к полярной оси; у кривой $\rho = \sin n\varphi$ первый лепесток касается полярной оси. Ось симметрии — первый луч, второй луч касается лепестка. Далее два сектора пропускаются, в следующие два сектора вписывается следующий лепесток, и т.д.

Первый лепесток заданной фигуры расположен в углу $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$.



Угол пересечения двух кривых:

$\sin 3\varphi = \cos 3\varphi \Rightarrow tg 3\varphi = 1 \Rightarrow$

$3\varphi = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{12}$.

Ниже луча $\varphi = \dfrac{\pi}{12}$ границей области служит кривая $\rho = \sin 3\varphi$, выше — $\rho = \cos 3\varphi$.

В полярной системе координат $S = \iint p d\rho d\varphi$. Тогда

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} d\varphi \int\limits_0^{\sin 3\varphi} \rho d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_0^{\cos 3\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{\sin 3\varphi} + \int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{\cos 3\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 3\phi d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi d\phi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1-\cos 6\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} d\varphi =$$

$$=\frac{1}{4}(\varphi-\frac{\sin 6\varphi}{6})\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{12}}+\frac{1}{4}(\varphi+\frac{\sin 6\varphi}{6})\Bigg|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{48}-\frac{1}{24}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{48}+$$

$$+\frac{1}{24}\sin\pi-\frac{1}{24}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{24}=\frac{\pi-1}{24}.$$

Упражнение 5

Найти площадь плоской фигуры.
(В полярной системе координат — площадь одного лепестка).

1. 1) $y=5x;\ y=-x^2-6$
   2) $\rho=\cos 2\varphi$

2. 1) $x=4y;\ x=-y^2+5$
   2) $\rho=\cos 4\varphi;\ \rho=\sin 4\varphi$

3. 1) $y=-x;\ y=x^2-2$
   2) $\rho=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 5\varphi;\ \rho=\sin 5\varphi$

4. 1) $x=3y;\ x=y^2-4$
   2) $\rho=\cos 3\varphi$

5. 1) $x=-5y;\ x=y^2-6$
   2) $\rho=\cos 5\varphi;\ \rho=\sin 5\varphi$

6. 1) $x=-5y;\ x=y^2-6$
   2) $\rho=\sin 2\varphi$

7. 1) $x=5y;\ x=y^2-6$
   2) $p=\sqrt{3}\cos 2\varphi;\ \rho=\sin 2\varphi$

8. 1) $x=-4y;\ x=y^2-6$
   2) $\rho=\sin 3\varphi$

9. 1) $y=-2x;\ y=x^2-3$
   2) $\rho^2=1;\ \rho=2\sin 3\varphi$

10. 1) $y=x;\ y=-x^2+2$
    2) $\rho=\cos 4\varphi$

11. 1) $x=4y;\ x=y^2-5$
    2) $\rho=\cos 2\varphi;\ \rho=\sin 2\varphi$

12. 1) $y=2x;\ y=x^2-3$
    2) $\rho=\sqrt{3}\cos 3\varphi$

13. 1) $x=-y;\quad x=y^2-2$

2) $\rho=\sin 4\varphi$

14. 1) $y=5x;\quad y=x^2-6$

2) $\rho=\frac{1}{2}\cos 6\varphi;\ \rho=\sin 6\varphi$

15. 1) $x=-5y;\ x=y^2-6$

2) $p=\sqrt{3}\cos 4\varphi;\ \rho=\sin 4\varphi$

16. 1) $y=-3x;\ y=x^2-4$

2) $\rho=\cos 5\varphi$

17. 1) $y=2x;\ y=-x^2+3$

2) $\rho^2=1;\ \rho=2\cos 2\varphi$

18. 1) $x=y;\quad x=y^2-3$

2) $\rho=\cos 3\varphi;\ \rho=\sin 3\varphi$

19. 1) $y=3x;\ y=x^2-4$

2) $p=\sqrt{3}\cos 5\varphi;\ \rho=\sin 5\varphi$

20. 1) $x=-2y;\ x=y^2-3$

2) $\rho=\sin 5\varphi$

21. 1) $y=-5x;\ y=x^2-6$

2) $\rho=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 2\varphi;\ \rho=\sin 2\varphi$

22. 1) $y=-4x;\ y=x^2-5$

2) $\rho=2;\ \rho=4\sin 6\varphi$

23. 1) $x=y;\quad x=-y^2+2$

2) $\rho=\cos 6\varphi$

24. 1) $x=-3y;\quad x=y^2-5$

2) $\rho^2=3;\ \rho=2\sin 3\varphi$

25. 1) $y=4x;\ y=x^2-5$

2) $\rho=\cos 6\varphi;\ \rho=\sin 6\varphi$

26. 1) $x=2y;\quad x=y^2-3$

2) $\rho^2=3;\ \rho=2\sin 5\varphi$

27. 1) $x=2y;\quad x=-y^2+3$

2) $\rho=\sin 6\varphi$

28. 1) $y=-5x;\quad y=x^2-6$

2) $p=\sqrt{3}\cos 6\varphi;\ \rho=\sin 6\varphi$

29. 1) $y=4x;\quad y=-x^2+5$

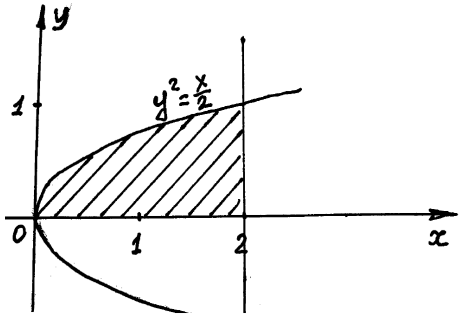
2) $\rho=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 3\varphi;\ \rho=\sin 3\varphi$

30. 1) $y=3x;\quad y=-x^2+4$

2) $\rho=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 4\varphi;\ \rho=\sin 4\varphi$

5. Вычисление массы плоской пластины с заданной функцией распределения плотности μ(*x*, *y*)

Масса плоской пластины с заданной функцией распределения плотности μ(*x*, *y*) вычисляется по формуле: $\grave{I} = \iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy$



Пример

Найти массу плоской пластины, ограниченной областью *D*, с заданной функцией распределения плотности

$$\mu(\tilde{o},\acute{o}) = \frac{7}{2}\tilde{o}^2 + 6\acute{o}$$

$$D: \tilde{o} = 2,\ \acute{o} = 0,\ \acute{o}^2 = \frac{\tilde{o}}{2}$$

Решение:

$$\grave{I} = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{7}{2}x^2 + 6y\right)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \left(\frac{7}{2}x^2 + 6y\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \left(\frac{7}{2}x^2 y + \frac{6}{2}y^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}} = \int\limits_0^2 \left(\frac{7}{2}x^2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + 3\cdot\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{7}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{7}\cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2}} + 3 = 8 + 3 = 11$$

Упражнение 6

Найти массу плоской пластины, ограниченной областью *D*, с заданной функцией распределения плотности μ($\tilde{o}$, $\acute{o}$).

1. *D*: *x=0, y=4,* $y = \frac{1}{2x}$, $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$ $\qquad \mu(x,y) = xy$

2. *D*: *x=2, y=0,* $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ $\qquad \mu(x,y) = \frac{x}{y}$

3. D: $x=0,\ y=3,\ y=3x^2,\ y=-\dfrac{3}{x}$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{y}{x}$

4. D: $x=3,\ y=0,\ y=x^3,\ y=\dfrac{1}{x}$ $\qquad \mu(x,y)=x^2y$

5. D: $x=9,\ y=0,\ y=\dfrac{1}{2x},\ y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ $\qquad \mu(x,y)=y^2x$

6. D: $x=4,\ y=0,\ y=2x^2,\ y=\dfrac{2}{x}$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$

7. D: $x=0,\ y=3,\ y=\dfrac{3}{2}x^2,\ y=-\dfrac{3}{2}x$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$

8. D: $x=-3,\ y=0,\ y=-\dfrac{1}{x},\ y=-x^3$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$

9. D: $x=0,\ y=9,\ y=3x,\ y=3\sqrt{x}$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$

10. D: $x=4,\ y=0,\ y=\dfrac{3}{2}x,\ y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ $\qquad \mu(x,y)=x+y$

11. D: $x=3,\ y=0,\ y=3x^2,\ y=\dfrac{3}{x}$ $\qquad \mu(x,y)=x+2y$

12. D: $x=0,\ y=3,\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x,\ y=\sqrt{3}x^2$ $\qquad \mu(x,y)=y-x$

13. D: $x=0,\ y=3,\ y=\dfrac{1}{x},\ y=x^3$ $\qquad \mu(x,y)=2y-x$

14. D: $x=0,\ y=9,\ y=\dfrac{3}{2}x,\ y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{x+y}{2}$

15. D: $x=4,\ y=0,\ y=\dfrac{3}{x},\ y=3\sqrt{x}$ $\qquad \mu(x,y)=2xy$

16. D: $x=-2,\ y=0,\ y=x^2,\ y=-\dfrac{1}{x}$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{x}{2}(y+3)$

17. D: $x=0,\ y=8,\ y=2x^2,\ y=\dfrac{1}{4x}$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{y}{2}(x-1)$

18. D: $x=-3,\ y=0,\ y=-\dfrac{1}{x},\ y=-x^3$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{x+2y}{2}$

19. D: $x=0,\ y=4,\ y=3\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{x}$ $\qquad \mu(x,y)=x(y+1)$

20. D: $x=8,\ y=0,\ y=\dfrac{1}{2x},\ y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ $\qquad \mu(x,y)=y(x+1)$

21. D: $x=-4,\ y=0,\ y=2x^2,\ y=-\dfrac{2}{x}$ $\qquad \mu(x,y)=x(y-1)$

22. D: $x=4,\ y=0,\ y=\dfrac{8}{x},\ y=2x^3$ $\qquad \mu(x,y)=y(x-1)$

23. D: $x=0,\ y=3,\ y=-\dfrac{4}{x},\ y=-\dfrac{x^3}{4}$ $\qquad \mu(x,y)=2x-3y$

24. D: $x=0,\ y=16,\ y=\dfrac{1}{4x},\ y=\dfrac{\sqrt{x}}{4}$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{x+y}{2}$

25. D: $x=9,\ y=0,\ y=\dfrac{3}{2x},\ y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{x-y}{2}$

26. D: $x=3,\ y=0,\ y=3x^2,\ y=-\dfrac{3}{x}$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{y-x}{3}$

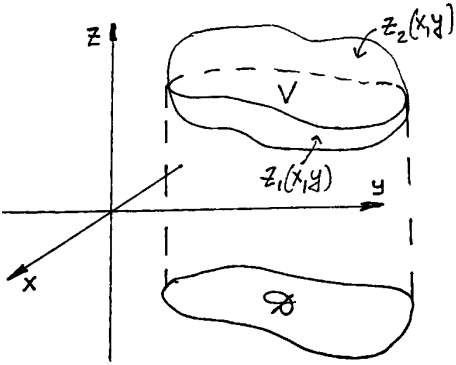
27. D: $x=4,\ y=0,\ y=\dfrac{1}{4x},\ y=4x^3$ $\qquad \mu(x,y)=\dfrac{xy}{3}$

28. D: $x=0,\ y=4,\ y=-2x^3,\ y=-\dfrac{1}{8x}$ $\qquad \mu(x,y)=3x(y+1)$

29. D: $x=0,\ y=3,\ y=\dfrac{3}{2x},\ y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ $\qquad \mu(x,y)=2x(y-1)$

30. D: $x=12,\ y=0,\ y=\dfrac{3}{x},\ y=3\sqrt{x}$ $\qquad \mu(x,y)=y(2x+1)$

6. Вычисление объема с помощью двойного интеграла



Объём тела вычисляется по формуле

$$V = \iint_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))\,dx\,dy$$

Область D — проекция тела на плоскость XOY.

Пример 1

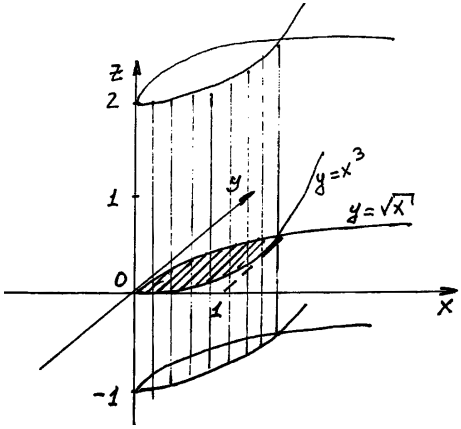
Найти объём тела, ограниченного областью V.

V: $\acute{o} = \tilde{o}^3$, $\acute{o} = \sqrt{\tilde{o}}$, $z = -1$, z 2.

$z = 2$.

Решение:

Тело, объём которого необходимо вычислить, имеет вид на рисунке.



Точка пересечения кривых в плоскости XOY: при $z = 0$.

Так как $\acute{o} = \tilde{o}^3$, $\acute{o} = \sqrt{\tilde{o}}$, то

$$\tilde{o}^3 = \sqrt{\tilde{o}}$$

$$\tilde{o}^6 - \tilde{o} = 0$$

$$\tilde{o} = 0, \quad \tilde{o} = 1$$

$$V = \iint_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (2-(-1))\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} 3\,dy = 3\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = 3 \cdot \frac{8-3}{12} = \frac{5}{4}.$$

Пример 2

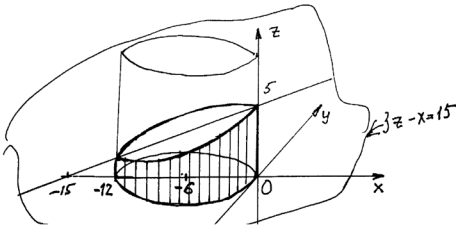
Найти объём тела, ограниченного областью V.

V: $\tilde{o}^2 + 12x + y^2 = 0$, $3z - x = 15$, $z = 0$.

Решение:

Рассмотрим уравнение $\tilde{o}^2 + 12x + y^2 = 0$, выделяем полный квадрат:

$\tilde{o}^2 + 2\cdot 6\cdot x + 36 - 36 + y^2 = 0 \Rightarrow (x+6)^2 + y^2 = 36.$

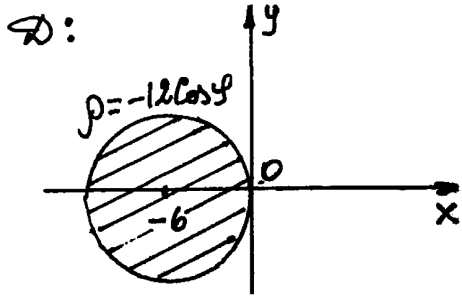


Получили уравнение окружности с центром в точке (-6,0) с радиусом $R=6$.

В пространстве это цилиндр с образующей параллельной оси OZ.

Уравнение $3z - x = 15$ в пространстве изображает плоскость, параллельную оси OY.

Тогда $z = 5 + \dfrac{x}{3}$. Уравнение в отрезках: $\dfrac{z}{5} + \dfrac{x}{-15} = 1$.



Так как область D (проекция тела на плоскость XOY) представляет собой круг, то перейдём к полярной системе координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$$

$$\rho^2\cos^2\varphi + 12\rho\cos\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 0 \Rightarrow \rho^2 + 12\rho\cos\varphi = 0 \Rightarrow \rho = -12\cos\varphi.$$

Вычисляем объём:

$$V = \iint\limits_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))\,dx\,dy = \iint\limits_D \left(5 + \frac{x}{3}\right)dxdy = \iint\limits_D \left(5 + \frac{\rho\cos\varphi}{3}\right)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{-12\cos\varphi} \left(5 + \frac{\rho\cos\varphi}{3}\right)\rho\,d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{-12\cos\varphi} \left(5\rho + \frac{1}{3}\rho^2\cos\varphi\right)d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{5}{2}\rho^2 + \frac{\rho^3}{9}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{-12\cos\varphi} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{5\cdot 144}{2}\cos^2\varphi - \frac{12^3}{9}\cos^4\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 5\cdot 72\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi - 4\cdot 4\cdot 12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = 5\cdot 36\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -$$

$$-48\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = 180\pi - 72\pi = 108\pi.$$

Упражнение 7

Найти объём тела, ограниченного областью V с помощью двойного интеграла.

1. 1) $y=x;\ y=x^2;\ z=0;\ z=2$

   2) $x^2+2x+y^2=0;\ z=0;\ z-x=3$

2. 1) $x=y;\ y=2x;\ y=1;\ z=1;\ z=-2$

   2) $x^2+10y+y^2=0;\ z=0;\ 8z-2y=24$

3. 1) $y=x;\ y=-x^2;\ z=-1;\ z=2$

   2) $x^2-2x+y^2=0;\ z=0;\ z+x=3$

4. 1) $y=4x;\ y=\sqrt{x};\ z=3;\ z=0$

   2) $x^2-10y+y^2=0;\ z=0;\ 5z+y=15$

5. 1) $y=-x;\ y=-\sqrt{-x};\ z=-2;\ z=0$

   2) $x^2+4x+y^2=0;\ z=0;\ 2z-x=8$

6. 1) $y=-x;\ y=x^2;\ z=0;\ z=2$

   2) $x^2+8y+y^2=0;\ z=0;\ 8z-y=16$

7. 1) $x=y;\ y=2x;\ x=2;\ z=-1;\ z=2$

   2) $x^2-4x+y^2=0;\ z=0;\ 2x+z=8$

8. 1) $y=2x;\ y=-x^2;\ z=0;\ z=3$

   2) $x^2-8y+y^2=0;\ z=0;\ 4z+y=8$

9. 1) $y=-x;\ y=\sqrt{-x};\ z=-2;\ z=2$

   2) $x^2+6x+y^2=0;\ z=0;\ z-x=6$

10. 1) $x=y;\ y=-2x;\ y=2;\ z=-1;\ z=3$

    2) $x^2+2y+y^2=0;\ z=0;\ 2z-3y=6$

11. 1) $y=-9x;\ y=-\sqrt{x};\ z=1;\ z=-2$

    2) $x^2-6x+y^2=0;\ z=0;\ 3z+2x=18$

12. 1) $y=2x;\ y=2x^2;\ z=0;\ z=1$

    2) $x^2-2y+y^2=0;\ z=0;\ z+y=4$

13. 1) $x=y;\ y=-x;\ y=1;\ z=-2;\ z=2$

2) $x^2+8x+y^2=0;\ z=0;\ 4z-x=8$

14. 1) $y=-x;\ y=-2x^2;\ z=0;\ z=-1$

2) $x^2+4y+y^2=0;\ z=0;\ 4z-y=8$

15. 1) $y=-x;\ y=-3x;\ x=-2;\ z=0;\ z=4$

2) $x^2-8x+y^2=0;\ z=0;\ 5z+x=25$

16. 1) $y=\frac{x}{2};\ y=\sqrt{2x};\ z=-1;\ z=3$

2) $x^2-4y+y^2=0;\ z=0;\ 2z+y=8$

17. 1) $y=-x;\ y=\sqrt{-3x};\ z=0;\ z=3$

2) $x^2+10x+y^2=0;\ z=0;\ 5z-x=10$

18. 1) $y=-2x;\ y=2x^2;\ z=2;\ z=-2$

2) $x^2+6y+y^2=0;\ z=0;\ 6z-y=12$

19. 1) $y=-2x;\ y=-4x;\ x=2;\ z=-1;\ z=2$

2) $x^2-10x+y^2=0;\ z=0;\ 2z+x=20$

20. 1) $y=-\sqrt{-2x};\ y=\frac{x}{2};\ z=5;\ z=0$

2) $x^2-6y+y^2=0;\ z=0;\ 4z+3x=24$

21. 1) $y=-3x^2;\ y=-\frac{x}{3};\ z=0;\ z=3$

2) $x^2+4x+y^2=0;\ z=0;\ 4z-x=8$

22. 1) $y=-x;\ y=-2x;\ y=-2;\ z=1;\ z=3$

2) $x^2-6x+y^2=0;\ z=0;\ 2z+x=12$

23. 1) $y=x^2;\ y=\sqrt{x};\ z=-2;\ z=4$

2) $x^2+2y+y^2=0;\ z=0;\ 4z-y=4$

24. 1) $y=2x^2;\ y=x;\ z=-1;\ z=1$

2) $x^2-8y+y^2=0;\ z=0;\ 2z+y=8$

25. 1) $y=-x;\ y=-3x;\ x=3;\ z=0;\ z=2$

2) $x^2+2x+y^2=0;\ z=0;\ 2z-x=4$

26. 1) $y=-x^2;\ y=-\sqrt{x};\ z=2;\ z=6$

2) $x^2-4x+y^2=0;\ z=0;\ z+x=8$

27. 1) $y=-2x^2;\ y=\frac{x}{2};\ z=0;\ z=4$

2) $x^2+4y+y^2=0;\ z=0;\ 4z-y=8$

28. 1) $y=x^2;\ x=y^2;\ z=-1;\ z=3$

2) $x^2-4y+y^2=0;\ z=0;\ z+2y=8$

29. 1) $y=-6x;\ y=-3x;\ y=-2;\ z=1;\ z=5$

2) $x^2+12x+y^2=0;\ z=0;\ 6z-x=12$

30. 1) $y=2x^2;\ y=-x;\ z=0;\ z=3$

2) $x^2-12y+y^2=0;\ z=0;\ 3z+y=12$

Список литературы

1. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. Ч.1. — М.: Айрис пресс, 2004.

2. *Данко П.Е., Попов Ф.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.Ч.1. — М.: Высшая школа, 1986.

3. *Ефимов А.В., Демидович Б.П.* Сборник задач по математике для ВТУЗ-ов. — М.: Наука, 1981.

4. *Шипачев В.С.* Высшая математика. — М.: Высшая школа, 1985.

5. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — СПб.: Специальная литература, 1998.

6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. — М.: Высшая школа, 1981.

7. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление.Т.1. — М.: Интеграл-пресс, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Двойные интегралы. Основные понятия 3

2. Расстановка пределов в полярной системе координат 12

3. Вычисление двойных интегралов 19

4. Вычисление площадей 22

5. Вычисление массы плоской пластины
с заданной функцией распределения плотности $\mu(x, y)$ 26

6. Вычисление объемас помощью двойного интеграла 29

Список литературы 33

Для заметок

Внутривузовское издание

Подписано в печать 24.04. 2014. Гарнитура Таймс
Фориат 60×90/16 Бумага офсетная
Объем 2,5 усл. печ. л
Тираж 25 экз. Заказ № 63 Продаже не подлежит

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК