

**Московский государственный университет геодезии и картографии**

*На правах рукописи*



**Лэ Ань Куонг**

**Совершенствование геодезического обеспечения  
наблюдения за деформациями гидротехнических сооружений  
с применением рекуррентного способа уравнивания**

**Специальность 25.00.32 – Геодезия**

**Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук**

**Научный руководитель:  
профессор, д.т.н. Маркузе Юрий Исидорович.**

**Москва – 2019**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГИДРОЭЛЕКТРОСТАНЦИЯХ ВЬЕТНАМА И НАБЛЮДЕНИЯХ ЗА ДЕФОРМАЦИЯМИ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ.....	8
1.1. Общие сведения о Вьетнаме .....	8
1.2. Гидроэлектростанции Вьетнама .....	11
1.3. Наблюдения за деформациями гидротехнических сооружений .....	15
1.3.1. Деформации сооружений, их виды и причины возникновения.....	15
1.3.2. Наблюдения за осадками.....	18
1.3.3. Наблюдения за горизонтальными смещениями.....	20
1.3.4. Сроки и периодичность проведения измерений .....	28
1.3.5. Точность измерения деформаций.....	30
1.4. Современное состояние работ по наблюдениям за деформациями гидротехнических сооружений во Вьетнаме.....	33
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ДЕФОРМАЦИЙ .....	34
2.1. Параметрический способ уравнивания.....	34
2.1.1. Этапы уравнивания .....	34
2.1.2. Примеры составления параметрических уравнений связи и параметрических уравнений поправок в плановых сетях.....	35
2.2. Основы рекуррентного способа уравнивания.....	38
2.2.1 Теоретические основы рекуррентного способа уравнивания .....	38
2.2.2. Выбор исходной матрицы обратных весов неизвестных при рекуррентном уравнивании .....	41
3. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ.....	51
3.1. Понятие об оптимальном проектировании.....	51
3.2. Классификация задач оптимальной геодезической сети.....	52
3.3. Методы математического программирования геодезических измерений.....	53

3.4. Проектирование оптимальной геодезической сети наблюдений за горизонтальными смещениями гидротехнических сооружений во Вьетнаме .....	55
3.4.1. Обоснование порядка проектирования .....	55
3.4.2. Применение рекуррентного уравнивания для оптимального проектирования измерений геодезических сетей .....	56
4. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ .....	70
4.1. Контроль грубых ошибок измерений .....	70
4.2. Анализ деформаций геодезических пунктов при наблюдении за горизонтальными смещениями .....	79
4.2.1. Совмещение уравнивания циклов наблюдений с анализом деформаций .....	79
4.2.2. Пример вычисления .....	81
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	103
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	104
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	111

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** К наблюдениям за деформациями гидротехнических сооружений предъявляются очень строгие технические требования. Наблюдения за деформациями выполняются для оценки состояния и обнаружения любых аномалий, возникающих в процессе строительства и эксплуатации сооружений. Основываясь на результатах наблюдений за деформациями, конструкции гидроэнергетических сооружений сравниваются со стандартами, изложенными на этапе технического проектирования. Наблюдения за деформациями являются одним из важнейших источников информации для мониторинга и решения проблем на этапе строительства и эксплуатации сооружений. Гидротехнические сооружения (ГТС) находятся в состоянии высокого риска катастрофы, поэтому безопасности строительных работ уделяется особое внимание.

Наблюдения за деформациями гидротехнических сооружений являются сложной и проблемной задачей, требующей высокой точности измерений, поэтому в этой области разработаны различные методы измерений и анализа их результатов. В настоящее время персональные компьютеры очень широко используются при обработке результатов геодезических измерений. При помощи компьютера и соответствующего программного обеспечения можно просто и быстро решать задачи с огромным объемом вычислений. Во Вьетнаме компьютерная технология и была первоначально применена для автоматизации процессов вычислений. Имеется несколько программ, но пока они не могут удовлетворять требованиям обработки результатов наблюдений за деформациями гидротехнических сооружений. Кроме того, в настоящее время разрабатывается теория оптимального проектирования геодезических сетей наблюдений за деформациями, но эта теория редко применяется на практике.

Поэтому исследования новых алгоритмов при оптимальном проектировании геодезических сетей и обработке результатов измерений для наблюдений за деформациями гидротехнических сооружений являются актуальными.

**Степень разработанности** темы исследована по опубликованным в открытой печати научным статьям в области теории математической обработки геодезических измерений (ТМОГИ) и прикладной геодезии применительно к задачам наблюдения за деформациями. При написании диссертационной работы автор опирался на труды известных учёных в области ТМОГИ и прикладной геодезии, в частности: Маркузе Ю.И., Большакова В.Д., Карлсона А.А., Марфенко С.В., Левчука Г.П., Новака В.Е, Ключина Е.Б. Конусова В. Г., Герасименко М.Д., Тамутиса З.П., Саати Т, Зангвилла У.И., Зайцева А.К., Михелева Д.Ш, Ха Минь Хоа, Нгуен Вьет Ха, Динь Тхи Ле Ха, Tran Khanh, Nguyen Quang Phuc, Le Duc Tinh и многих других.

**Основной целью** диссертационного исследования является совершенствование геодезического обеспечения наблюдений за деформациями гидротехнических сооружений во Вьетнаме с применением рекуррентного способа уравнивания.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи:**

- разработать методику оптимального проектирования плановой геодезической сети;
- разработать алгоритм уравнивания геодезической сети с контролем грубых ошибок измерений;
- выполнить совмещение уравнивания циклов наблюдения с анализом деформаций при наблюдениях за горизонтальными смещениями ГТС на примере ГЭС Вьетнама.

**Научная новизна работы:**

- разработанная методика оптимального проектирования плановой геодезической сети позволяет определить схему сети, обеспечивающую оптимальное соотношение количества измеряемых величин и точности полученных результатов;
- разработанный алгоритм уравнивания геодезической сети позволяет объединить в один вычислительный процесс определение уравненных координат

пунктов сети, обнаружение грубых ошибок измерений, а также выявление и анализ деформаций ГТС.

**Теоретическая значимость** диссертационной работы состоит в развитии рекуррентного способа уравнивания для целей оптимального проектирования геодезических сетей и анализа деформаций ГТС.

**Практическая значимость работы.** Результаты исследований могут быть применены для оптимального проектирования геодезических сетей, создаваемых для контроля деформаций ГТС, и последующего уравнивания результатов измерений с одновременным выявлением и анализом деформаций.

**Методология и методы исследования.** В диссертационной работе использованы теория и математический аппарат рекуррентного способа уравнивания, экспериментальный и аналитический методы исследования в сочетании с компьютерными технологиями.

**Основные положения и результаты, выносимые на защиту.** Основанные на рекуррентном способе уравнивания

- методика оптимального проектирования плановой геодезической сети, обеспечивающая максимальную точность полученных результатов при минимальном количестве измеряемых сторон;
- алгоритм обработки результатов измерений, позволяющий в процессе уравнивания выявить возможные грубые ошибки исходных данных и результатов измерений и выбрать оптимальный вариант исключения ошибочных измерений;
- анализ деформаций ГТС по изменению координат наблюдаемых пунктов, обнаруженному в процессе последовательного объединения циклов повторных измерений.

**Степень достоверности полученных результатов.** Разработанные методика оптимального проектирования сети и алгоритм уравнивания сети основаны на известных теоретических положениях и доказанных преимуществах рекуррентного способа уравнивания. Результаты исследования успешно использованы для проектирования и уравнивания реальных и смоделированных геодезических сетей.

**Апробация результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы были представлены, обсуждены и одобрены на следующих научных конференциях: 71-ой (05 апреля 2016 г.), 72-ой (12 апреля 2017 г.) и 73-ей (03 апреля 2018 г.) научно-технических конференциях студентов, аспирантов и молодых учёных МИИГАиК.

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 4 статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

**Объём и структура диссертационной работы.** Диссертационная работа содержит 124 страницы машинописного текста, состоит из введения, четырех глав с подразделами, включающих в себя 64 таблицы и 22 рисунка, заключения, списка литературы и приложения. Список литературы включает 79 наименований, в том числе 48 на русском и 31 – на иностранных языках.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, д.т.н., проф. Ю.И. Маркузе, а также всему коллективу кафедры геодезии МИИГАиК за оказанную помощь при работе над диссертацией.

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГИДРОЭЛЕКТРОСТАНЦИЯХ ВЬЕТНАМА И НАБЛЮДЕНИЯХ ЗА ДЕФОРМАЦИЯМИ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

## 1.1. Общие сведения о Вьетнаме

*География и гидрография.* Социалистическая Республика Вьетнам представляет собой узкую полосу земли в виде буквы S, расположенной в самом центре Юго-Восточной Азии в восточной части полуострова Индокитай: 8°02'-23°23' северной широты, 102°08'- 109°28' восточной долготы. Географическая карта Вьетнама показана на рис. 1.1.

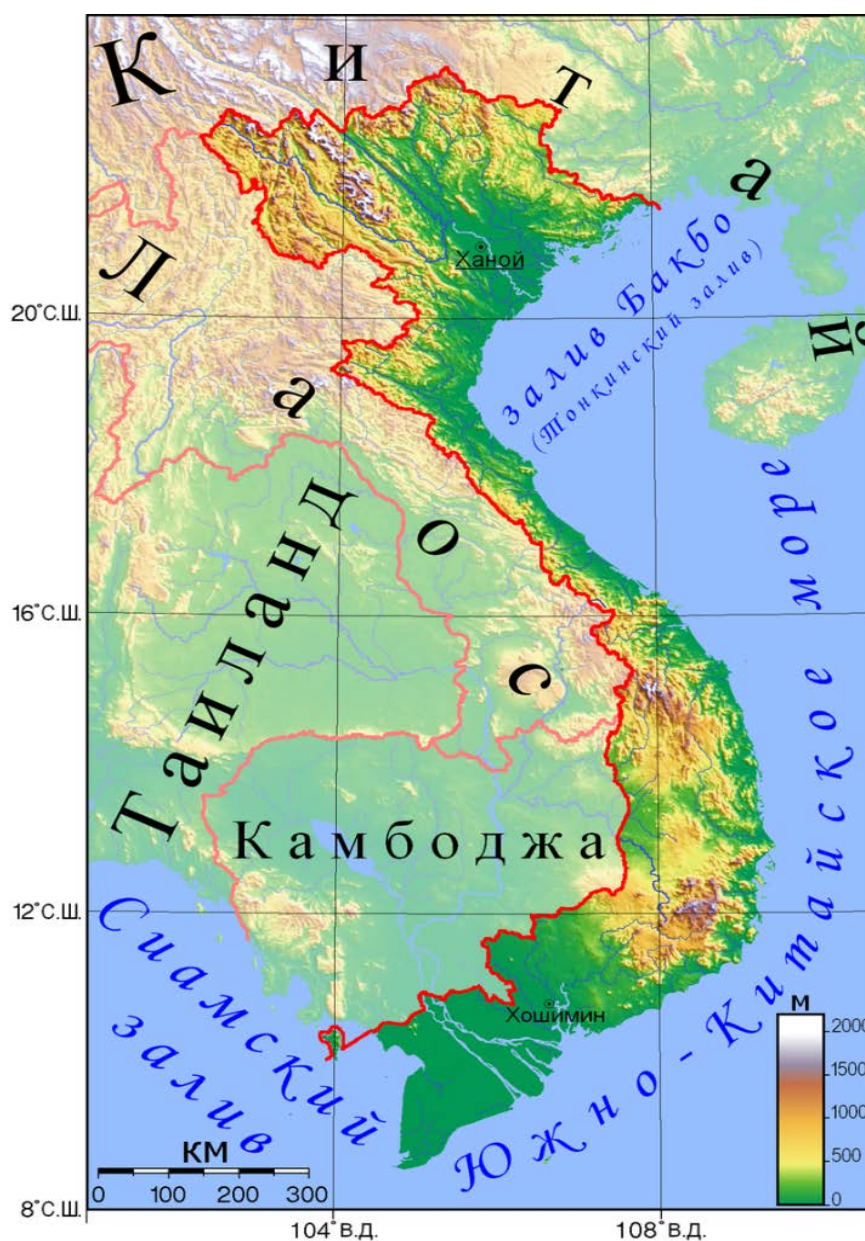


Рисунок 1.1. Географическая карта Вьетнама



С севера на юг протяженность страны составляет 1750 км, с востока на запад – 616 км в самом широком месте и 46,5 км в самом узком месте. Территория Вьетнама составляет 329,6 тыс. км<sup>2</sup>. На западе страна граничит с Лаосом и Камбоджой, на севере – с Китаем, с востока и юга омывается Южно-Китайским морем, в том числе заливом Байбо (Тонкинский), а на юго-западе – Сиамским заливом. Длина сухопутных границ Вьетнама – 3730 км, длина береговой линии от Монгкой до Хатиена – 3260 км.

Географически страна делится на три части: северную часть – Бакбо, центральную – Чунгбо и южную – Намбо. Территория СРВ также включает в себя множество островов, расположенных в Южно-Китайском море (Фукуок, Катба, Кондао и т. д.). Вьетнам – страна плоскогорий, плато и гор. Самые высокие горные вершины: Фансипан (3143 м), Тазян Фин (3096 м), Пу Си Лонг (3076 м). На юге и севере Вьетнама расположены два основных района выращивания риса, образованные дельтой Меконга (Кюлонг) и реки Хонгха (красный). Длина реки Хонгха – 508 км, реки Меконг – 250 км. Другие крупные реки страны: Да (черный), Ма, Ло, Дуннай, Тейбин, Ба, Ка. Самые большие озера страны – Дарлак (1 тыс. га), на севере Баба (500 га), западный (466 га). Ежегодно речная сеть востока Вьетнама несет в море 870 бил. м<sup>3</sup>/год воды; соответствующий средний расход равен 37500 м<sup>3</sup>/с [40].

*Климат Вьетнама.* Вьетнам климатически разделен на три региона: влажный субтропический на севере, тропический в центральном регионе и тропический на юге. Климат Вьетнама имеет относительную влажность 84-100% в среднем. Однако из-за различия в широтах и топографических особенностей климат, как правило, заметно отличается в каждом регионе. В зимний или сухой сезон, с ноября по апрель, муссон обычно дует с северо-востока вдоль побережья Китая через залив Бакбо вдоль долин рек между горными арками на востоке и приносит много влаги, поэтому в большинстве районов наблюдается зимняя дискриминация – этот сухой сезон только по сравнению с дождливыми или летними сезонами. Во время летнего юго-западного муссона, который происходит с мая по октябрь, горячий воздух из пустыни Гоби распространяется на север, из-за чего

влажный морской воздух попадает внутрь страны, вызывая сильные ливни.

Ежегодное количество осадков на всей территории страны колеблется от 120 до 300 см, а в некоторых местах возникают наводнения. Летом выпадает почти 90% осадков. Среднегодовые температуры в дельтах рек обычно несколько выше, чем в горах и на плато. Колебание температур: минимум 5° С с декабря по январь (самый холодный месяц), до 37° С в июле (самый жаркий месяц). Сезонные различия в северной половине страны более выражены, чем в южной, исключая горные районы, где сезонная температура колеблется в диапазоне 21-28 °С [50].

*Растительность.* Большая часть Вьетнама, главным образом в горах, покрыта лесами. На высоте 700 м над уровнем моря на севере и 1300 м на юге находятся тропические вечнозеленые леса. Выше 700 м над уровнем моря на севере и 1300 м на юге преобладают леса, состоящие как из тропических пород деревьев, так и лиственных пород, характерных для умеренного климата. В более высокогорных районах появляется примесь хвойных деревьев. На равнинах выращивают сельскохозяйственные культуры (в основном – рис), сахарный тростник, фруктовые деревья (манго, мангостан, папайя и т.д.), цитрусовые (лимоны, апельсины, грейпфруты), бананы, имеются заросли травы и бамбука. Кокосовые пальмы растут на морском побережье и в предгорных районах. В предгорьях на юге на красных землях выращивают чай и кофе.

*Животный мир.* Фауна Вьетнама богата и разнообразна. Наиболее характерными животными являются: антилопа, леопард, тигр, пантера, лемур, дикий бык, а также различные виды медведей и обезьян. Леса Вьетнама богаты различными видами птиц (только на юге более 370 видов). Есть слоны, реже – носороги. Имеются змеи, черепахи, ящерицы, пресноводные и морские рыбы.

*Полезные ископаемые.* Недра Вьетнама, особенно на севере и северо-западе, богаты различными полезными ископаемыми. Месторождения угля занимают первое место, также имеются месторождения железной руды, марганца, свинца, хрома, бокситов, графита, бария, слюды, полевого шпата, цинка, титановых руд, золота, меди, асбеста, олова. Вьетнам занимает одно из первых мест в мире по за-

пасам апатитов. В настоящее время изучается возможность добычи нефти и газа на континентальном шельфе на юге.

*Население.* Население Вьетнама в начале 2017 г. составляло более 95,4 млн. человек. Средняя плотность населения составляет 308 человек на 1 км<sup>2</sup>. Согласно переписи населения и жилого фонда 2014 г. (IPS), 33,1% населения Вьетнама проживает в городских районах и 66,9% – в сельской местности [49].

Во Вьетнаме насчитываются 54 этнических группы, из которых 53 являются этническими меньшинствами, на которые приходится 14% всего населения страны. Вьетнамцы (также известные как кинские люди) составляют около 86% населения, сосредоточенного в дельтах и прибрежных равнинах. Вьетнам является густонаселенной страной, хотя он занимает 65-е место в мире по площади, но занимает 15-е место в мире по численности населения [52].

*Административно-территориальное деление.* Столицей Вьетнама является Ханой (7,6 млн. человек, 2014 г.). Крупные города: Сайгон - Хошимин (8,3 млн. человек, 2014 г.), Тхань-Хоа (3,7 млн. человек, 2014 г.), Нгеан (3,0 млн. человек, 2014 г.), Донгнай (3,0 млн. человек, 2014 г.) [49].

В соответствии с конституцией Вьетнама страна делится на провинции, города центрального подчинения и соответствующие административные единицы; уезды, города провинциального подчинения. Во Вьетнаме есть 63 провинции и 1 специальный район Вунг-Тау-Кондао [52]. В качестве независимых административных единиц выделяются пять городов центрального подчинения: Ханой, Хошимин, Хайфон, Дананг и Кан Тхо.

## **1.2. Гидроэлектростанции Вьетнама**

Вьетнам является страной с тропическим муссонным климатом, поэтому обладает богатым гидроэлектрическим потенциалом. Теоретический потенциал гидроэлектрической сети Вьетнама составляет около  $300 \cdot 10^9$  кВт·ч, технический потенциал оценивается величиной примерно  $123 \cdot 10^9$  кВт·ч, эквивалентная мощ-

ность составляет около 31000 МВт. Выработка электричества гидроэлектростанциями в 2012 г. составила примерно 43,5% от общего производства электроэнергии, а в 2014 г. – 32%, а по прогнозам к 2020-30 гг. – примерно 23% [40, 58].

Первая гидроэлектростанция Бан Тьач расположена в провинции Иен Бай и была построена во Вьетнаме в период с 1959 по 1963 гг., следующая Тьах Ба (рис. 1.2) – в провинции Иен Бай на реке Чьаи (годы постройки – 1964-1972 гг.). В строительстве этих двух гидроэлектростанций принимали участие и оказывали помощь специалисты из Советского Союза.

Затем в период с 1979 по 1994 гг. также с помощью Советского Союза была построена гидроэлектростанция Хоа Бинь (рис. 1.3), которая имеет самую большую мощность в Юго-восточной Азии и ежегодно обеспечивает энергией около 30% промышленного производства Вьетнама. ГЭС Хоа Бинь выполняет следующие четыре функции: дренаж, снабжение электричеством, орошение, водное сообщение. В течение многих лет эта гидроэлектростанция приносит ощутимую пользу Вьетнаму [8, 58].



Рисунок 1.2. Гидроэлектростанция Тьах Ба

В табл.1.1 представлены наиболее крупные гидроэлектростанции Вьетнама мощностью более 100 МВт, а в табл.1.2 – гидроэлектростанции мощностью менее 100 МВт, введенные в эксплуатацию [8, 40, 51, 58].



Рисунок 1.3. Гидроэлектростанция Хоа Бинь

Таблица 1.1. Наиболее крупные гидроэлектростанции Вьетнама  
(мощность более 100 МВт)

№ п/п	Название	Проектная мощность, МВт	Расположение, провинция
1	Хоа бинь	1920	Хоа бинь
2	Тхак ба	108	Иен бай
3	Яли	720	Да лай
4	Да ным	160	Лам донг
5	Хам тхуан	300	Лам донг
6	Тхак мо	150	Бинь фуок

Окончание таблицы 1.1.

№ п/п	Название	Проектная мощность, МВт	Расположение, провин- ция
7	Чи ан	400	Донг най
8	Туен куанг	342	Туен куанг
9	Буон Куоп	280	Дак лак
10	Бан Ве	300	Нге ан
11	А Вьонг	210	Куанг нам
12	Шонг Ба Ха	220	Фу иен
13	Бан Чат	220	Лай чау
14	Шон ла	2400	Шон ла
15	Ан Хе - Канак	173	Да лай
16	Шонг Чань 2	190	Куанг нам
17	Дай Нинь	300	Лам донг
18	Плей Кронг	110	Контум
19	Шешан 3	260	Да лай
20	Шешан 4	360	Да лай
21	Шрепок 3	220	Дак лак
22	Донг Най 3	240	Лам донг
23	Донг Най 4	270	Лам донг
24	Ньо Куе 3	110	Ха занг
25	Нам Чиен	200	Шон ла
26	Хуа На	180	Нге ан
27	А Льюй	170	Тхья Тхиен Хуэ
28	Шонг Бунг 4	156	Куанг нам
29	Дакми 4	190	Куанг нам

Таблица 1.2. Гидроэлектростанции мощностью менее 100 МВт

№ п/п	Название	Проектная мощность, МВт
1	ГЭС Куанг Чи	64
2	ГЭС Нам Донг	22
3	ГЭС Еакронг Роу	28
4	ГЭС Нам Чим	16
5	ГЭС Бак бинь	34
6	ГЭС Бинь Диен	44
7	ГЭС Да Данг – Дамачо	16
8	ГЭС Кок Шан	40
9	ГЭС Шео Чунг Хо	22
10	ГЭС Бан Кок – Хьонг Шон 2	30
11	ГЭС Дак Тик	72
12	ГЭС Нгой Фат	35
13	ГЭС Шонг Кон 2	53
14	ГЭС Тхак Мо	75
15	ГЭС Бак Ха	90
16	ГЭС Кыа Дат	97
17	ГЭС Нхан Хак	45
18	ГЭС Дам Бри	75
19	ГЭС Шонг Бак	42

### **1.3. Наблюдения за деформациями гидротехнических сооружений**

#### **1.3.1. Деформации сооружений, их виды и причины возникновения**

Чтобы обеспечить нормальную работу сооружений, их структура должна быть стабильной, то есть сохранять исходную (проектную) позицию в установленных пределах. Однако из-за конструктивных особенностей и влияния природ-

ных и техногенных факторов структуры сооружений подвержены различным видам деформаций, которые характеризуются изменением как его пространственного положения в целом, так и взаимного расположения отдельных частей и элементов. Деформации могут привести к нарушению прочности строительных конструкций, созданию сложных условий эксплуатации технологического оборудования и даже вызвать опасное разрушение конструкций [37].

Различают следующие виды деформаций [9, 13, 37, 39]:

- *осадка* – перемещение фундаментов и всего сооружения вниз;
- *набухания и усадки* – деформации, связанные с изменением объема некоторых глинистых грунтов с изменением влажности и температуры;
- *оседания* – деформации земной поверхности, вызванные разработкой полезных ископаемых или изменением гидрогеологических условий;
- *подъем* или *выпучивание* – перемещение фундаментов и всего сооружения вверх;
- *горизонтальные смещения* или *сдвиг* сооружения – перемещение в сторону.

Обычно отдельно определяют основные составляющие общей деформации в каждой точке сооружения: горизонтальное смещение и осадку.

Для изучения деформаций в характерных местоположениях сооружения фиксируют точки и регистрируют изменения их пространственного положения в выбранный временной интервал относительно принятого начального положения и начала отсчета времени. Оценка состояния сооружения и его устойчивости производится на основе анализа значений полученных изменений положения точек (деформаций).

Для получения абсолютных или полных осадок и горизонтальных смещений определяют отметки и координаты фиксированных на сооружении точек относительно исходных точек, принимаемых за неподвижные [37].



*Причины возникновения деформаций.* Деформации сооружений возникают в связи с воздействием антропогенных (техногенных) и различных природных факторов, как на основания, так и на сами сооружения. Основными природными факторами являются следующие [17]:

- 1) способность горных пород опускаться, суффозии, оползни, и другие гидрогеологические и инженерно-геологические явления;
- 2) взбивание во время замораживания насыщенных водой и оттаивания замороженных горных пород;
- 3) изменение гидротермальных условий, связанных с многолетними и сезонными колебаниями температуры, уровня грунтовых вод и влажности пород.

Основными техногенными факторами являются:

- 1) влияние нагрузки на конструкции;
- 2) ослабление основания подземными разработками, которые приводят к выносу частиц породы в выработанное пространство или к смещению всей толщины пластов над выработками;
- 3) изменение несущих свойств горных пород в связи с искусственным повышением или понижением уровня грунтовых вод в ходе строительных или эксплуатационных работ; с искусственным оттаиванием замороженных горных или увлажнением лёссовидных пород и т. д.;
- 4) вибрация фундаментов в связи с работой различных агрегатов, механизмов, движения транспорта и других динамических воздействий;
- 5) изменение давления на основание, вызванное возведением ряда новых конструкций или надстройкой здания.

На деформацию сооружения также влияют размер, жесткость и форма фундамента и строительных конструкций, распределение статических и динамических нагрузок внутри сооружения.

Гидротехнические сооружения подвержены постоянному воздействию го-

горизонтальных и вертикальных сил и нагрузок, вызванных собственным давлением, весом воды и грунта на их основание и другими причинами.

Огромные массы воды водохранилищ гидроузлов вызывают деформации береговой поверхности, осадки подпорных сооружений, а также их горизонтальные смещения и наклоны. Сезонные колебания температуры, уровня воды в водохранилище и другие факторы приводят к сезонным деформациям плотин и их оснований. Все это может ослабить силу и стабильность конструкций, их баз и прибрежных склонов и привести к серьезным последствиям [40].

### **1.3.2. Наблюдения за осадками**

Наблюдения за осадками выполняют различными методами нивелирования: геометрического, тригонометрического, гидростатического, микро nivelирования, а также фотограмметрическим и стереофотограмметрическим методами [9, 11, 12, 37, 39, 42, 46].

Наиболее распространен метод геометрического нивелирования. Он имеет много преимуществ, что делает его практически универсальным. Это быстрое измерение и высокая точность, недорогое и простое стандартное оборудование, возможность выполнить измерения в стесненных и сложных условиях. По методу геометрического нивелирования можно определить разности высот пунктов, расположенных на расстоянии 5 ... 10 м с ошибкой 0,05 ... 0,10 мм и на несколько сотен метров – с ошибкой до 0,5 мм.

В зависимости от желаемой точности определения осадки используются различные классы нивелирования. Так, например, при определении осадки бетонных плотин гидроэлектростанций используются классы I и II, а для определения осадки промышленных зданий чаще всего используются классы II и III.

Наблюдения за осадками состоят в проведении циклов измерений по определению отметок осадочных марок относительно одного из опорных реперов, принимаемого за исходный, путем проложения отдельных или системы нивелир-

ных ходов. Нивелирование выполняют с точностью, определяемой в зависимости от заданной ошибки  $m_s$  определения осадки, схемы и размеров нивелирной сети.

Для каждой отдельной точки сооружения полная или абсолютная осадка  $S$  вычисляется как разность отметок текущего  $H_i$  и начального  $H_0$  циклов измерений, определенных относительно отметки исходной точки, которая принимается за неподвижную,

$$S = H_i - H_0.$$

Средняя осадка  $S_{cp}$  отдельных частей или всего сооружения определяется как среднее арифметическое из суммы абсолютных осадок всех ( $n$ ) его точек:

$$S_{cp} = \frac{\sum_1^n S}{n} .$$

При определении средней осадки зданий, имеющих полную деформационную характеристику, отмечают наименьшие и наибольшие осадки точек сооружения ( $S_{min}$  и  $S_{max}$ ).

Скорость протекания осадки вычисляют по формуле:

$$v = \frac{S_{cp}}{T},$$

где  $T$  – период наблюдения.

Крен сооружения возникает от неравномерности осадок фундамента, в результате чего сооружение наклоняется в одну сторону:

$$K = \frac{\Delta}{l},$$

где  $\Delta$  – разность осадок крайних марок по оси сооружения,  $l$  – расстояние между этими марками.

При наблюдении за осадками точность нивелирования характеризуют средней квадратической ошибкой  $m_{h_{cm}}$  определения превышения на станции. Связь ее с ошибкой определения величины осадки точки  $i$ , как разности отметок из двух циклов измерений, представлена формулами

$$m_{s_i} = m_{h_{cm}} \sqrt{2Q_{H_i}} \text{ или } m_{\Delta s_{i,j}} = m_{h_{cm}} \sqrt{2Q_{h_{i,j}}},$$

где  $Q_{H_i}$  – обратный вес определяемой отметки в отдельном ходе или в схеме нивелирной сети;

$Q_{h_{i,j}}$  – обратный вес превышения между исследуемыми осадочными марками  $i$  и  $j$ , разность осадок которых задано определять с ошибкой  $m_{\Delta s_{i,j}}$ .

Во Вьетнаме для наблюдений за высотными деформациями гидротехнических сооружений часто используются следующие высокоточные нивелиры: Ni004, KONI007, NA2002/2003, DL101C, Wild N3, NAK2, DiNi12, DiNi03, DNA-03 [59].

### 1.3.3. Наблюдения за горизонтальными смещениями

Требования к устойчивости планового положения сооружения в целом и его отдельных частей и элементов, также как и требования к разбивке сооружения, могут отличаться по различным направлениям, что связано с его технологическими и конструктивными особенностями. В связи с этим величины горизонтальных смещений принято определять либо по двум координатам, либо по одной координате. В первом случае для координирования наблюдаемых точек сооружения применяют линейно-угловые геодезические построения, во втором – створные методы [37].

*Линейно-угловые построения* могут быть представлены в виде специальных сетей трилатерации и триангуляции, линейных и угловых засечек, ходов полигонометрии, комбинированных сетей. Применение того или иного вида построения зависит от геометрической формы сооружения, условий измерений и требуемой точности, организационных и других факторов.

Во многих случаях применяют комбинированные линейно-угловые построения, сочетающие триангуляцию и трилатерацию. В таких построениях обычно принято измерять часть сторон и все углы. Решение, какие из сторон и углов и с какой точностью следует измерять, принимается на основе расчетов, исходя из требований к точности определения величин смещений.

Линейно-угловые построения могут быть одноступенчатыми, когда исходная точка, принятая фиксированной, и марки деформации на сооружении включены в одну сеть, и двухэтапными. В двухэтапном построении сначала создается опорная сеть, включая вспомогательные и опорные знаки. Повторные измерения в такой сети позволяют контролировать стабильность опорных знаков и определять координаты вспомогательных знаков, относительно которых наблюдается положение деформационных знаков на сооружении.

Линейная и угловая засечка в качестве второго этапа геодезического построения часто используются для определения смещения недоступных точек сооружения. Построения из вытянутых треугольников с измеренными высотами и сторонами применяются для протяженных сооружений криволинейной и прямолинейной формы.

Специальная триангуляция характеризуется высокой точностью угловых измерений ( $0,5 \dots 2,0''$ ) на коротких сторонах, большим количеством связей, обеспечивающих минимальное значение обратного веса определения функции координат пунктов сети [12].

Полигонометрия прокладывается, в основном, в виде одиночных ходов, опирающихся на исходные пункты. Часто используется только координатная привязка к исходным пунктам.

Что касается методики измерений деформаций, то каждый из видов линейно-угловых построений имеет свои особенности.

Однако для всех видов построений должно выполняться постоянство схемы измерений, т.к. в конечном итоге необходимо получать не сами координаты точек деформации, а их изменения во времени, то есть разницу в координатах в двух циклах.

Уравнивание линейно-угловых построений осуществляется строгим способом. Координаты точек вычисляются в условной системе координат.

Величины горизонтальных смещений между двумя циклами вычисляются

по формулам:

$$q_x = x_i - x_j; q_y = y_i - y_j,$$

где  $x_i, y_i$  и  $x_j, y_j$  – координаты наблюдаемых пунктов в цикле  $i$  и  $j$ ,

$q_x, q_y$  – величины горизонтальных смещений по осям X и Y.

Для предварительного расчета точности построения сети в общем случае используем формулу

$$m_q = \mu \sqrt{2Q_F},$$

где  $m_q$  – требуемая (заданная) СКО определения величины смещения;  $\mu$  – СКО единицы веса;  $Q_F$  – обратный вес функции оцениваемого элемента, характеризующий качество проекта схемы измерений.

Если необходимо определить смещения отдельно по осям координат X и Y, то для оценки их точности используются следующие формулы:

$$m_{q_x} = \mu \sqrt{2Q_x}; m_{q_y} = \mu \sqrt{2Q_y},$$

где  $Q_x$  и  $Q_y$  – обратные веса определения координат исследуемых пунктов соответственно по осям X и Y.

*Створные методы* используются для наблюдений горизонтальных смещений сооружений прямолинейной формы, когда достаточно знать смещение в одном направлении. В этом случае система координат выбирается так, чтобы ось ординаты совпадала с направлением смещений, а абсцисса – с направлением створа.

Значения смещений определяются из разности значений (нестворностей), измеренных в двух циклах.

Нестворность определяется различными методами, наиболее распространенными из которых являются методы малых углов и подвижной марки. Для задания створной линии используют оптические и струнные способы, а также способы, которые основаны на теории физической оптики.

Струнный способ включает использование стальной натянутой струны различного диаметра, оптический способ предполагает применение зрительных труб большого увеличения (нивелиры, теодолиты, специальные алиниометры и автоколлимационные системы).

Величина нестворности в методе подвижной марки определяется непосредственно. Для этого оптический прибор установлен в пункте А (рис. 1.4, а), плоскость коллимации которой ориентирована по марке в пункте В и задает опорную линию. Подвижная марка, установленная в пункте С, вводится в створ. Положение подвижной марки, когда мишень ее находится в створе, фиксируется по отсчетному устройству марки. Если отсчет известен, когда ось мишени совпадает с пунктом С, то нестворность  $q_c$  необходимо вычислить как разность отсчетов при положении марки в пункте С и в створе АВ.

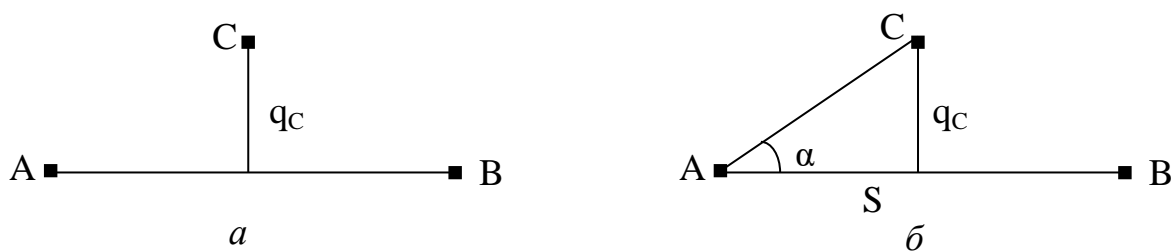


Рисунок 1.4. Определение величины нестворности:

а — методом подвижной марки; б — методом малых углов

Если можно повернуть марку на  $180^\circ$ , нестворность может получить как полуразность отсчетов для 2-х положений марки, когда она вводится в цель.

В методе малых углов нестворность  $q_c$  определяется путем измерения малого угла  $\alpha$  (рис. 1.4, б) между линией створа и направлением на пункт С и расстоянием S. Величину нестворности можно вычислить по следующей формуле:

$$q_c = \frac{S\alpha}{\rho}.$$

Для створов значительной протяженности с большим количеством определяемых пунктов на створе в связи с условиями измерений применяют различные схемы наблюдений. Простейшая из них – схема общего створа (рис. 1.5, а), когда

нестворности всех пунктов определяются относительно общего створа между опорными пунтами створа. В схемах последовательных (рис. 1.5, в) и пересекающихся (рис. 1.5, б) створов нестворности могут измеряться между определяемыми пунктами относительно этих створов.

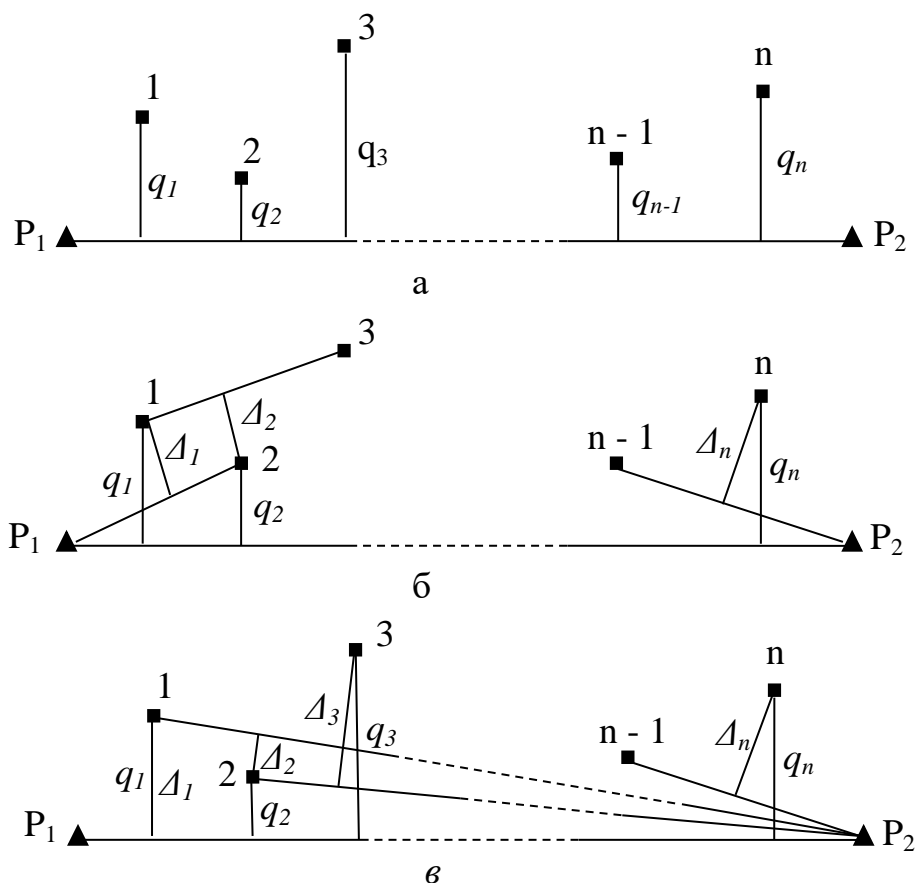


Рисунок 1.5. Схемы створных измерений:

а – общего створа; б – частных створов; в – последовательных створов

Таким образом, схема последовательных створов предусматривает определение нестворностей  $\Delta_1 = q_1$  пункта 1 от створа  $P_1P_2$ ,  $\Delta_2$  – пункта 2 от створа  $1P_2$ ,  $\Delta_3$  – пункта 3 от створа  $2P_2$  и т.д. В схеме частных створов нестворность  $\Delta_1$  пункта 1 определяется от створа 1 - 2,  $\Delta_2$  пункта 2 от створа 1 - 3,  $\Delta_3$  пункта 3 от створа 2 - 4 и т. д. В двух схемах нестворности  $q$  относительно общего створа могут получаться только соответствующими вычислениями, зная дистанции  $S$  между всеми пунктами.

Когда расстояния между определяемыми пунктами не равны друг другу, нестворности всех  $n$  точек относительно общего створа могут быть получены из ре-



шения системы следующих линейных уравнений [12]:

для схемы последовательных створов

$$q_1 - \Delta_1 = 0;$$

$$q_2 - q_1 \frac{S_{2,P_2}}{S_{1,P_2}} - \Delta_2 = 0;$$

.....

$$q_i - q_{i-1} \frac{S_{i,P_2}}{S_{(i-1),II}} - \Delta_i = 0;$$

.....

$$q_n - q_{n-1} \frac{S_{n,P_2}}{S_{(n-1),P_2}} - \Delta_n = 0;$$

для схемы частных створов

$$q_1 - q_2 \frac{S_{P_1,1}}{S_{P_1,2}} - \Delta_1 = 0;$$

$$q_2 - q_1 \frac{S_{2,3}}{S_{1,3}} - q_3 \frac{S_{1,2}}{S_{1,3}} - \Delta_2 = 0;$$

.....

$$q_i - q_{i-1} \frac{S_{i,i+1}}{S_{i-1,i+1}} - q_{i+1} \frac{S_{i-1,i}}{S_{i-1,i+1}} - \Delta_i = 0;$$

.....

$$q_n - q_{n-1} \frac{S_{n,P_2}}{S_{(n-1),P_2}} - \Delta_n = 0.$$

На практике расстояния между пунктами створа пытаются сделать равными. В этом случае нестворность  $q_i$  любого определяемого пункта  $i$  в схемах последовательных и частных створов может быть рассчитана соответственно по формулам:

$$q_i = \sum_{k=1}^{k=i} \Delta_{i+1-k} \frac{n-i+1}{n-k+1};$$

$$q_i = \frac{2}{n+1} \left[ (n-i+1) \sum_{k=1}^{k=i-1} k\Delta_k + \sum_{k=i}^{k=n} (n-k+1)\Delta_k \right],$$

где  $k$  – номер очередного слагаемого под знаками суммы.

В табл. 1.3 и 1.4 приведены марки высокоточных теодолитов и электронных тахеометров, используемых при наблюдениях за деформациями гидротехнических сооружений [59].

Таблица 1.3. Марки оптических теодолитов

Название	Изготовитель	Точность измерения		Вес, кг
		горизонтального угла, "	вертикального угла, "	
ТТ 2"/6"	Россия	1	2	12
Wild T3	Швейцария	1	1	7
ОТ-2	Россия	1	1	7
ОТ-02М, Т2	Россия	2	2	7,5
Theo 010	Германия	1,5	1,5	5

В настоящее время для наблюдений за горизонтальными смещениями сооружений широко используют методы спутниковых измерений, которые позволяют проводить непрерывные наблюдения в режиме реального времени, что делает эту технологию наиболее эффективной, особенно при мониторинге социально опасных объектов. Потенциальная точность определения разности координат между двумя точками земной поверхности в режиме фазовых измерений оценивается средней квадратической ошибкой, равной 2 мм. Практическая реализация столь высокого уровня точности сопряжена с рядом трудностей, обусловленных влиянием внешней среды и несовершенством методов наблюдений и последующей обработки результатов измерений. За последние годы в этой области в мире

проведены обширные исследования и на основе результатов разработаны специализированные методы измерений, а также усовершенствованы методы обработки спутниковых определений координат.

Таблица 1.4. Марки электронных тахеометров

Название	Изготовитель	Точность измерения			Вес, кг
		горизонтального угла, "	вертикального угла, "	стороны, мм	
TC-2002(A)	Leica	1	1	1 мм + 1 ppm	7,2
TC-2003(A)	Leica	0,5	0,5	1 мм + 1 ppm	7,2
Trimble S6 High Precision	Trimble	1	1	1 мм + 1 ppm	5,15
TS-30	Leica	0,5	0,5	0,6 мм + 1 ppm	7,2
Trimble S6	Trimble	1	1	1 мм + 1 ppm	5,15
MS05/05A	Topcon	0,5	0,5	0,5 мм + 1 ppm	7,2
Viva TS11	Leica	1	1	1 мм + 1,5 ppm	5,8
Trimble 5601 DR 200+	Trimble	1	1	3 мм + 3 ppm	6,7

Во Вьетнаме в настоящее время начинают применять спутниковые методы для определения деформаций крупных инженерных сооружений. Например, Акционерное консультативно-строительное общество энергетических объектов № 1 (Power engineering consulting JSC № 1 - PECC) применяет спутниковые технологии, которые сочетаются с применением электронных тахеометров для наблюдений за деформациями ГЭС Туен Кьуанг и Ялы [8, 40].

### 1.3.4. Сроки и периодичность проведения измерений

Наблюдения за деформациями гидротехнических сооружений и их оснований выполняют периодически отдельными циклами и в определенные сроки. Цикл измерений может длиться от нескольких часов до нескольких дней в зависимости от объема работ и числа исполнителей. Для качества наблюдений важно, чтобы измерения выполнялись как можно быстрее. Даже в течение суток некоторые плотины и расположенные на ней знаки смещаются более чем на 1 мм. Это может привести к дополнительным ошибкам измерений. Кроме того, гидротехников интересует положение сооружения на определенный момент времени. Примерная периодичность наблюдений приведена в табл. 1.5 [41].

Измерение осадок начинают сразу же после укладки в котлован первых кубометров бетона. При строительстве крупных сооружений на мягких основаниях наблюдения за осадками начинают обычно с определения подъема дна строительного котлована.

Первый цикл измерений горизонтальных смещений проводят перед постановкой сооружения под напор. Но в ряде случаев, особенно на тонких бетонных плотинах, возникает необходимость оценить влияние изменения температуры на горизонтальные смещения. Тогда дополнительно до наполнения водохранилища выполняют несколько циклов определения относительных горизонтальных смещений. Также возникает необходимость измерения горизонтальных смещений до наполнения водохранилища на крупных земляных плотинах, возводимых в горных районах.

Своевременному выполнению первого цикла измерений придается большое значение, так как запаздывание начала измерений может дать ложное представление о деформациях из-за потери данных уже прошедших изменений. В строительный период, а также во время наполнения водохранилища все процессы в сооружениях (осадки, горизонтальные смещения, фильтрация и связанные с ней явления) развиваются быстро, и поэтому интервалы между циклами наблюдений невелики и связаны с величинами ожидаемой деформации, а также с этапами наполнения водохранилища.

Таблица 1.5. Периодичность наблюдений за деформациями гидротехнических сооружений

Виды деформаций	Цикличность			
	до наполнения водохранилища	наполнение водохранилища	2-3 года после наполнения водохранилища	постоянная эксплуатация
<i>Каменно-земляные плотины, шлюзы</i>				
Осадки	ежемесячно	ежемесячно	1-2 раза в квартал	2 раза в год
Горизонтальные смещения: относительные абсолютные	2 цикла	еженедельно	2 раза в месяц	ежемесячно
	1-2 цикла	ежеквартально	ежеквартально	1-2 раза в год
<i>Каменно-земляные плотины</i>				
Осадки, горизонтальные смещения	Ежеквартально	Ежемесячно	Ежеквартально	1-2 раза в год
<i>Приплотинные ГЭС, сооружения деривационных ГЭС, ГАЭС</i>				
Осадки	ежеквартально		1-2 раза в год	
Горизонтальные смещения опор трубопроводов	1-2 раза в квартал		2-4 раза в год	

После каждого землетрясения силой более 4 баллов, происшедшего в районе расположения сооружений, выполняют внеочередной цикл измерений.

После затухания остаточных деформаций (процесс может длиться 10 лет и

более) измерения по сооружениям, входящим в напорный фронт, обычно не прекращают. В этот период задача наблюдений состоит в том, чтобы убедиться, что остаточные деформации отсутствуют и сооружение работает нормально. Опыт измерений на гидроузлах свидетельствует о необходимости продолжения наблюдений в этот период [11, 40].

Во Вьетнаме цикл наблюдений обычно определяется стандартами государства, или стандартами, применяемыми в зарубежных странах [59]. Первый цикл производится сразу после строительства фундамента сооружения. Следующий цикл выполняется один раз в два месяца в строительный период. В течение периода эксплуатации сооружений цикл наблюдений составляет от 1 до 2 раз в год [70].

### **1.3.5. Точность измерения деформаций**

Установление (назначение) оптимальной точности измерения деформации является очень важной задачей. С одной стороны, это показатель надежности полученных результатов. С другой стороны, он обычно определяет методологию работы и выбор необходимых средств измерения. Чрезмерная точность измерений приводит к необоснованным материальным затратам на производство работ, а ее недооценка не позволит качественно решить основную задачу наблюдений. Однако на сегодняшний день эта задача не имеет строгого математического решения, и в литературе, в том числе нормативной, имеются разные мнения о точности измерений деформаций одинаковых объектов.

В табл. 1.6 приведены величины средних квадратических ошибок определения абсолютных осадок и горизонтальных смещений гидротехнических сооружений согласно требованиям СНиП III-2-75. Точность определения относительных деформаций должна быть в несколько раз выше. Ошибки для бетонных сооружений и их оснований составляют 0,2-0,3 мм, для земляных сооружений – 0,5-1,5 мм [41].

Решая задачу выбора оптимальных значений точности измерения деформа-

ций, обычно учитывают следующие предпосылки:

- 1) требования нормативных документов;
- 2) реальную точность геодезических инструментов и методов;
- 3) соотношение между ошибкой определения смещения и самим смещением (у разных авторов оно колеблется в пределах 1:10 – 1:4);
- 4) предельно допустимая деформация сооружения;
- 5) минимальная величина деформации, которую определяют между двумя циклами измерений.

Таблица 1.6. Средние квадратические ошибки определения абсолютных осадок и горизонтальных смещений гидротехнических сооружений

Объекты наблюдений	Средняя квадратическая ошибка определения деформации, мм	
	осадки	горизонтальные смещения
Бетонные сооружения на скальных основаниях	1	1
Бетонные сооружения на сжимаемых грунтах	2	2
Земляные сооружения:		
строительный период	10	5-10
эксплуатационный период	5	3-5
Подъем дна строительного котлована:		
скальные грунты	1-2	-
сжимаемые грунты	5	-
Оползни	30-50	10
Обвалоопасные участки скального массива	1-2	1-2

Очевидно, что точность измерения деформаций имеет определяющее значение именно для решения упомянутых задач. Решение их относится к компетенции гидротехников и специалистов по основаниям плотин. Только они, по мнению автора, могут и должны определять научно обоснованные требования к точности определения деформаций.

В табл. 1.7 приведены величины средних квадратических ошибок определения горизонтальных смещений сооружений во Вьетнаме, полученных согласно требованиям ТСХДVN 351:2005 [70].

Таблица 1.7. Средние квадратические ошибки определения горизонтальных смещений сооружений во Вьетнаме

ТТ	Наблюдаемые объекты	Средняя квадратическая ошибка определения деформации, мм
1	Бетонные сооружения на скальных основаниях	1
2	Бетонные сооружения на сжимаемых грунтах	2
3	Сооружения на скальных грунтах	5
3	Сооружения на низких сжимаемых грунтах	10
4	Земляные сооружения	15

Во Вьетнаме для большинства типовых сооружений требуемая точность определения осадок обеспечивается государственным нивелированием I, II, и III классов, основные технические характеристики которых представлены в табл. 1.8 [71].



Таблица 1.8. Основные технические характеристики государственного нивелирования Вьетнама

Класс нивелирования	Длина плеч, м	$m_{h_{i/1\text{км}}}$ , мм	$m_{h_{\text{см}}}$ , мм	Допустимая невязка, мм
I	50	0,50	0,16	$3\sqrt{L}$ км
II	65	0,84	0,42	$5\sqrt{L}$ км
III	75	1,68	0,65	$10\sqrt{L}$ км

#### 1.4. Современное состояние работ по наблюдениям за деформациями гидротехнических сооружений во Вьетнаме

В настоящее время во Вьетнаме на подавляющем большинстве ГТС проведены работы по наблюдениям за деформациями. Этот вопрос рассматривается во многих научных докладах, дипломах, диссертациях, статьях и т.д. [8, 40, 59, 61-63, 72-74]. После исследования ситуации, сложившейся при наблюдениях за деформациями гидротехнических сооружений, автор диссертации делает следующие выводы:

- Во Вьетнаме в настоящее время нет возможности создавать высокоточные приборы, поэтому в основном используются современные импортные приборы;
- большинство наблюдений за деформациями проводятся с помощью традиционных технологий;
- разработка теории оптимального проектирования геодезических сетей наблюдений за деформациями выполняется, но редко применяется на практике;
- информационные технологии используются лишь для автоматизации вычислений. Имеется несколько программ, но пока они не могут удовлетворять требованиям обработки результатов наблюдений за деформациями гидротехнических сооружений.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ДЕФОРМАЦИЙ

### 2.1. Параметрический способ уравнивания

#### 2.1.1. Этапы уравнивания

Из теории математической обработки известно, что уравнивание по методу наименьших квадратов параметрическим способом состоит из следующих этапов:

1. Определение числа всех измерений  $n$ , и числа необходимых измерений  $k$ .
2. Выбор параметров  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , число которых равно  $k$ , и они должны быть независимыми друг от друга. В качестве параметров выбирают или сами измерения, или их функции (координаты определяемых пунктов, отметки).

3. Составление параметрических уравнений связи  $Y_i = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , или кратко в матричном виде  $Y = f(x)$ ,

где  $X_j$  - истинные значения параметров;

$Y_i$  - истинные значения измеряемых величин.

4. Составление параметрических уравнений поправок

$$V = A\Delta X + L;$$

где  $V$  – вектор поправок к результатам измерений;

$A$  – матрица коэффициентов;

$\Delta X$  – вектор поправок к приближенным значениям параметров;

$L$  – вектор свободных членов.

5. Составление матрицы весов измерений  $P$ .

6. Составление системы нормальных уравнений поправок

$$R \Delta X + A^T P L = 0,$$

где  $R = A^T P A$ .

7. Решение системы нормальных уравнений поправок

$$\Delta X = -R^{-1}A^T PL.$$

Необходимо отметить, что обратная матрица  $R^{-1}$  не только позволяет найти решение системы нормальных уравнений, но и является обратной весовой матрицей уравненных параметров  $Q_x$ , позволяющей оценить точность любого элемента сети после уравнивания.

#### 8. Вычисление поправок к результатам измерений

$$V = A\Delta X + L.$$

#### 9. Вычисление уравненных значений параметров

$$\bar{x}_j = x_j^0 + \delta x_j$$

и уравненных измеренных величин

$$\hat{y}_i = y_i + v_i,$$

где  $x_j^0$  – приближенные значения параметров;

$y_i$  – результаты измерений;

$\delta x_j$  – поправки к приближенным значениям параметров;

$v_i$  – поправки к результатам измерений из уравнивания.

#### 10. Выполнение контроля результатов уравнивания.

#### 11. Оценка точности.

### 2.1.2. Примеры составления параметрических уравнений связи и параметрических уравнений поправок в плановых сетях

#### *а. Для измеренной стороны*

Параметрическое уравнение связи для стороны устанавливает зависимость между значением измерения  $S_{12}$  и параметрами – координатами начального и конечного пунктов измеряемой стороны (рис. 2.1). Это уравнение имеет вид:

$$\tilde{S}_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

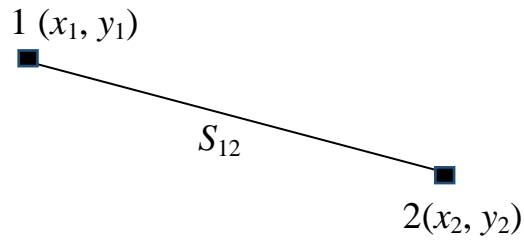


Рисунок 2.1. Измерение длины стороны между пунктами 1 и 2

Уравнение поправок для измеренной стороны имеет вид:

$$v_{S_{12}} = a_1 \delta x_1 + a_2 \delta y_1 + a_3 \delta x_2 + a_4 \delta y_2 + l_{S_{12}},$$

где  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ ,  $\delta x_2$  и  $\delta y_2$  – поправки в приближенные значения параметров, т.е. в координаты  $x_1^0$ ,  $y_1^0$ ,  $x_2^0$  и  $y_2^0$ ;

коэффициенты  $a_{ij}$  – частные производные от уравнения связи по каждому параметру.

Находим эти производные

$$a_1 = \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} = -\cos \alpha_{12}; \quad a_2 = \frac{\partial S_{12}}{\partial y_1} = -\sin \alpha_{12}; \quad a_3 = \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} = \cos \alpha_{12}; \quad a_4 = \frac{\partial S_{12}}{\partial y_2} = \sin \alpha_{12}.$$

Окончательно уравнение поправок выразим в виде:

$$v_{S_{12}} = -\cos \alpha_{12} \delta x_1 - \sin \alpha_{12} \delta y_1 + \cos \alpha_{12} \delta x_2 + \sin \alpha_{12} \delta y_2 + l_{S_{12}},$$

где  $l_{S_{12}} = \sqrt{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2} - S_{12}$ .

*б. Для измеренного дирекционного угла*

Параметрическое уравнение связи для измеренного дирекционного угла (рис. 2.2) имеет вид:

$$\tilde{\alpha}_{12} = \arctg \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}.$$

Чтобы составить уравнение поправок, найдем частные производные от уравнения связи по каждому параметру

$$a_1 = \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_1} = \frac{\sin \alpha_{12}}{S_{12}} = b'_{12}; \quad a_2 = \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial y_1} = \frac{-\cos \alpha_{12}}{S_{12}} = -c'_{12};$$

$$a_3 = \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_2} = \frac{-\sin \alpha_{12}}{S_{12}} = -b'_{12}; \quad a_4 = \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial y_2} = \frac{\cos \alpha_{12}}{S_{12}} = c'_{12}.$$

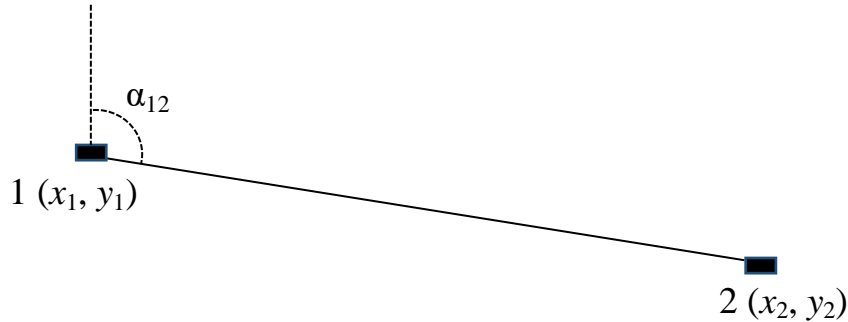


Рисунок 2.2. Измерение дирекционного угла между пунктами 1 и 2

Заметим, что каждая такая производная имеет размерность, обратную размерности измерения длины линии  $S_{12}$ . Учитывая, что общий вид параметрического уравнения поправок в этом случае имеет вид

$$v_{\alpha_{12}} = a_1 \delta x_1 + a_2 \delta y_1 + a_3 \delta x_2 + a_4 \delta y_2 + l_{\alpha_{12}},$$

каждое слагаемое здесь будет безразмерным. Следовательно, и поправка  $v$  в дирекционный угол будет безразмерной, т.е. в радианной мере. Чтобы поправка получилась в градусной мере, например, в секундах, необходимо каждую производную умножить на  $\rho$  в секундах

$$b_{12} = \rho b'_{12}; \quad c_{12} = \rho c'_{12}.$$

Свободный член  $l_{\alpha_{12}}$  также должен быть задан в секундах. Тогда для дирекционного угла уравнение поправок выразим в виде:

$$v_{\alpha_{12}} = b_{12} \delta x_1 - c_{12} \delta y_1 - b_{12} \delta x_2 + c_{12} \delta y_2 + l_{\alpha_{12}}.$$

*б. Для измеренного угла*

Выразим измеренный угол  $\beta$  через координаты определяемых пунктов и получим параметрическое уравнение связи для измеренного угла, которое равно разности дирекционных углов направлений 1-2 и 1-3 (рис. 2.3):

$$\tilde{\beta} = \operatorname{arctg} \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} - \operatorname{arctg} \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}.$$

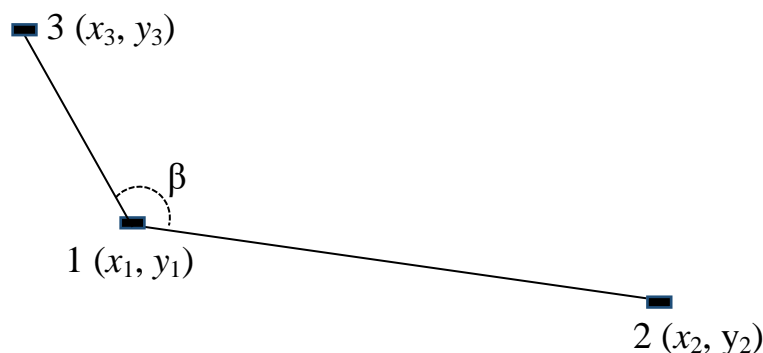


Рисунок 2.3. Измерение угла на пункте 1 между пунктами 2 и 3

На основании уравнения поправок для дирекционного угла, можно записать параметрическое уравнение поправок для измеренного угла:

$$v_{\beta} = (b_{12} - b_{13})\delta x_1 + (-c_{12} + c_{13})\delta y_1 - b_{12}\delta x_2 + c_{12}\delta y_2 + b_{13}\delta x_3 - c_{13}\delta y_3 + l_{\beta}.$$

Свободный член  $l_{\beta}$  вычисляется по формуле:

$$l_{\beta} = \left( \operatorname{arctg} \frac{y_2^0 - y_1^0}{x_2^0 - x_1^0} - \operatorname{arctg} \frac{y_3^0 - y_1^0}{x_3^0 - x_1^0} \right) - \beta$$

## 2.2. Основы рекуррентного способа уравнивания

### 2.2.1 Теоретические основы рекуррентного способа уравнивания

Известно, что в последнее время широко применяется рекуррентное (последовательное) уравнивание, которое позволяет включать в сеть новые измерения и исключать избыточные измерения, без переуравнивания сети сразу получать матрицу обратных весов неизвестных, кроме того, эффективно осуществлять контроль и поиск грубых ошибок измерений, не прибегая к коррелятивному способу уравнивания. Благодаря исследованиям проф., д.т.н. Ю.И. Маркузе, рекуррентный способ уравнивания применяется везде, где он оказывается полезным, например, при обработке результатов измерений, оптимальном проектировании геодезических сетей и т.д. [6, 20-25, 28-33]. Рассмотрим теорию рекуррентного способа

уравнивания.

Пусть имеется геодезическая сеть, которая содержит  $i - 1$  измерений. После уравнивания этой сети получим матрицу обратных весов неизвестных  $Q_{i-1}$ , вектор неизвестных  $x_{i-1}$  и квадратичную форму  $\varphi_{i-1}$ . Если в сеть включаем новую  $i$ -ю группу измерений, то матричное уравнение поправок имеет вид:

$$V_i = A_i \Delta x_i + L_i \quad (2.1)$$

с весовой матрицей  $P_i$ .

Далее задача состоит в получении новых алгебраических объектов  $x_i$ ,  $Q_i$  и  $\varphi_i$  без переуравнивания всей сети. Её решение относится к виду уравнений поправок (2.1).

Матрица коэффициентов нормальных уравнений имеет вид:

$$R_i = R_{i-1} + A_i^T P_i A_i, \quad (2.2)$$

где  $A_i$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок  $i$ -й группы, матрица  $R_{i-1} = A_{i-1}^T P_{i-1} A_{i-1}$  составлена для уравнений поправок, возникающих в уравненной ранее сети

$$V_{i-1} = A_{i-1} \Delta x_{i-1} + L_{i-1}, \quad (2.3)$$

Приведем известную лемму об обращении матриц:

$$(S + T^T P T)^{-1} = S^{-1} - S^{-1} T^T (P^{-1} + T S^{-1} T^T)^{-1} T S^{-1} \quad (2.4)$$

справедливую для невырожденных матриц  $S$  и  $T$ .

Для матрицы  $Q_i = R_i^{-1}$  согласно (2.4) получим выражение:

$$Q_i = Q_{i-1} - Z_i^T N_i^{-1} Z_i, \quad (2.5)$$

где матрицы:

$$\begin{aligned} Z_i^T &= Q_{i-1} A_i^T; \\ N_i &= P_i^{-1} + A_i Q_{i-1} A_i^T = P_i^{-1} + A_i Z_i^T. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В частном случае, когда  $a_i$  – вектор коэффициентов  $i$ -ого параметрического уравнения поправок, формулу (2.5) можно записать как:

$$Q_i = Q_{i-1} - \frac{1}{g_i} Z_i^T Z_i, \quad (2.7)$$

$$\text{где } Z_i^T = Q_{i-1} a_i^T; \quad g_i = p_i^{-1} + a_i Q_{i-1} a_i^T = p_i^{-1} + a_i Z_i^T. \quad (2.8)$$

В случае исключения избыточных измерений по рекуррентному способу уравнивания, необходимо осуществлять вычисления по формулам (2.5) или (2.7), но с матрицей обратных весов или обратным весом со знаком минус.

Для вычисления вектора неизвестных  $x_i$ . воспользуемся общей формулой параметрического способа, имеющей вид  $\Delta x = -Qb$ . Матрица  $A^T$  имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{i-1}^T & A_i^T \end{pmatrix}, \text{ а вектор } L = \begin{pmatrix} L_{i-1} \\ L_i \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор  $b = A^T P L = A_{i-1}^T P_{i-1} L_{i-1} + A_i^T P_i L_i$ . Но так как при рекуррентном уравнивании сеть с  $(i - 1)$  измерениями уже уравнена, то вектор  $L_{i-1} = V_{i-1}$ , и по лемме Гаусса  $A_{i-1}^T P_{i-1} L_{i-1} = 0$ , то с учётом формулы  $A_i^T Z_i = Z_i^T A_i = N_i - P_i^{-1}$ , получим

$$-\Delta x_i = Q A_i^T P_i L_i = (Q_{i-1} - Z_i^T N_i^{-1} Z_i) A_i^T P_i L_i = Z_i^T P_i L_i - Z_i^T N_i^{-1} (N_i - P_i^{-1}) P_i L_i.$$

Вектор свободных членов  $L_i$  вычисляется по формуле:

$$L_i = \varphi_i(x_{i-1}) - y_i, \quad (2.9)$$

где  $\varphi_i(x_{i-1})$  – исходная вектор-функция связи;  $y_i$  – вектор  $i$ -й группы измерений.

Поэтому окончательно можно записать:

$$\Delta x_i = -Z_i^T N_i^{-1} L_i. \quad (2.10)$$

После учёта каждой  $i$ -й группы уравнений вектор параметров можно записать так:

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x_i = x_{i-1} - Z_i^T N_i^{-1} L_i. \quad (2.11)$$



Следовательно, после учёта каждого измерения на данном этапе можно получить уравненные неизвестные. Это одно из преимуществ рекуррентного способа уравнивания.

Проделав аналогичный вывод для квадратичной формы  $\varphi = L^T P L + b^T L$ , найдем, что

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + L_i^T N_i^{-1} L_i. \quad (2.12)$$

Для случая одного  $i$ -го измерения находим

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x_i = x_{i-1} - \frac{1}{g_i} Z_i^T l_i; \quad (2.13)$$

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \frac{l_i^2}{g_i}. \quad (2.14)$$

Очевидно, что при учете необходимых измерений  $\varphi_i = \varphi_{i-1}$ , новые неизвестные могут быть рассчитаны на основе необходимых измерений с использованием формул, известных из геодезии. Имея какие-либо приближенные значения неизвестных с исходной матрицей  $Q_0$ , также можно применить формулу (2.6). По этой причине одним из достоинств рекуррентного уравнивания является более точное вычисление приближенных значений неизвестных, так как каждый раз при учете измерений выполняется уравнивание сети [20-22].

В разделе 2.2.2 будет рассмотрен вопрос о выборе исходной матрицы обратных весов неизвестных  $Q_0$ .

### **2.2.2. Выбор исходной матрицы обратных весов неизвестных**

#### **при рекуррентном уравнивании**

Из теории рекуррентного уравнивания можно сделать вывод о том, что для начала вычислительного процесса необходима исходная матрица  $Q_0$  обратных весов всех неизвестных. Рассмотрим способ решения этой задачи.

Допустим, что все неизвестные, определяемые из уравнивания сети, измерены независимо друг от друга и имеют диагональную матрицу весов  $P_0$ . Тогда, согласно формулам уравнивания с учетом ошибок исходных данных, в качестве которых и будем рассматривать эти неизвестные, можно написать матрицу коэффициентов нормальных уравнений  $\bar{R}=R+P_0$ . Для обращения  $\bar{R}$  по формуле (2.5) или (2.7) в качестве исходной примем матрицу  $Q_0=P_0^{-1}$ . Однако на самом деле никаких измерений неизвестных не выполнялось, или они были выполнены с весами, равными нулю. Тогда матрица  $Q_0=\{\infty \dots \infty\}$ . Положим, что матрица  $Q_0=10^m E$ , где  $m$  – достаточно большое число, заменяющее при вычислениях  $\infty$  [20-22].

Автор исследовал значение  $m$  для проектирования и обработки результатов измерений плановых геодезических сетей при наблюдениях за деформациями на гидроэлектростанциях [35]. На практике во Вьетнаме средняя длина сторон сети ГЭС не превышает 1,5 км, поэтому исследовались следующие три случая:

- две линейные геодезические сети с разными величинами средней длины стороны;

- одна линейно-угловая геодезическая сеть

В каждом случае, вычисляли матрицу  $Q$  по рекуррентному способу уравнивания для различных значений  $m$  и матрицу  $Q$  по параметрическому способу уравнивания, затем сравнивали полученные диагональные элементы этих матриц. В элементах матриц  $Q$  оставляли 4 значащих цифры после запятой. При совпадении элементов матриц, полученных по рекуррентному способу и традиционному способу уравнивания, вычисления прекращали и делали вывод о значении  $m$ .

***Первый случай: линейная геодезическая сеть со средней длиной стороны  
примерно 1000 м***

Геодезическая сеть для наблюдений (рис. 2.4) находится на гидроэлектростанции Хоабинь. ГЭС Хоабинь («Мир») – электростанция на реке Да, располо-

женная в провинции Хоабинь, является одной из самых больших гидроэлектростанций во Вьетнаме. В сети два исходных пункта: М12, М15 и четыре определяемых пункта: Т4, Т13, Т16, Т17. Координаты пунктов геодезической сети приведены в табл. 2.1.

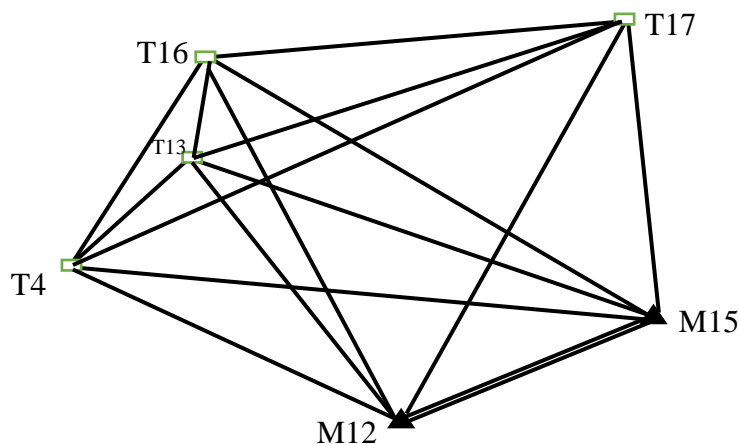


Рисунок 2.4. Геодезическая сеть наблюдения за деформациями ГЭС Хоабинь

Таблица 2.1. Координаты пунктов геодезической сети ГЭС Хоабинь

№	Исходные пункты	Координаты		№	Определяемые пункты	Координаты	
		X, м	Y, м			X, м	Y, м
1	М12	2301746,3	534341,9	1	Т16	2303057,6	533977,1
2	М15	2302084,7	534562,6	2	Т17	2303390,0	534490,5
-	-	-	-	3	Т13	2302716,4	533846,6
-	-	-	-	4	Т4	2302235,5	533675,6

Измеряется 14 сторон (табл. 2.2). Измерения производятся электронным тахеометром «Leica Viva TS11»; точность измерения расстояния составляет 1 мм + 1,5 ppm.

По рекуррентному способу уравнивания с различными значениями  $m$  получаем диагональные матрицы:

$$m = 1 \Rightarrow$$

$$Q = \{1,3669 \quad 3,3702 \quad 1,9371 \quad 4,6340 \quad 1,3775 \quad 2,4688 \quad 1,8584 \quad 1,3598\}$$

$$m = 2 \Rightarrow$$

$$Q = \{3,1479 \quad 12,3407 \quad 2,5827 \quad 20,0887 \quad 4,0574 \quad 6,7239 \quad 5,8610 \quad 2,2542\}$$

$m = 3 \Rightarrow$

$Q = \{4,5458 \quad 19,8907 \quad 2,6855 \quad 33,2189 \quad 6,2828 \quad 10,1602 \quad 9,1905 \quad 2,9082\}$

$m = 4 \Rightarrow$

$Q = \{4,7982 \quad 21,2619 \quad 2,6972 \quad 35,6049 \quad 6,6866 \quad 10,7822 \quad 9,7946 \quad 3,0257\}$

$m = 5 \Rightarrow$

$Q = \{4,8255 \quad 21,4103 \quad 2,6984 \quad 35,8631 \quad 6,7303 \quad 10,8495 \quad 9,8600 \quad 3,0384\}$

$m = 6 \Rightarrow$

$Q = \{4,8283 \quad 21,4253 \quad 2,6986 \quad 35,8892 \quad 6,7347 \quad 10,8563 \quad 9,8666 \quad 3,0397\}$

$m = 7 \Rightarrow$

$Q = \{4,8286 \quad 21,4268 \quad 2,6986 \quad 35,8918 \quad 6,7351 \quad 10,8570 \quad 9,8672 \quad 3,0398\}$

$m = 8 \Rightarrow$

$Q = \{4,8286 \quad 21,4269 \quad 2,6986 \quad 35,8921 \quad 6,7352 \quad 10,8570 \quad 9,8673 \quad 3,0398\}$

$m = 9 \Rightarrow$

$Q = \{4,8286 \quad 21,4269 \quad 2,6986 \quad 35,8921 \quad 6,7352 \quad 10,8570 \quad 9,8673 \quad 3,0398\}$

Таблица 2.2. Величины сторон геодезической сети ГЭС Хоабинь

№ п/п	Сторона	Длина, м	№ п/п	Сторона	Длина, м
1	T16 - T17	611,612	8	T17 - M12	1650,403
2	T16 - T13	365,305	9	T17 - M15	1307,290
3	T16 - T4	875,643	10	T13 - T4	510,398
4	T16 - M12	1361,098	11	T13 - M12	1089,227
5	T16 - M15	1135,493	12	T13 - M15	954,830
6	T17 - T13	931,850	13	T4 - M12	826,603
7	T17 - T4	1413,129	14	T4 - M15	899,728
Средняя длина сторон 955,774 м					
Самая длинная сторона 1650,403 м					

По параметрическому способу уравнивания, вычисляем диагональную матрицу:

$$Q = \{ 4,8286 \quad 21,4268 \quad 2,6986 \quad 35,8918 \quad 6,7352 \quad 10,8570 \quad 9,8673 \quad 3,0398 \}$$

*Вывод:* в данном случае при  $m = 8 \div 9$  матрица  $Q$ , полученная по рекуррентному способу уравнивания, совпадает с матрицей  $Q$ , полученной по параметрическому способу уравнивания.

***Второй случай: линейная геодезическая сеть со средней длиной стороны примерно 400 м***

Геодезическая сеть для наблюдений находится на ГЭС Тхак Ба, являющейся первой ГЭС Вьетнама, и расположена в провинции Йен Бай (рис. 2.5). В сети два исходных пункта: М1, М2 и четыре определяемых пункта: Т2, Т3, Т4, Т5.

Координаты пунктов геодезической сети приведены в табл. 2.3, а длины измеренных сторон – в табл. 2.4. Измерения производятся тахеометром «Leica Viva TS11»; точность измерения расстояния составляет  $1 \text{ мм} + 1,5 \text{ ppm}$ .

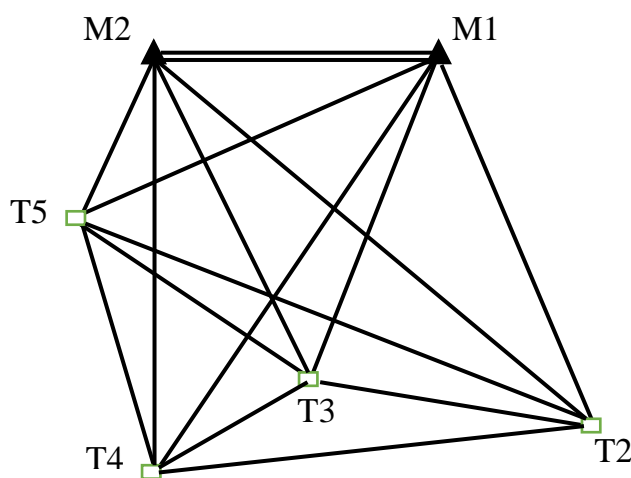


Рисунок 2.5. Геодезическая сеть наблюдения за деформациями ГЭС Тхак Ба

Таблица 2.3. Координаты пунктов геодезической сети Тхак Ба

№	Исходные пункты	Координаты		№	Определяемые пункты	Координаты	
		X, м	Y, м			X, м	Y, м
1	М1	500,010	2359,986	1	Т2	224,652	2620,591
2	М2	500,020	1999,999	2	Т3	211,747	2428,932
-	-	-	-	3	Т4	134,832	2174,645
-	-	-	-	4	Т5	305,23	2072,063

Таблица 2.4. Величины сторон геодезической сети ГЭС Тхак Ба

№ п/п	Сторона	Длина, м	№ п/п	Сторона	Длина, м
1	T2 - T3	192,093	8	T3 - M1	296,394
2	T2 - T4	454,902	9	T3 - M2	516,803
3	T2 - T5	554,415	10	T4 - T5	198,893
4	T2 - M1	379,127	11	T4 - M1	409,520
5	T2 - M2	678,942	12	T4 - M2	404,801
6	T3 - T4	265,665	13	T5 - M1	347,619
7	T3 - T5	368,910	14	T5 - M2	207,693
Средняя длина сторон 375,717 м					
Самая длинная сторона 678,942 м					

По рекуррентному способу уравнивания с различными значениями  $m$  получаем диагональные матрицы:

$$m = 1 \Rightarrow$$

$$Q = \{2,3010 \quad 0,8228 \quad 1,0062 \quad 0,8246 \quad 0,5690 \quad 1,0794 \quad 0,6761 \quad 0,6987\}$$

$$m = 2 \Rightarrow$$

$$Q = \{3,1893 \quad 1,1022 \quad 1,1759 \quad 1,0833 \quad 0,6055 \quad 1,4313 \quad 0,7322 \quad 0,8193\}$$

$$m = 3 \Rightarrow$$

$$Q = \{3,3252 \quad 1,1455 \quad 1,1992 \quad 1,1229 \quad 0,6095 \quad 1,4851 \quad 0,7386 \quad 0,8365\}$$

$$m = 4 \Rightarrow$$

$$Q = \{3,3396 \quad 1,1500 \quad 1,2017 \quad 1,1270 \quad 0,6099 \quad 1,4908 \quad 0,7393 \quad 0,8383\}$$

$$m = 5 \Rightarrow$$

$$Q = \{3,3410 \quad 1,1505 \quad 1,2019 \quad 1,1275 \quad 0,6100 \quad 1,4914 \quad 0,7394 \quad 0,8385\}$$

$$m = 6 \Rightarrow$$

$$Q = \{3,3412 \quad 1,1505 \quad 1,2019 \quad 1,1275 \quad 0,6100 \quad 1,4914 \quad 0,7394 \quad 0,8385\}$$

$$m = 7 \Rightarrow$$

$$Q = \{3,3412 \quad 1,1505 \quad 1,2019 \quad 1,1275 \quad 0,6100 \quad 1,4914 \quad 0,7394 \quad 0,8385\}$$

$m = 8 \Rightarrow$

$Q = \{3,3412 \quad 1,1505 \quad 1,2019 \quad 1,1275 \quad 0,6100 \quad 1,4914 \quad 0,7394 \quad 0,8385\}$

$m = 9 \Rightarrow$

$Q = \{3,3412 \quad 1,1505 \quad 1,2019 \quad 1,1275 \quad 0,6100 \quad 1,4914 \quad 0,7394 \quad 0,8385\}$

По параметрическому способу уравнивания получаем диагональную матрицу:

$Q = \{3.3412 \quad 1.1505 \quad 1.2019 \quad 1.1275 \quad 0.6100 \quad 1.4914 \quad 0.7394 \quad 0.8385\}$

*Вывод:* в этом случае, при  $m = 6 \div 9$ , матрица  $Q$ , полученная по рекуррентному способу уравнивания, совпадает с матрицей  $Q$ , полученной по параметрическому способу уравнивания.

### ***Третий случай: линейно-угловая геодезическая сеть***

Имеется геодезическая сеть, построенная для наблюдений за горизонтальными смещениями ГЭС ПлейКронг. Схема сети приведена на рис. 2.6.

Координаты пунктов геодезической сети приведены в табл. 2.5. Измеряется 14 сторон (табл. 2.6) и 8 углов (2.7). Измерения производятся электронным тахеометром «ТС-2003» с точностью измерения  $m_{\beta} = 1''$  и  $m_s = 1 \text{ мм} + 1 \text{ ppm}$ , соответственно.

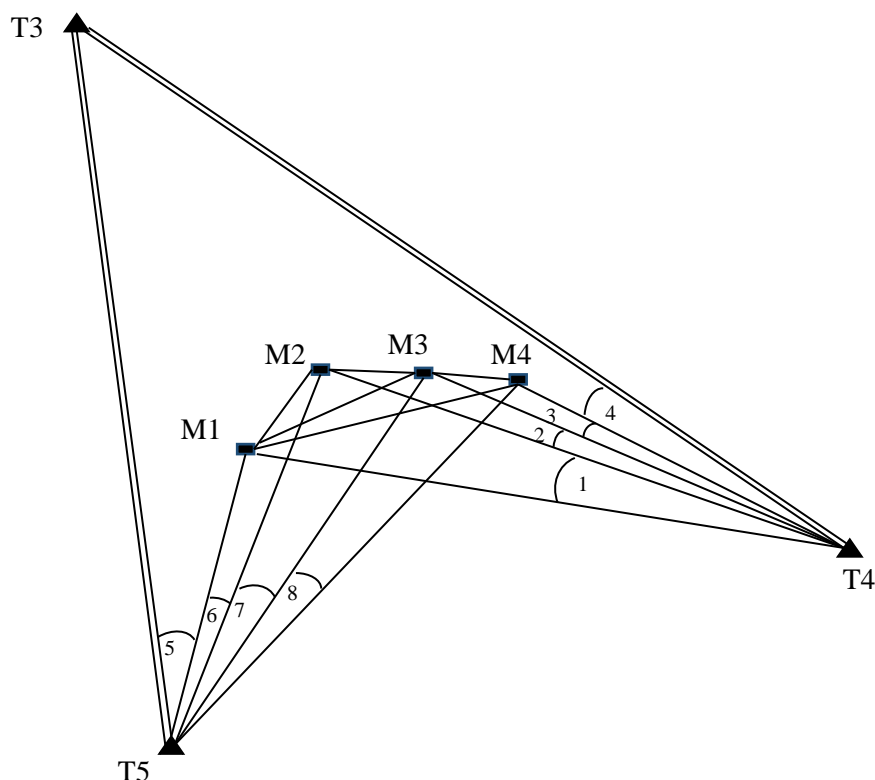


Рисунок 2.6. Геодезическая сеть наблюдений за горизонтальными смещениями ГЭС ПлейКронг

Таблица 2.5. Координаты пунктов геодезической сети ПлейКронг

№	Исходные пункты	Координаты		№	Определяемые пункты	Координаты	
		X, м	Y, м			X, м	Y, м
1	Т3	1 593	484	1	М1	1 593	485
		580,0832	865,9726			472,3584	060,9419
2	Т4	1 593	485	2	М2	1 593	485
		342,6603	442,0103			473,6848	076,8378
3	Т5	1 593	485	3	М3	1 593	485
		161.5039	019,2088			475,5302	098,9095
-	-	-	-	4	М4	1 593	485
						476,9276	115,5553

Таблица 2.6. Величины сторон геодезической сети ГЭС ПлейКронг

№	Стороны	Длина, м	№	Стороны	Длина, м
1	Т4 – М1	402,535	8	Т5 – М4	329,810
2	Т4 – М2	387,966	9	М1–М2	15,950
3	Т4 – М3	367,931	10	М1–М3	38,100
4	Т4 – М4	352,988	11	М1–М4	54,805
5	Т5 – М1	313,643	12	М2–М4	38,853
6	Т5 – М2	317,456	13	М3–М4	16,702
7	Т5 – М3	323,983	-	-	-
Средняя длина сторон 227,748 м					
Самая длинная сторона 402,535 м					



Таблица 2.7. Величины углов геодезической сети ГЭС ПлейКронг

№	УГЛЫ			Значения
				° ' "
1	M1	T4	M2	00 56 30,7
2	M2	T4	M3	01 25 53,2
3	M3	T4	M4	01 11 14,3
4	M4	T4	T3	00 02 34,6
5	T3	T5	M1	27 45 12,2
6	M1	T5	M2	02 48 45,8
7	M2	T5	M3	03 46 55,2
8	M3	T5	M4	02 44 39,2

По рекуррентному способу уравнивания с различными значениями  $m$  получаем диагональные матрицы:

$$m = 1 \Rightarrow$$

$$Q = \{0,7722 \quad 0,3533 \quad 0,6619 \quad 0,4192 \quad 0,6418 \quad 0,4212 \quad 0,6217 \quad 0,3935\}$$

$$m = 2 \Rightarrow$$

$$Q = \{0,8329 \quad 0,3769 \quad 0,7077 \quad 0,4480 \quad 0,6844 \quad 0,4504 \quad 0,6603 \quad 0,4216\}$$

$$m = 3 \Rightarrow$$

$$Q = \{0,8395 \quad 0,3796 \quad 0,7126 \quad 0,4512 \quad 0,6890 \quad 0,4536 \quad 0,6644 \quad 0,4247\}$$

$$m = 4 \Rightarrow$$

$$Q = \{0,8402 \quad 0,3798 \quad 0,7131 \quad 0,4515 \quad 0,6895 \quad 0,4539 \quad 0,6649 \quad 0,4250\}$$

$$m = 5 \Rightarrow$$

$$Q = \{0,8403 \quad 0,3798 \quad 0,7132 \quad 0,4515 \quad 0,6895 \quad 0,4540 \quad 0,6649 \quad 0,4250\}$$

$$m = 6 \Rightarrow$$

$$Q = \{0,8403 \quad 0,3799 \quad 0,7132 \quad 0,4516 \quad 0,6895 \quad 0,4540 \quad 0,6649 \quad 0,4250\}$$

$$m = 7 \Rightarrow$$

$$Q = \{0,8403 \quad 0,3799 \quad 0,7132 \quad 0,4516 \quad 0,6895 \quad 0,4540 \quad 0,6649 \quad 0,4250\}$$

$$m = 8 \Rightarrow$$

$$Q = \{0,8403 \quad 0,3799 \quad 0,7132 \quad 0,4516 \quad 0,6895 \quad 0,4540 \quad 0,6649 \quad 0,4250\}$$

$$m = 9 \Rightarrow$$

$$Q = \{0,8403 \quad 0,3799 \quad 0,7132 \quad 0,4516 \quad 0,6895 \quad 0,4540 \quad 0,6649 \quad 0,4250\}$$

По параметрическому способу уравнивания получаем диагональную матрицу:

$$Q = \{0,8403 \quad 0,3799 \quad 0,7132 \quad 0,4516 \quad 0,6895 \quad 0,4540 \quad 0,6649 \quad 0,4250\}$$

*Вывод:* в этом случае, при  $m = 8 \div 9$ , матрица  $Q$ , полученная по рекуррентному способу уравнивания, совпадает с матрицей  $Q$ , полученной по параметрическому способу уравнивания.

### ***Заключение.***

- При рекуррентном уравнивании исходная матрица имеет вид  $Q_0 = 10^m E$ .
- На основании выполненного исследования при проектировании и обработке результатов измерений плановых геодезических сетей наблюдений за деформациями гидротехнических сооружений во Вьетнаме можно рекомендовать значение величины  $m$  принимать равным  $8 \div 9$  для всех видов плановых геодезических сетей.

### 3. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

#### 3.1. Понятие об оптимальном проектировании

Внимание геодезистов всегда было обращено к совершенствованию методов обработки результатов измерений при заданном способе проведения эксперимента (измерения). Выбор самого способа эксперимента, т.е. проведение измерений, определялся, в основном, приближенно. Строгое же решение этой проблемы создает предпосылки для получения наибольшего количества сведений об изучаемых объектах при ограниченных затратах и поэтому является весьма актуальным.

В связи с этим оказывается совершенно необходимым широкое применение методов, которые позволяли бы оптимальным образом организовать измерения. Программа для ЭВМ, составленная на основе разработанного алгоритма проектирования, дает возможность в каждом конкретном случае получить объективно оптимальный вариант проекта.

Одной из возможностей оптимального проектирования является решение экстремальных задач, которые формулируются следующим образом: найти некоторые параметры  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , которые обеспечивают экстремальное значение целевой функции [45]:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq b_i. \quad (3.1)$$

Экстремум функции (3.1) определяется при соблюдении ряда условий: ограничений типа равенств или неравенств:

$$a_i \leq F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq b_i. \quad (3.2)$$

В результате решения задачи получают параметры  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Они будут оптимальными, если соответствуют экстремуму целевой функции (3.1) и условиям (3.2). Понятно, что изменения целевой функции и ограничения приводят к другим значениям параметров.

Эта задача решается различными приемами, объединяемыми под названием

математического программирования. Математическое программирование предоставляет возможность найти эффективное решение, при котором искомые параметры становятся оптимальными.

### 3.2. Классификация задач оптимальной геодезической сети

Задачи проектирования оптимальной геодезической сети подразделяются на четыре порядка. Они определяются следующим порядком проектирования: 1) нулевой; 2) первый; 3) второй; 4) третий.

К проектированию нулевого порядка относится задача, когда при заданных матрицах  $A$  и  $P$  требуется определить  $x$  и  $Q$ . Здесь  $A$  – матрица коэффициентов уравнений поправок (матрица конфигурации вектора сети),  $P$  – диагональная матрица весов измеряемых величин,  $x$  – вектор определяемых параметров сети,  $Q$  – матрица весовых коэффициентов параметров. Проектирование нулевого порядка решает задачу определения исходных геодезических данных и их корреляционной матрицы.

Проектирование первого порядка решает задачу определения конфигурации сети, т.е. при заданных матрицах  $P$  и  $Q$  требуется определить матрицу  $A$ . Решение этой задачи предусматривает при заданных затратах на измерение получить наибольшую точность искомых параметров путем определения оптимального положения точек и выбора оптимальной схемы проектируемой геодезической сети.

Проектирование второго порядка решает задачу определения оптимального плана измерений (матрицы  $P$ ) при заданных матрицах  $A$  и  $Q$ .

Проектирование третьего порядка, имеющее своей целью улучшить существующую сеть, заключается в частичном изменении конфигурации сети (матрицы  $A$ ) и разработке оптимального плана наблюдений (матрицы  $P$ ) для дополнительных элементов, включаемых в существующую сеть при заданной матрице  $Q$  [45].

### 3.3. Методы математического программирования геодезических измерений

В зависимости от целевой функции и ограничений выделяют различные методы математического программирования. Если целевая функция и ограничения имеют линейный вид, то применяют линейное программирование.

Как известно, общая задача линейного программирования, записанная в канонической форме, заключается в отыскании вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, x_n)$ , минимизирующего (максимизирующего) линейную форму (функцию цели задачи)

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.3)$$

при условиях  $x_j \geq 0$  и

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i; \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.4)$$

где  $a_{ij}, b_i; c_i$  – заданные постоянные величины, а  $m < n$ .

Область использования линейного программирования в геодезии очень широка. К нему прибегают при решении оптимального распределения весов измеряемых величин в геодезических сетях, при разработке проекта производства геодезических работ на строительной площадке и т.д. Для решения задач линейного программирования применяют симплексный метод (или его модификации), опирающийся на алгебраические процедуры итеративного характера.

В результате решения задачи линейного программирования искомые переменные могут принимать любые дробные значения. Однако есть класс задач линейного программирования, в которых переменные должны быть только целочисленными. Тогда применяют целочисленное (диофантовое) программирование [44]. В том случае, когда компоненты вектора  $x$  принимают только двоичные значения 0 или 1, целочисленное программирование называют бивалентным программированием. Задачи целочисленного программирования решают при оптимальном проектировании измерений, для отыскания наиболее эффективного распределения

технических средств измерения и т.д.

Круг задач геодезии, сводящихся к поиску оптимальных решений, относится главным образом к нелинейному программированию, которое является одним из основных разделов в теории оптимальных решений. При проектировании различных геодезических работ возникает необходимость в оптимизации нелинейной функции многих переменных. Нелинейное программирование в определенном смысле подобно линейному программированию, в нем отсутствует лишь требование линейности функции, хотя, конечно, теория нелинейного программирования охватывает и линейный случай.

Пусть при нелинейном программировании в математических терминах нам задана функция  $f(x)$ . Точка  $x$  является точкой в  $E^n$ , где  $E^n$  означает  $n$ -мерное евклидово пространство ( $x$  является  $n$ -мерным вектором-столбцом), а  $f(x)$  – точкой в  $E^{-1}$ . Целью является нахождение такого  $x$ , который максимизирует (минимизирует)  $f(x)$ . Следовательно,  $f$  называется целевой функцией. Однако точку не могут выбрать произвольно, потому что заданы  $m$  функций ограничений  $g_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ , и выбранный  $x$  должен подходить к условию  $g_i \geq 0$ . Точка  $x^*$ , в которой достигается максимум, называется оптимальной.

Для решения задач нелинейного программирования применяют: метод скорейшего спуска, модифицированный метод Ньютона, циклический координатный спуск, метод сопряженных градиентов, метод линейной аппроксимации, выпуклый симплексный метод и др. [10].

Кроме задач детерминированного математического программирования, где целевая функция приобретает вполне определенное значение, возможна оптимизация решения в условиях неопределенности, когда некоторые исходные параметры являются случайными. В этом случае применяют стохастическое программирование, которое может быть линейным и нелинейным. Так как решение почти всех задач инженерной геодезии происходит в условиях неопределенности, то легко представить себе достаточно широкую область использования стохастического программирования [45].

### **3.4. Проектирование оптимальной геодезической сети наблюдений за горизонтальными смещениями гидротехнических сооружений во Вьетнаме**

#### **3.4.1. Обоснование порядка проектирования**

Геодезические сети наблюдений за горизонтальными смещениями гидротехнических сооружений обычно создаются в сложной области, поэтому трудно выбрать количество, вид и расстановку исходных пунктов. Следовательно, в данном случае проектирование нулевого порядка не имеет смысла.

Проектирование второго порядка решает задачу определения оптимального плана измерений (матрицы  $P$ ) при заданных матрицах  $A$  и  $Q$ . Теоретически данный результат имеет определенный смысл, потому что он показывает место, где точность сети низка. Но это не соответствует действительности, поскольку на одной и той же измерительной станции возможны случаи, когда наблюдения должны проводиться с различной точностью.

Проектирование первого порядка решает задачу определения оптимального положения точек и рекомендации по оптимизации измерений. Плотность контрольных пунктов инженерных геодезических сетей относительно высока и эти пункты часто расположены в неудобных местах, поэтому невозможно изменить их положение. Кроме того, небольшое изменение положения точек ненамного улучшает качество сети. В связи с этим определение оптимального положения точек имеет небольшое значение.

В настоящее время электронный тахеометр находит самое широкое применение. Он позволяет измерять углы и стороны с высокой точностью. Поэтому, по мнению автора, определение оптимального количества и вида измерений при проектировании оптимальной геодезической сети наблюдения за горизонтальными смещениями гидротехнических сооружений имеет особый практический смысл [59,62, 63].

### 3.4.2. Применение рекуррентного уравнивания для оптимального проектирования измерений геодезических сетей

При наблюдениях за деформациями гидроэлектростанций наряду с требованиями к точности определения деформаций необходимо также сократить время измерений. Следовательно, необходимо выполнять измерения в сети в более короткий срок для обеспечения точной и своевременной подачи информации о деформациях сооружений. В полевых геодезических работах измерение углов занимает больше времени, чем измерение сторон. Кроме того, в настоящее время электронный тахеометр позволяет измерять стороны с высокой точностью. Поэтому именно линейная геодезическая сеть отвечает указанным выше требованиям – сокращает время выполнения работ, но при этом обеспечивает требуемую точность определения деформаций.

В работе рассматривается вопрос об определении оптимальной схемы измерений линейной геодезической сети при количестве минимально измеряемых сторон, максимальной точности положения наблюдаемых пунктов и средней квадратической ошибкой их положения, которая не должна превышать значения  $m_{\text{пред}}$ , задаваемого соответствующей инструкцией.

Целевыми функциями являются: минимальное количество измеренных сторон и меньшая из максимальных ошибок положения наблюдаемых пунктов. Условием является наибольшее значение ошибок положения наблюдаемых пунктов, не превышающее значения  $m_{\text{пред}}$ . В дополнение к этому условию, в зависимости от каждого конкретного сооружения могут существовать условия о количестве измеренных сторон до каждого пункта для жёсткости схемы сети.

Чтобы решить эту задачу с применением рекуррентного способа уравнивания выполняются следующие этапы [16].

1. Проектирование сети со всеми возможными измеряемыми сторонами.
2. Определение всех вариантов сочетаний  $C_j$  по  $j$  исключаемых измеряемых сторон из  $n$  возможных ( $j = 1, 2, \dots, r$ ); где  $r$  – число избыточных измерений;  $r = n - t$ ;



$t$  – число неизвестных. Число сочетаний  $C_j$  из  $n$  по  $j$ :

$$C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}. \quad (3.5)$$

3. По формуле рекуррентного уравнивания для удаления избыточных измерений оценивается точность сети и проверяется условие об ошибках положения наблюдаемых пунктов ( $m \leq m_{\text{пред}}$ ) после каждого исключения вариантов из множеств  $C_j$ . Это делается, начиная с  $j = 1$  до  $r$ . Находится первый вариант из  $C_1$ , который удовлетворяет условию. Далее выполняется проверка на соответствие условию вариантов из  $C_2, C_3, \dots, C_r$ . Если на каком-либо  $C_k$  не находится вариант, удовлетворяющий условию, то программа завершает вычисления и выводит результат. Тогда максимальное количество сторон, которое можно исключить, равно  $(j - 1)$ . Отсюда следует, что количество минимально необходимых измеряемых сторон вычисляется по формуле:

$$k = n - (j - 1).$$

Формула рекуррентного способа уравнивания для удаления  $i$ -ой группы избыточных измерений имеет вид [6, 21]:

$$Q_i = Q_{i-1} - Z_i^T N_i^{-1} Z_i, \quad (3.6)$$

где  $Q_i$  – матрица обратных весов неизвестных;

$$Z_i^T = Q_{i-1} A_i^T;$$

$A_i$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;

$$N_i = -P_i^{-1} + A_i Q_{i-1} A_i^T = -P_i^{-1} + A_i Z_i^T; P_i – матрица весов результатов измерений.$$

В частном случае  $a_i$  – вектор коэффициентов параметрических уравнений поправок  $i$ , и формула (3.6) принимает вид:

$$Q_i = Q_{i-1} - \frac{1}{g_i} Z_i^T Z_i, \quad (3.7)$$

где  $Z_i^T = Q_{i-1} a_i^T;$

$$g_i = -p_i^{-1} + a_i Q_{i-1} a_i^T = -p_i^{-1} + a_i Z_i^T;$$

$p_i$  – вес результата измерения  $i$ .

Если уравнивание начинается с  $i = 1$ , то исходная матрица  $Q_0 = 10^m E$ , где  $E$  – единичная матрица и  $m = 7$ .

Веса результатов измерений определяются по формуле:

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \quad (3.8)$$

где  $\mu$  – средняя квадратическая ошибка единицы веса;

$m_i$  – средняя квадратическая ошибка  $i$ -го измерения.

Средние квадратические ошибки положения наблюдаемого пункта вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} m_x &= \mu \sqrt{Q_{xx}}; \\ m_y &= \mu \sqrt{Q_{yy}}; \\ m_p &= \mu \sqrt{Q_{xx} + Q_{yy}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

4. Оценивается точность сети всех вариантов  $z$  исключаемых измеряемых сторон из  $n$  возможных измеряемых сторон ( $z = n - k$ ) и находится максимальная ошибка положения наблюдаемых пунктов после каждой оценки вариантов из множеств  $C_z$  (число сочетаний  $C_z$  из  $n$  по  $z$  вычисляется по формуле (3.5)).

5. Из найденных максимальных ошибок находится минимальная. Благодаря этому, получается оптимальная схема измерений с максимальной точностью. Блок-схема программы приведена на рис. 3.1.

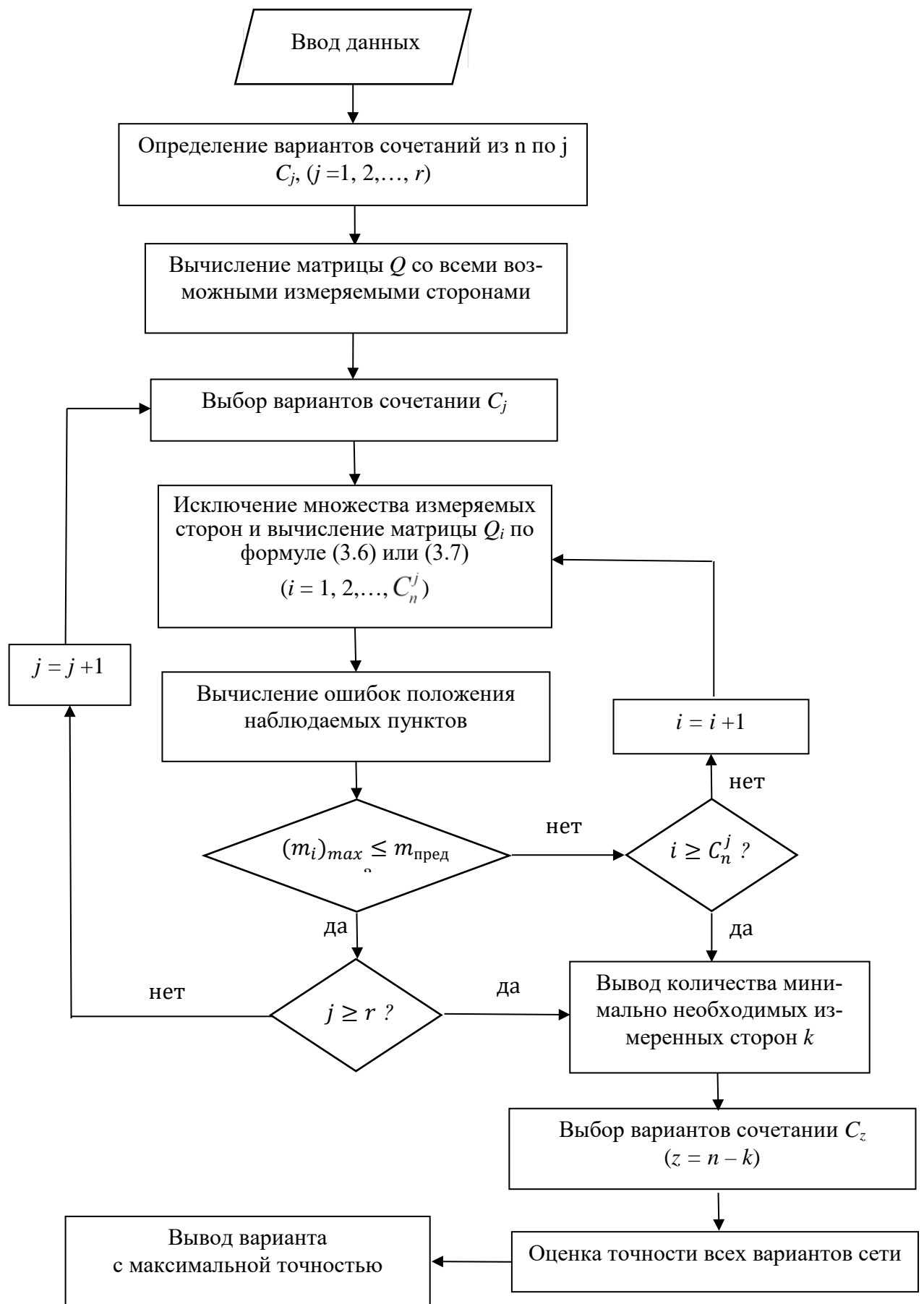


Рисунок 3.1. Блок-схема программы решения задачи оптимального проектирования линейной геодезической сети

*Пример вычисления.* Имеется геодезическая сеть для наблюдения за горизонтальными смещениями гидроэлектростанции Шешан 3, которая сначала проектировалась со всеми возможными измеренными сторонами (рис. 3.2).

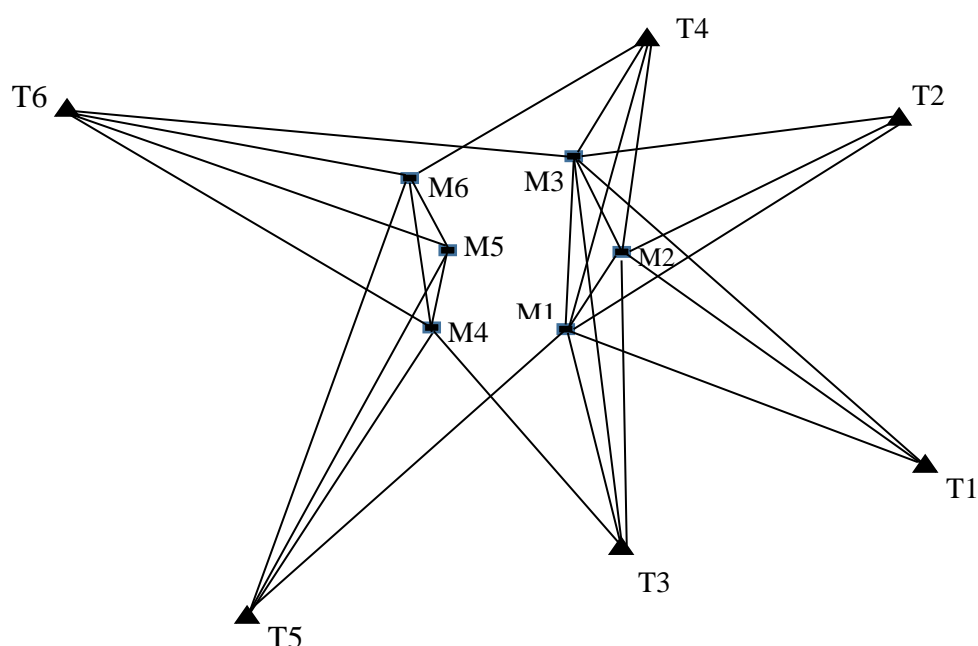


Рисунок 3.2. Схема геодезической сети со всеми возможными измеренными сторонами для наблюдений за горизонтальными смещениями ГЭС Шешан 3

В сети (см. рис. 3.2) шесть исходных пунктов: T1, T2, T3, T4, T5, T6 и шесть наблюдаемых пунктов: M1, M2, M3, M4, M5, M6. Координаты исходных пунктов и проектных определяемых пунктов геодезической сети приведены в табл. 3.1. Количество возможных измеряемых сторон – 28 (табл. 3.2), измерения производятся электронным тахеометром «Trimble 5601 DR» с точностью измерения  $m_s = 2 \text{ мм} + 2 \text{ ppm}$ .

Если проектирование выполняется со всеми возможными измеренными сторонами, то ошибки положения наблюдаемых пунктов будут иметь значения, приведенные в табл. 3.3.

Таблица 3.1. Координаты пунктов геодезической сети Шешан 3-ГЭС

№	Исходные пункты	Координаты		№	Определяемые пункты	Координаты	
		X, м	Y, м			X, м	Y, м
1	T1	1572069,4747	470029,5600	1	M1	1572314,0976	469900,9849
2	T2	1572458,8928	469930,1014	2	M2	1572329,5269	469896,8334
3	T3	1572061,8238	469977,8541	3	M3	1572344,9741	469892,5607
4	T4	1572445,0920	469874,0561	4	M4	1572297,5538	469860,5327
5	T5	1571969,5095	469612,5258	5	M5	1572317,1353	469855,4615
6	T6	1572327,0111	469451,4723	6	M6	1572342,5259	469848,6101

Таблица 3.2. Измеренные стороны геодезической сети ГЭС Шешан 3

№	Сторона	№	Сторона
1	T1-M1	15	T5-M1
2	T1- M2	16	T5-M4
3	T1- M3	17	T5-M5
4	T2- M1	18	T5-M6
5	T2-M2	19	T6-M3
6	T2-M3	20	T6-M4
7	T3-M1	21	T6-M5
8	T3-M2	22	T6-M6
9	T3-M3	23	M1-M2
10	T3-M4	24	M1-M3
11	T4-M1	25	M2-M3
12	T4-M2	26	M4-M5
13	T4-M3	27	M4-M6
14	T4-M6	28	M5-M6

Таблица 3.3. Средние квадратические ошибки положения наблюдаемых пунктов при проектировании сети со всеми возможными измеренными сторонами

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	0,9	2,3	2,5
2	М2	1,2	3,8	4,0
3	М3	1,0	1,8	2,1
4	М4	1,4	1,7	2,2
5	М5	1,6	1,8	2,4
6	М6	1,3	1,9	2,3

Теперь определим оптимальную схему измерений линейной геодезической сети при количестве минимально измеряемых сторон, максимальной точности положения наблюдаемых пунктов и заданной предельной ошибки их положения  $m_{\text{пред}} = 4,5$  мм, которая указывается в техническом плане строительства ГЭС Шешан 3. Для проектирования геодезической сети добавляется условие: количество измеренных сторон до каждого пункта должно быть не менее трех, поскольку необходимо иметь избыточные измерения при определении координат наблюдаемого пункта.

После выполнения описанных выше этапов с применением программного обеспечения, находим:

- количество минимально необходимых измеряемых сторон геодезической сети наблюдения за горизонтальными смещениями ГЭС Шешан 3 равно 19;
- 39 вариантов измерения 19-ти сторон удовлетворяют требованиям точности (см. приложение). Шесть из них имеют наивысшую точность. Ниже приводятся исключаемые стороны, схема геодезической сети и ошибки положения наблюдаемых пунктов в шести вариантах, которые достигают наивысшей точности.

**Первый вариант.** Исключаемые стороны Т3-М3, Т4-М1, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6 (рис.3.3). Ошибки положения наблюдаемых пунктов в первом варианте приведены в табл. 3.4.

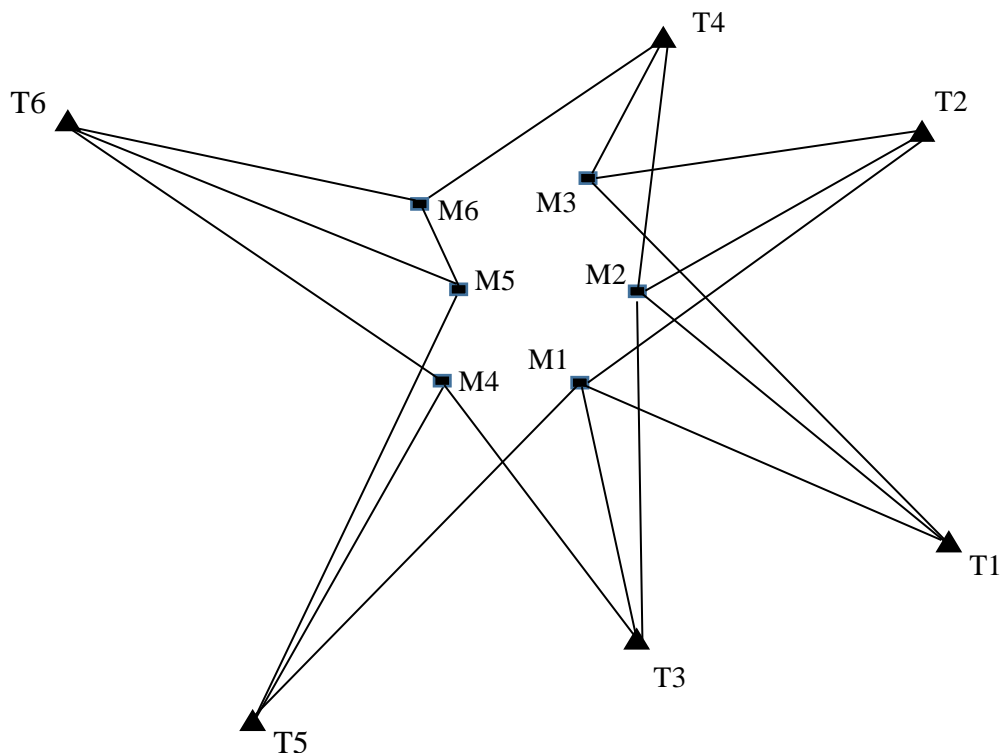


Рисунок 3.3. Схема измерений в первом варианте

Таблица 3.4. Средние квадратические ошибки положения наблюдаемых пунктов в первом варианте

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,2	2,5	2,8
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	4,0
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,9	2,1	2,8

**Второй вариант.** Исключаемые стороны Т3-М1, Т4-М3, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6 (рис. 3.4). Ошибки положения наблюдаемых пунктов во втором варианте приведены в табл. 3.5.

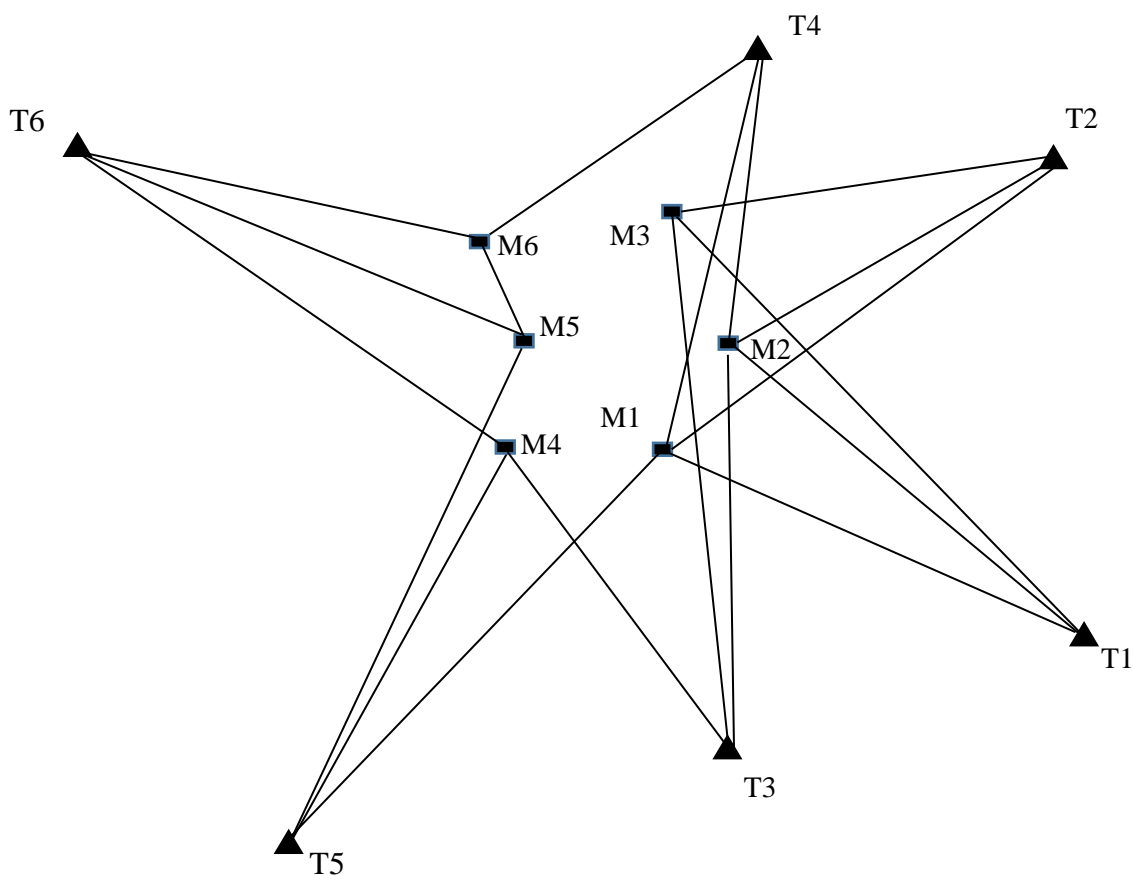


Рисунок 3.4. Схема измерений во втором варианте

Таблица 3.5. Средние квадратические ошибки положения наблюдаемых пунктов во втором варианте

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка,		
		мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,2	2,5	2,8
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,9	2,1	2,8



**Третий вариант.** Исключаемые стороны Т3-М1, Т4-М3, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6 (рис. 3.5). Ошибки положения наблюдаемых пунктов в третьем варианте приведены в табл. 3.6.

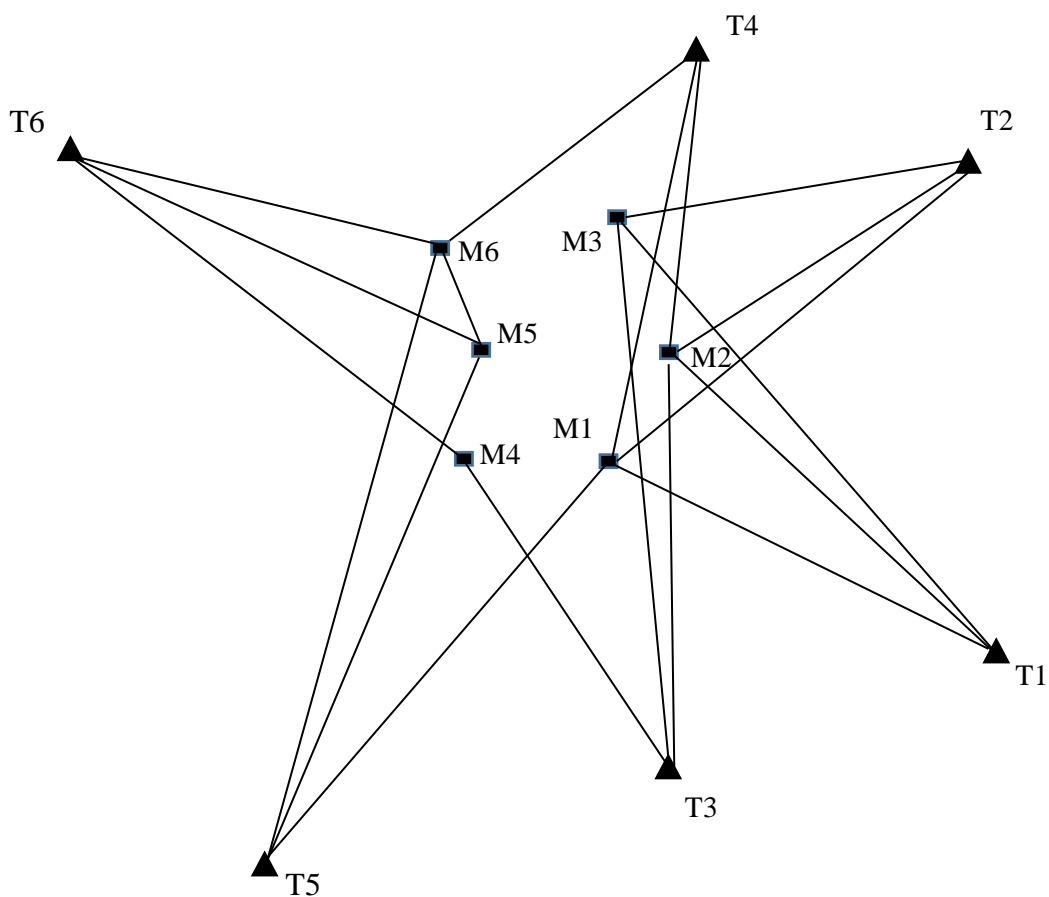


Рисунок 3.5. Схема измерений в третьем варианте

Таблица 3.6. Средние квадратические ошибки положения наблюдаемых пунктов в третьем варианте

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,2	2,5	2,8
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	2,3	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

**Четвертый вариант.** Исключаемые стороны Т3-М1, Т4-М1, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6 (рис. 3.6). Ошибки положения наблюдаемых пунктов в четвертом варианте приведены в табл. 3.7.

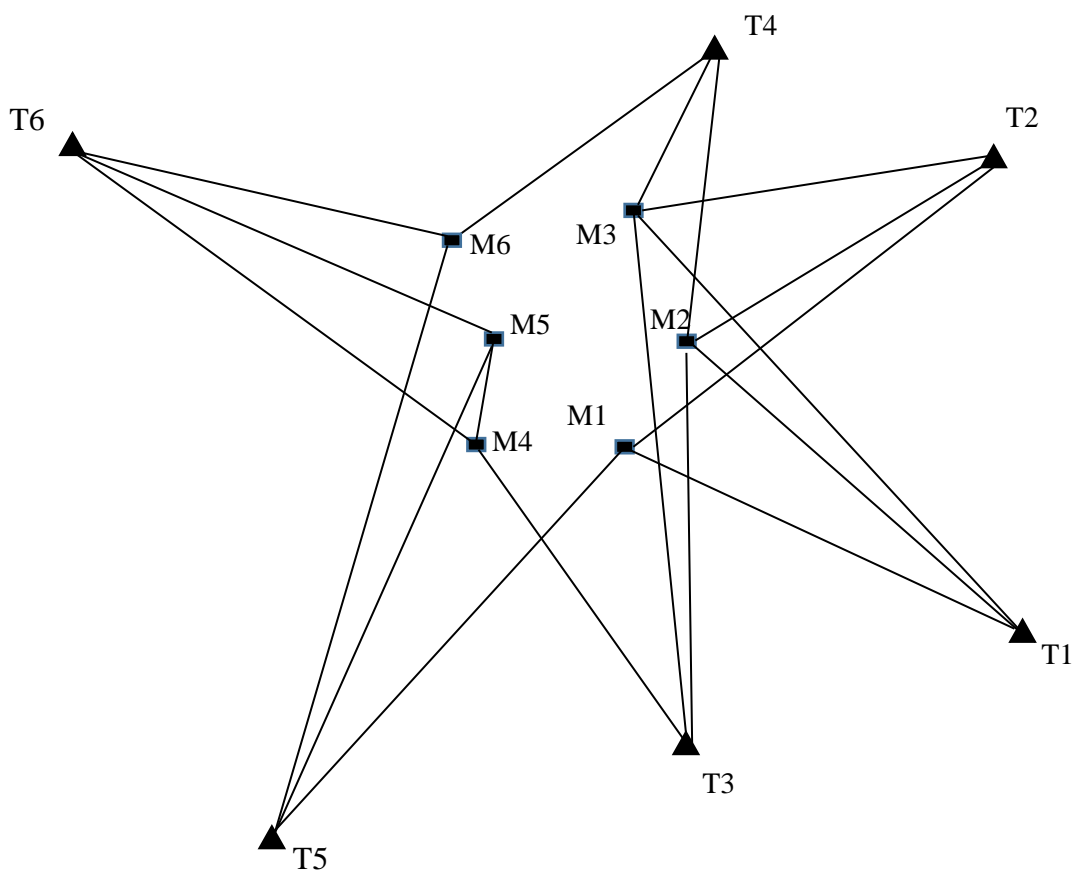


Рисунок 3.6. Схема измерений в четвертом варианте

Таблица 3.7. Средние квадратические ошибки положения наблюдаемых пунктов в четвертом варианте

№	Пунк- ты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	2,7	3,0
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	2,3	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

**Пятый вариант.** Исключаемые стороны Т3-М3, Т4-М1, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6 (рис. 3.7). Ошибки положения наблюдаемых пунктов в 5-м варианте приведены в табл. 3.8.

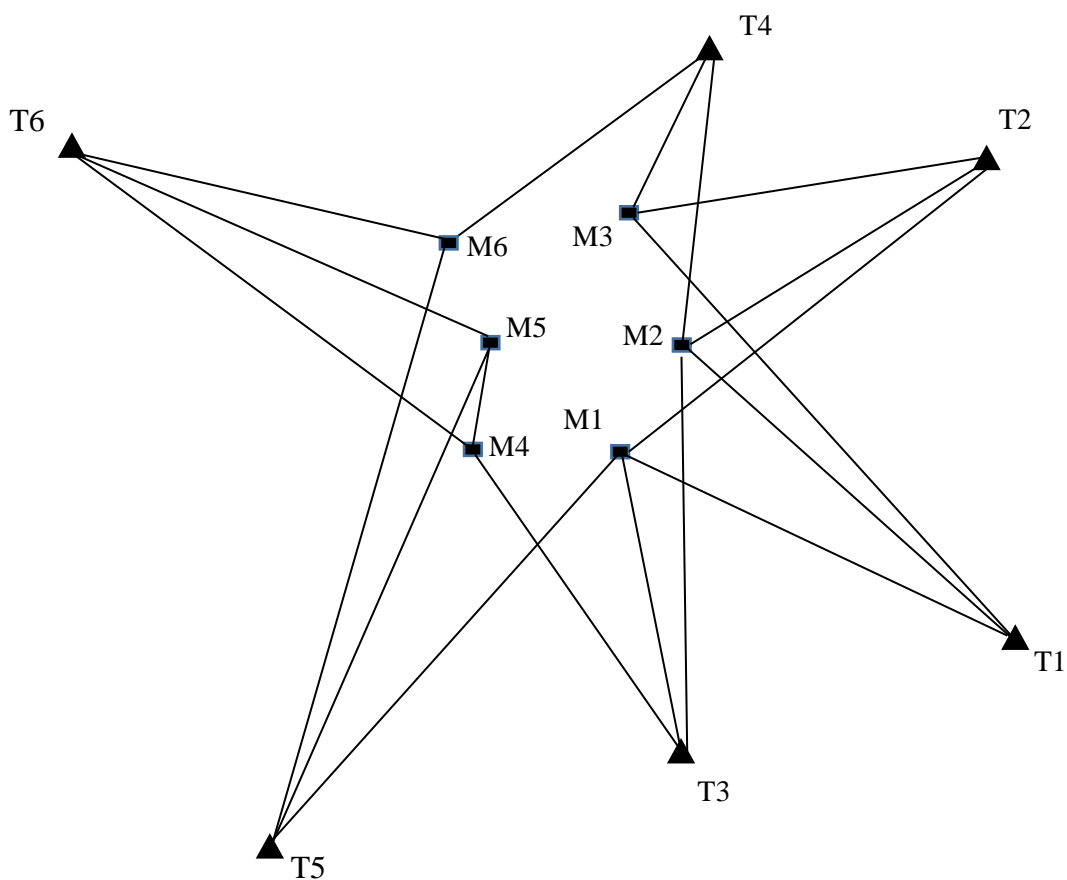


Рисунок 3.7. Схема измерений в пятом варианте

Таблица 3.8. Средние квадратические ошибки положения наблюдаемых пунктов в пятом варианте

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,2	2,5	2,7
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	4,0
4	М4	2,3	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

**Шестой вариант.** Исключаемые стороны Т3-М1, Т4-М1, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6 (рис. 3.8). Ошибки положения наблюдаемых пунктов в 6-м варианте приведены в табл. 3.9.

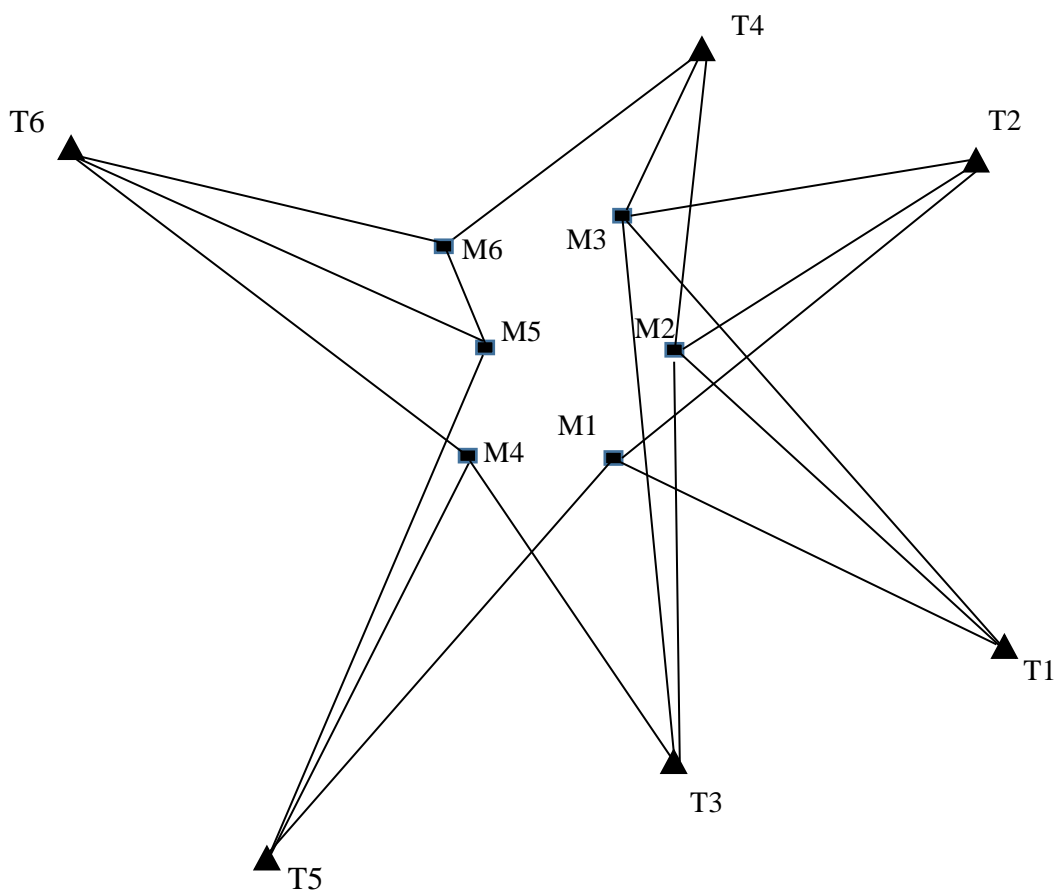


Рисунок 3.8. Схема измерений в шестом варианте

Таблица 3.9. Средние квадратические ошибки положения наблюдаемых пунктов в шестом варианте

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	2,7	3,0
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

Оптимальной схемой геодезической сети наблюдения за горизонтальными смещениями ГЭС Шешан 3 при максимальной точности положения наблюдаемых пунктов и 19-ти измеряемых сторонах может являться один из шести вариантов. По мнению автора, целесообразнее выбрать первый вариант схемы измерений, так как:

- точность положения наблюдаемых пунктов в первом варианте выше, чем в остальных вариантах.

- производить измерение стороны ТЗ-МЗ, которое предполагается в 2-м, 3-м, 4-м, 6-м вариантах, исходя из полевых условий, сложнее, чем стороны ТЗ-М1, предлагаемое в 1-м варианте;

## 4. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

### 4.1. Контроль грубых ошибок измерений

Одним из преимуществ рекуррентного способа уравнивания является осуществление контроля грубых ошибок избыточных измерений по свободным членам их уравнений поправок [20-22, 32, 33].

Нам известно, что для любой геодезической сети можно составлять исходные уравнения связи между точными значениями искомым неизвестных – параметров  $X_j$ , образующих вектор  $X$ , и истинными значениями измеряемых величин  $Y_i$  (вектор  $Y$ ), вид связи представлен ниже.

$$Y_i = \varphi_i(X_1, X_2, \dots, X_k), \quad (4.1)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ ;  $n$  – число измерений,  $k$  – число неизвестных.

Связи (4.1) кратко можно записать в виде вектор-функции

$$Y = \varphi(X). \quad (4.2)$$

Так как для  $i$ -ой группы избыточных измерений вектор свободных членов

$$L_i = \varphi_i(X_{i-1}) - y_i, \quad (4.3)$$

то его математическое ожидание

$$M = M[\varphi_i(x_{i-1})] - M(y_i),$$

или приближенно на основании свойства математического ожидания с учетом (4.2) можно записать:

$$M = \varphi_i[M(x_{i-1})] - Y_i = \varphi_i(X) - Y_i = 0.$$

На основании этого для составляющих вектора  $L_i$ , построим доверительные интервалы. Для этого надо определить матрицу его обратных весов.

Так как можно составить матрицу обратных весов векторов  $x$  и  $y$  в виде:

$$Q_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} Q_{i-1} & 0 \\ 0 & P_i^{-1} \end{pmatrix},$$

а матрица частных производных вектора  $L_i$  по  $x_{i-1}$  и  $y_i$  выражается в виде  $F = (A_i - E)$ , то на основании обобщенной теоремы оценки точности функций найдём матрицу  $Q_{L_i} = F Q_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} F^T = P_i^{-1} + A_i Q_{i-1} A_i^T = N_i$ , совпадающую с (2.6).

Получаем формулу

$$(L_i)_{j, \text{доп}} = \pm t \sigma_0 \sqrt{(N_i)_{jj}}, \quad (4.4)$$

где  $(L_i)_{j, \text{доп}}$  – допустимое значение любого  $j$ -го составляющего вектора  $L_i$ ;

$(N_i)_{jj}$  – диагональный элемент матрицы  $N_i$ ;

$\sigma_0$  – среднее квадратическое отклонение единицы веса.

Коэффициент  $t = 2,5$  или  $3$ , если измерения подчиняются нормальному закону распределения и дисперсии измерений известны априорно или известны веса разнородных измерений. В противном случае величину  $\sigma_0$  следует заменить ее оценкой  $\mu$ , а вместо величины  $t$  при этом следует использовать коэффициент Стьюдента  $t_\beta$ .

Если  $i$ -я группа содержит лишь одно измерение, то

$$l_{i, \text{доп}} = \pm t \sigma_0 \sqrt{g_i}, \quad (4.5)$$

где величина  $g_i$  определяется по формуле:  $g_i = p_i^{-1} + a_i Q_{i-1} a_i^T = p_i^{-1} + a_i Z_i^T$  (см. раздел 2.1).

Необходимо отметить, что свободными членами уравнений поправок являются не что иное, как преобразованные по схеме Гаусса решения систем нормальных уравнений невязки условных уравнений, которые образуются каждым избыточным измерением. Преобразованные диагональные элементы матрицы коэффициентов нормальных уравнений коррелят совпадают с величинами  $N_i$ .

Для контроля грубых ошибок измерений при рекуррентном уравнивании по методу профессора д.т.н. Маркузе Ю.И. вычисление матрицы  $Q$  выполняется только для необходимых измерений, а для избыточных измерений достаточно вычислять лишь свободные члены и их допустимые значения.

Если значения свободных членов  $l_i$  превышают их допустимые значения, то это не значит, что  $i$ -е измерение содержит грубую ошибку. Они могут содержаться в любом необходимом измерении, которое входит в условие, образованное этим избыточным измерением. Поэтому после контроля грубых ошибок избыточных измерений необходимо продолжить поиск возможных необходимых ошибочных измерений [21].

#### *Поиск возможных необходимых ошибочных измерений*

На основании формул перехода от параметрического способа к коррелятному можно составить алгоритм поиска, в котором блочная матрица коэффициентов условных уравнений описывается в виде:

$$B = (A_2 A_1^{-1} - E) = (B_1 - E), \quad (4.6)$$

где  $A_1$  – квадратная матрица коэффициентов уравнений поправок всех необходимых измерений;  $A_2$  – матрица коэффициентов уравнений поправок избыточных измерений, указывающих на присутствие грубых ошибок.

Чтобы вычислить матрицу  $A_1^{-1}$  можно использовать тождество  $A_1^{-1} = Q_1 A_1^T P_1$ , где матрица  $Q_1$  получается в процессе учёта всех необходимых измерений по рекуррентным формулам.

Зная номер строки, соответствующий ошибочному избыточному измерению и номера ненулевых элементов в матрице  $B_1$  ( $B_1 = A_2 A_1^{-1}$ ) в этой строке и выявив номера измерений, входящих в условное уравнение с недопустимым свободным членом соответствующего уравнения поправок, необходимо определить, какие измерения входят в безошибочные условия [33]. Отсюда, можно определить необ-



ходимые измерения, возможно содержащие грубые ошибки.

### *Определение вариантов исключения измерений из уравнивания*

Допустим, что после вычисления свободных членов избыточных измерений и их допустимых значений находим, что эти свободные члены являются недопустимыми. Обозначаем число таких членов буквой  $d$ . Это значит, имеется  $d$  возможных избыточных ошибочных измерений.

$u$  – число необходимых ошибочных измерений, которые входят в условное уравнение с  $d$  недопустимым свободным членом соответствующего уравнения поправок.

Тогда, число всех возможных ошибочных измерений вычисляется по формуле:

$$z = d + u.$$

Отметим, что только из-за одного необходимого ошибочного измерения может появиться много избыточных ошибочных измерений.

Идея автора заключается в том, что не надо исключать из уравнивания все  $d$  возможные избыточные ошибочные измерения, а только несколько измерений из набора ошибочных измерений (количество исключаемых измерений меньше, чем  $d$ ).

Тогда следует определить все варианты сочетаний  $C_k$  по  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, d$ ) исключаемых измерений из  $z$ .

Число сочетаний вычисляется по формуле:

$$C_z^k = \frac{z!}{k!(z-k)!}$$

По каждому варианту, после исключения измерений, определить остальные измерения и найти грубые ошибки избыточных измерений.

Принимаются варианты, в которых все свободные члены избыточных измерений признаются допустимыми (значит, что больше никакие измерения не содержат грубые ошибки). Из найденных вариантов выбирается оптимальный вариант, который имеет наименьшее количество исключаемых измерений.

Блок-схема программы на Visual Basic приведена на рис 4.1.

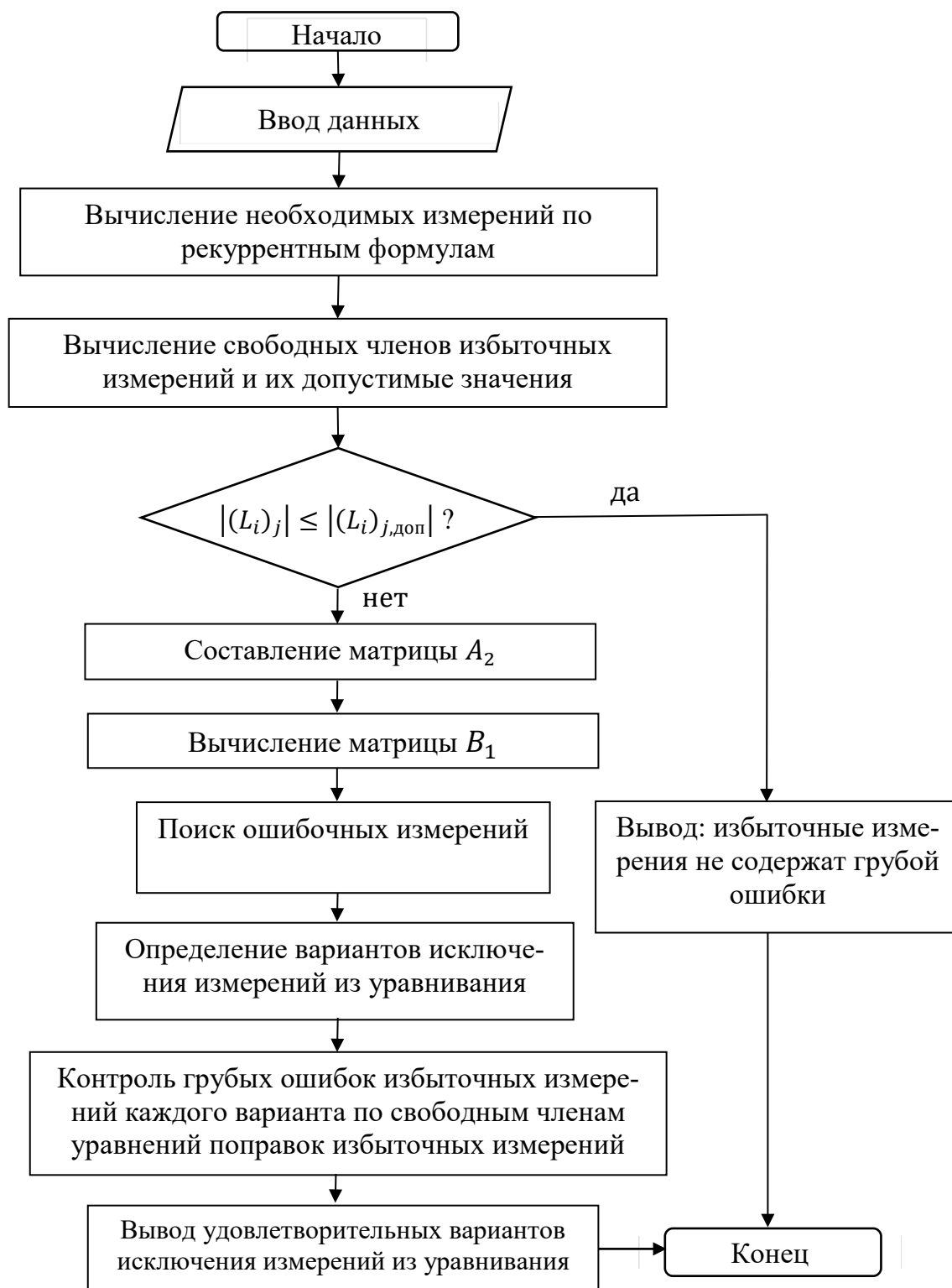


Рисунок 4.1. Блок-схема программы для контроля грубых ошибок измерений и исходных данных

### Пример вычисления

Имеется геодезическая сеть, построенная для наблюдения за деформациями плотины ГЭС Шешан 4 во Вьетнаме, схема которой приведена на рис. 4.2.

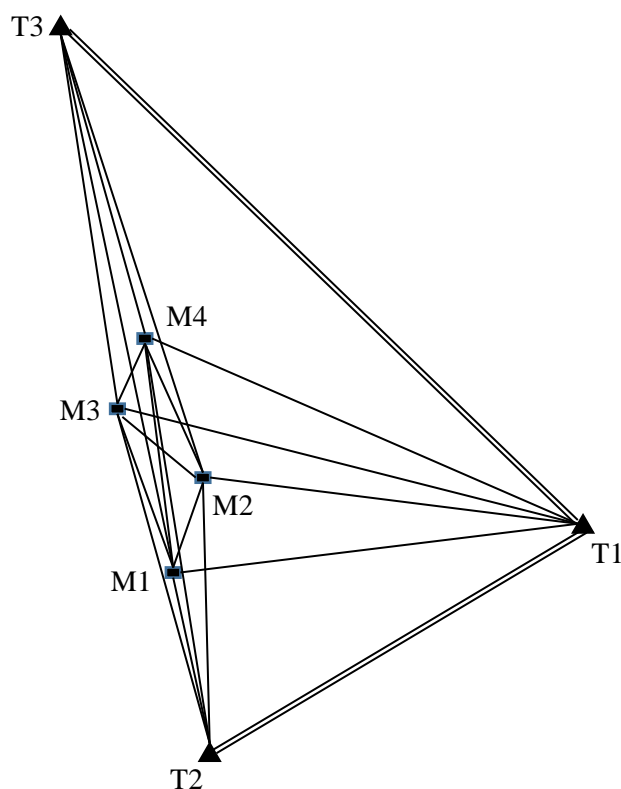


Рисунок 4.2. Геодезическая сеть наблюдения за деформациями плотины ГЭС Шешан 4

В сети три исходных пункта: T1, T2, T3 и четыре наблюдаемых пункта: M1, M2, M3, M4. Координаты исходных пунктов (табл. 4.1) считаются безошибочными. В сети измерено 18 сторон (табл. 4.2). Измерения производятся электронным тахеометром «ТС-2003» с точностью измерения  $m_s = 1 \text{ мм} + 1 \text{ ppm}$ .

Веса результатов измерений вычислены по формуле:

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_{s_i}^2}, \quad (4.7)$$

где  $\mu$  – средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Таблица 4.1. Координаты исходных пунктов

№	Пункты	Координаты пунктов	
		X, м	Y, м
1	T1	1544714,9445	445730,3224
2	T2	1544524,1073	445521,2876
3	T3	1546214,1057	445385,4396

Таблица 4.2. Измеренные стороны

№	Стороны	Название	Длина, м	№	Стороны	Название	Длина, м
1	T1 – M1	$S_1$	295,7215	10	T3 – M2	$S_{10}$	1284,3958
2	T1 – M2	$S_2$	333,5367	11	T3 – M3	$S_{11}$	1250,9937
3	T1 – M3	$S_3$	371,5800	12	T3 - M4	$S_{12}$	1202,6892
4	T1 – M4	$S_4$	427,9634	13	M1-M2	$S_{13}$	38,9314
5	T2 – M1	$S_5$	378,0933	14	M1-M3	$S_{14}$	78,0320
6	T2 – M2	$S_6$	411,2273	15	M1-M4	$S_{15}$	135,5618
7	T2 – M3	$S_7$	445,8442	16	M2-M3	$S_{16}$	39,1075
8	T2 - M4	$S_8$	497,8274	17	M2-M4	$S_{17}$	96,6360
9	T3 – M1	$S_9$	1317,5355	18	M3-M4	$S_{18}$	57,5293

*Необходимые измерения: стороны:  $S_1 \div S_8$ .*

*Избыточные измерения: стороны:  $S_9 \div S_{18}$ .*

Приняв  $\mu = 1$  и  $t = 2,5$ , после применения программного обеспечения, находим свободные члены избыточных измерений и их допустимые значения (табл. 4.3).

Таблица 4.3. Величины  $l_i$  и  $l_{i,доп}$  избыточных измерений

№	Стороны	$l_i$ , мм	$l_{i,доп}$ , мм	Результат
1	$S_9$	<b>-8,1</b>	<b>±4,9</b>	Недопустимый
2	$S_{10}$	0,3	±4,9	Допустимый
3	$S_{11}$	0,6	±5,0	Допустимый
4	$S_{12}$	0,0	±5,3	Допустимый
5	$S_{13}$	<b>4,1</b>	<b>±3,9</b>	Недопустимый
6	$S_{14}$	-2,4	±3,9	Допустимый
7	$S_{15}$	-3,4	±3,9	Допустимый
8	$S_{16}$	-0,7	±3,9	Допустимый
9	$S_{17}$	-0,6	±3,9	Допустимый
10	$S_{18}$	0,2	±3,9	Допустимый

Из результатов видно, что свободные члены избыточных измерений  $S_9$  (ТЗ-М1) и  $S_{13}$  (М1-М2) признаются недопустимыми. Поэтому необходимо выполнить поиск ошибочных измерений.

Для этого составляем матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,631 & -0,775 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,653 & -0,756 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,673 & 0,739 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,694 & -0,719 \\ 0,998 & -0,053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,994 & -0,105 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,989 & -0,147 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,980 & -0,199 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0,996 & 0,088 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,806 & 0,591 & 0,806 & -0,591 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу:

$$B_1^{2 \times 8} = \begin{pmatrix} -0,046 & 0 & 0 & 0 & -0,968 & 0 & 0 & 0 \\ -0,739 & 0,736 & 0 & 0 & -0,341 & 0,327 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Номер строки матрицы  $B_1$  соответствует ошибочным избыточным измере-

ниям, а номер столбца – необходимым измерениям.

Из ненулевых элементов в первой строке матрицы  $B_1$  ошибочными необходимыми измерениями являются:  $S_1$  ( $T1 - M1$ ),  $S_5$  ( $T2 - M1$ ); и во второй строке:  $S_1$  ( $T1 - M1$ ),  $S_2$  ( $T1-M2$ ),  $S_5$  ( $T2 - M1$ ),  $S_6$  ( $T2 - M2$ ). В этом примере определяются четыре ошибочных необходимых измерений:  $S_1, S_2, S_5, S_6$ . Отсюда ошибочными измерениями являются:  $S_1, S_2, S_5, S_6, S_9$  и  $S_{13}$ ; а безошибочными –  $S_3, S_4, S_7, S_8, S_{10}, S_{11}, S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{17}, S_{18}$ .

После выполнения контроля грубых ошибок каждого варианта исключения измерений, принимаются все допустимые варианты. Из них выбирается вариант с наименьшим количеством исключаемых измерений, следовательно, в данном случае необходимо исключить сторону  $S_5$  ( $T2 - M1$ ). Свободные члены избыточных измерений и их допустимые значения приведены в табл. 4.4. Из приведенных результатов следует, что избыточные измерения не содержат грубых ошибок.

Таблица 4.4. Величины  $l_i$  и  $l_{i,доп}$  избыточных измерений после исключения стороны  $S_5$  ( $T2 - M1$ )

№	Стороны	$l_i$ , мм	$l_{i,доп}$ , мм	Результат
1	T3 – M2	0,3	±4,9	Допустимый
2	T3 – M3	0,6	±5,0	Допустимый
3	T3 – M4	0,0	±5,3	Допустимый
4	M1 – M2	-1,3	±4,1	Допустимый
5	M1 – M3	0,5	±4,1	Допустимый
6	M1-M4	-0,5	±4,1	Допустимый
7	M2-M3	-0,7	±3,9	Допустимый
8	M2-M4	-0,6	±3,9	Допустимый
9	M3-M4	-0,2	±3,9	Допустимый

## 4.2. Анализ деформаций геодезических пунктов при наблюдении за горизонтальными смещениями

В настоящее время во Вьетнаме, для наблюдения за горизонтальными смещениями гидротехнических сооружений в каждом цикле выполняются следующие этапы:

- Выполнение измерений.
- Уравнивание геодезической сети, необходимое для определения координат наблюдаемых пунктов.
- Определение смещений наблюдаемых пунктов по разности их координат между циклами.

Для повышения точности определения горизонтальных смещений наблюдаемых пунктов необходимо выполнять анализ деформаций методом последовательного объединения циклов повторных наблюдений.

### 4.2.1. Совмещение уравнивания циклов наблюдений с анализом деформаций

Известен алгоритм для анализа деформаций геодезических пунктов, предлагаемый в [22]. Алгоритм основан на применении рекуррентных формул последовательного объединения циклов повторных измерений с целью повышения точности определения координат наблюдаемых пунктов.

Согласно этому алгоритму следует выполнить объединение текущего цикла наблюдений  $s$  со всеми предыдущими циклами. Обратная матрица весов неизвестных будет в этом случае иметь вид:

$$\bar{Q}_s = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{s-1} & 0 \\ 0 & Q_s \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где блок  $\bar{Q}_{s-1}$  относится к неизвестным уже объединенных циклов  $1, \dots, s-1$ , а блок  $Q_s$  получается при уравнивании отдельных измерений в цикле  $s$  с контролем грубых ошибок [24, 31, 50].

По рекуррентным формулам, вычисляются условные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta\bar{x}_{(s-1)_i} - \delta x_{s_i} + w_{x_i} &= 0 \\ \delta\bar{y}_{(s-1)_i} - \delta y_{s_i} + w_{y_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.9a)$$

или уравнения поправок:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_i} &= \delta\bar{x}_{(s-1)_i} - \delta x_{s_i} + l_{x_i} \\ v_{y_i} &= \delta\bar{y}_{(s-1)_i} - \delta y_{s_i} + l_{y_i} \end{aligned} \right\}, \quad (4.9б)$$

составляемые по каждой из осей координат для одноимённых стабильных пунктов (как избыточные уравнения поправок с  $1/p = 0$  и  $l_{x_i} = w_{x_i} = \bar{x}_{(s-1)_i} - x_{s_i}$ ;

$l_{y_i} = w_{y_i} = \bar{y}_{(s-1)_i} - y_{s_i}$ ), в результате получим искомую матрицу  $\bar{Q}_s$  и вектор неизвестных, объединённых циклов  $\bar{x}_s$ . Если невязка  $w$  превышает её допустимое значение

$$\Delta x_i > \Delta x_{\text{доп}}, \Delta y_i > \Delta y_{\text{доп}},$$

то считается, что это деформация, и игнорируется соответствующее условное уравнение. Если

$$\Delta x_i \leq \Delta x_{\text{доп}}, \Delta y_i \leq \Delta y_{\text{доп}},$$

то пункт является стабильным.

Разность координат  $x, y$  пунктов и допустимое значение этой разности можно вычислить по формулам:

$$\Delta x_i = x_{s_i} - \bar{x}_{(s-1)_i}; \quad \Delta y_i = y_{s_i} - \bar{y}_{(s-1)_i}; \quad (4.10)$$

$$\Delta x_{\text{доп}} = \pm t \sqrt{m_{x_{s_i}}^2 + m_{\bar{x}_{(s-1)_i}}^2}; \quad \Delta y_{\text{доп}} = \pm t \sqrt{m_{y_{s_i}}^2 + m_{\bar{y}_{(s-1)_i}}^2}, \quad (4.11)$$

где

$\bar{x}_{(s-1)_i}, \bar{y}_{(s-1)_i}$  – координаты  $i$ -го пункта объединённых циклов  $1, \dots, s-1$ ;

$x_{s_i}, y_{s_i}$  – координаты  $i$ -го пункта в  $s$  цикле;

$m_{\bar{x}_{(s-1)_i}}, m_{\bar{y}_{(s-1)_i}}$  – СКО  $i$ -го пункта объединённых циклов  $1, \dots, s-1$ ;

$m_{x_{s_i}}, m_{y_{s_i}}$  – СКО  $i$ -го пункта в  $s$  цикле;



коэффициент  $t = 2,5$ .

Необходимо обратить внимание на то, что рекуррентное уравнение, особенно при объединении циклов, позволяет повышать точность определения координат даже подвижных наблюдаемых пунктов. Потому что в этой процедуре учитывается корреляция между координатами подвижных пунктов и неподвижных. Формулы рекуррентного уравнения имеют вид (2.5)-(2.8).

Поправки к неизвестным при рекуррентном уравнении имеют вид

$$\Delta = -N^{-1}Z^TW, \quad (4.12)$$

а вектор неизвестных объединенных циклов приставлен в виде

$$\overline{\delta x_s} = \delta x_s + \Delta. \quad (4.13)$$

#### 4.2.2. Пример вычисления

Имеется геодезическая сеть, построенная для наблюдения за горизонтальными смещениями ГЭС ПлейКронг. Схема сети приведена на рис. 4.3.

В сети три исходных пункта: Т3, Т4, Т5 (табл. 4.5) и четыре наблюдаемые пункта: М1, М2, М3, М4. Координаты исходных пунктов не изменяются в циклах.

Таблица 4.5. Координаты исходных пунктов

№	Пункты	Координаты пунктов, м	
		X	Y
1	Т3	1 593 580,0832	484 865,9726
2	Т4	1 593 342,6603	485 442,0103
3	Т5	1 593 161,5039	485 019,2088

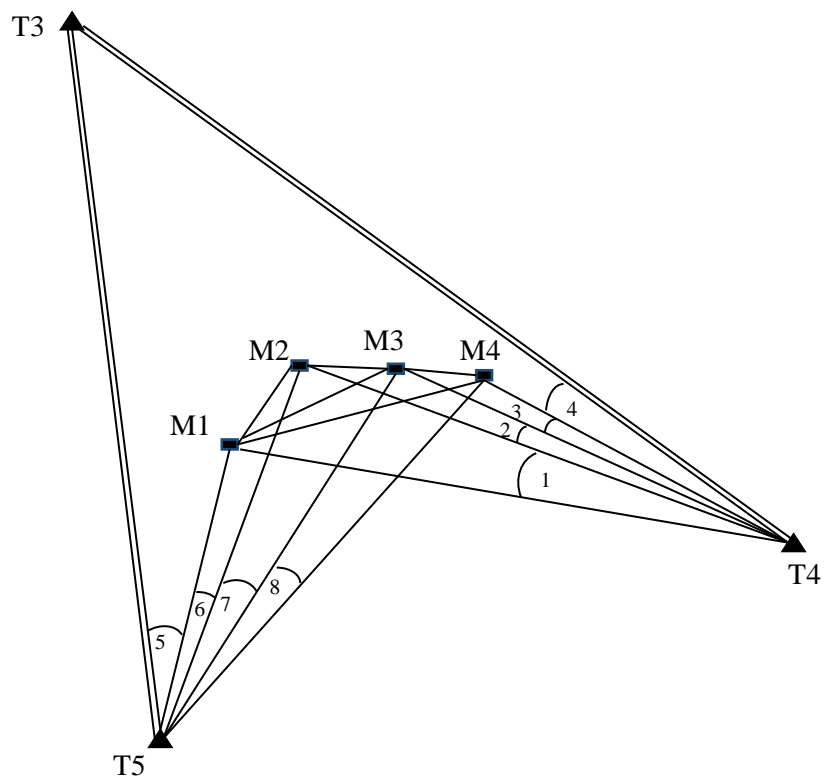


Рисунок 4.3. Геодезическая сеть наблюдения за горизонтальными смещениями  
ГЭС ПлейКронг

В первом цикле измерялись восемь углов (табл. 4.6) и 13 сторон (табл. 4.7). Измерения производились электронным тахеометром «ТС-2003» с точностями измерения  $m_{\beta} = 1''$  и  $m_s = 1 \text{ мм} + 1 \text{ ppm}$  соответственно.

Таблица 4.6. Измеренные углы в первом цикле

№	Углы			Обозначение углов	Значения		
					°	'	''
1	M1	T4	M2	$\beta_1$	00	56	29,7
2	M2	T4	M3	$\beta_2$	01	25	51,7
3	M3	T4	M4	$\beta_3$	01	11	15,6
4	M4	T4	T3	$\beta_4$	00	02	34,1
5	T3	T5	M1	$\beta_5$	27	45	11,9
6	M1	T5	M2	$\beta_6$	02	48	45,8
7	M2	T5	M3	$\beta_7$	03	46	55,2
8	M3	T5	M4	$\beta_8$	02	44	41,0

Таблица 4.7. Измеренные стороны в первом цикле

№	Стороны	Обозначение стороны	Длина, м
1	T4 – M1	$S_1$	402,5351
2	T4 – M2	$S_2$	387,9662
3	T4 – M3	$S_3$	367,9312
4	T4 – M4	$S_4$	352,9878
5	T5 – M1	$S_5$	313,6429
6	T5 – M2	$S_6$	317,4556
7	T5 – M3	$S_7$	323,9833
8	T5 – M4	$S_8$	329,8097
9	M1–M2	$S_9$	15,9503
10	M1–M3	$S_{10}$	38,1004
11	M1–M4	$S_{11}$	54,8046
12	M2–M4	$S_{12}$	38,8529
13	M3–M4	$S_{13}$	16,7024

Необходимые измерения: стороны:  $S_1 \div S_8$ .

Избыточные измерения: стороны  $S_9 \div S_{13}$  и углы  $\beta_1 \div \beta_8$

Весы результатов измерений вычислены по формулам:

$$\left. \begin{aligned} p_{\beta_i} &= \frac{m_{\beta}^2}{m_{\beta_i}^2} = 1; \\ p_{s_i} &= \frac{m_{\beta}^2}{m_{s_i}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Приняв  $\mu = m_{\beta} = 1$  и  $t = 2,5$ , после применения программного обеспечения, находим свободные члены избыточных измерений и их допустимые значения в первом цикле (табл. 4.8, 4.9).

Таблица 4.8. Величины  $l_i$  и  $l_{i,доп}$  избыточных измерений сторон в первом цикле

№	Стороны	$l_i$ , мм	$l_{i,доп}$ , мм	Результат
1	$S_9$	1,6	$\pm 4,8$	Допустимый
2	$S_{10}$	-1,3	$\pm 4,7$	Допустимый
3	$S_{11}$	-0,4	$\pm 4,7$	Допустимый
4	$S_{12}$	-0,6	$\pm 4,7$	Допустимый
5	$S_{13}$	2,7	$\pm 4,6$	Допустимый

Таблица 4.9. Величины  $l_i$  и  $l_{i,доп}$  избыточных измерений углов в первом цикле

№	Углы	$l_i$ , "	$l_{i,доп}$ , "	Результат
1	$\beta_1$	1,3	$\pm 3,2$	Допустимый
2	$\beta_2$	1,6	$\pm 3,2$	Допустимый
3	$\beta_3$	-1,8	$\pm 3,3$	Допустимый
4	$\beta_4$	0,8	$\pm 2,9$	Допустимый
5	$\beta_5$	0,4	$\pm 3,1$	Допустимый
6	$\beta_6$	0,4	$\pm 3,6$	Допустимый
7	$\beta_7$	-1,2	$\pm 3,5$	Допустимый
8	$\beta_8$	-1,0	$\pm 3,5$	Допустимый

Из результатов видно, что избыточные измерения не содержат грубых ошибок.

После уравнивания получим симметричную обратную матрицу весов неизвестных и координаты наблюдаемых пунктов (табл. 4.10).

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0,840 & 0,035 & 0,153 & 0,060 & 0,034 & 0,060 & 0,007 & 0,062 \\ & 0,380 & 0,037 & 0,233 & 0,027 & 0,214 & 0,005 & 0,214 \\ & & 0,713 & 0,019 & 0,135 & 0,034 & 0,027 & 0,042 \\ & & & 0,452 & 0,017 & 0,206 & 0,004 & 0,228 \\ & & & & 0,690 & 0,003 & 0,137 & 0,021 \\ & & & & & 0,454 & -0,004 & 0,249 \\ & & & & & & 0,665 & -0,045 \\ & & & & & & & 0,425 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4.10. Координаты наблюдаемых пунктов в первом цикле

№	Пункты	Координаты пунктов, м		СКО, мм		
		X	Y	$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	M1	1 593 472,3584	485 060,9419	1,0	0,6	1,2
2	M2	1 593 473,6848	485 076,8378	0,9	0,7	1,1
3	M3	1 593 475,5302	485 098,9095	0,9	0,7	1,1
4	M4	1 593 476,9276	485 115,5553	0,9	0,7	1,1

Во втором цикле количество измерений составляло: 8 углов (табл. 4.11) и 13 сторон (табл. 4.12). Измерения производились электронным тахеометром «ТС-2003» с точностями измерения  $m_\beta = 1''$  и  $m_s = 1 \text{ мм} + 1 \text{ ppm}$  соответственно. Веса результатов измерений вычислены по формуле (4.14).

Таблица 4.11. Измеренные углы во втором цикле

№	Углы			Обозначение углов	Значения ° ' "
	М1	Т4	М2		
1	M1	T4	M2	$\beta_1$	00 56 30,7
2	M2	T4	M3	$\beta_2$	01 25 51,8
3	M3	T4	M4	$\beta_3$	01 11 12,3
4	M4	T4	T3	$\beta_4$	00 02 38,0
5	T3	T5	M1	$\beta_5$	27 45 09,7
6	M1	T5	M2	$\beta_6$	02 48 44,1
7	M2	T5	M3	$\beta_7$	03 46 57,4
8	M3	T5	M4	$\beta_8$	02 44 39,9

Таблица 4.12. Измеренные стороны во втором цикле

№	Стороны	Обозначение сторон	Длина, м
1	T4 – M1	$S_1$	402,5366
2	T4 – M2	$S_2$	387,9689
3	T4 – M3	$S_3$	367,9312
4	T4 – M4	$S_4$	352,9867
5	T5 – M1	$S_5$	313,6447
6	T5 – M2	$S_6$	317,4557
7	T5 – M3	$S_7$	323,9836
8	T5 – M4	$S_8$	329,8092
9	M1–M2	$S_9$	15,9510
10	M1–M3	$S_{10}$	38,1028
11	M1–M4	$S_{11}$	54,8060
12	M2–M4	$S_{12}$	38,8552
13	M3–M4	$S_{13}$	16,7057

Необходимые измерения: стороны:  $S_1 \div S_8$ .

Избыточные измерения: стороны:  $S_9 \div S_{13}$  и углы  $\beta_1 \div \beta_8$

Приняв  $\mu = m_\beta = 1$  и  $t = 2,5$ , после применения программного обеспечения, находим свободные члены избыточных измерений и их допустимые значения во втором цикле (табл. 4.13, 4.14).

Таблица 4.13. Величины  $l_i$  и  $l_{i, \text{доп}}$  избыточных измерений углов во втором цикле

№	Углы	$l_i, "$	$l_{i, \text{доп}}, "$	Результат
1	$\beta_1$	-0,6	$\pm 3,2$	Допустимый
2	$\beta_2$	1,9	$\pm 3,2$	Допустимый
3	$\beta_3$	1,1	$\pm 3,3$	Допустимый
4	$\beta_4$	-2,8	$\pm 2,9$	Допустимый
5	$\beta_5$	1,9	$\pm 3,1$	Допустимый
6	$\beta_6$	1,1	$\pm 3,6$	Допустимый
7	$\beta_7$	-1,6	$\pm 3,5$	Допустимый
8	$\beta_8$	0,7	$\pm 3,5$	Допустимый

Таблица 4.14. Величины  $l_i$  и  $l_{i,доп}$  избыточных измерений сторон во втором цикле

№	Стороны	$l_i$ , мм	$l_{i,доп}$ , мм	Результат
1	$S_9$	-1,0	$\pm 4,8$	Допустимый
2	$S_{10}$	-2,8	$\pm 4,7$	Допустимый
3	$S_{11}$	-0,3	$\pm 4,7$	Допустимый
4	$S_{12}$	0,5	$\pm 4,7$	Допустимый
5	$S_{13}$	0,1	$\pm 4,6$	Допустимый

После уравнивания получим обратную матрицу весов неизвестных  $Q_2$  и координаты наблюдаемых пунктов (табл. 4.15).

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0,840 & 0,035 & 0,153 & 0,060 & 0,034 & 0,060 & 0,007 & 0,062 \\ & 0,380 & 0,037 & 0,233 & 0,027 & 0,214 & 0,005 & 0,214 \\ & & 0,713 & 0,019 & 0,135 & 0,034 & 0,027 & 0,042 \\ & & & 0,452 & 0,017 & 0,206 & 0,004 & 0,228 \\ & & & & 0,690 & 0,003 & 0,137 & 0,021 \\ & & & & & 0,454 & -0,004 & 0,249 \\ & & & & & & 0,665 & -0,045 \\ & & & & & & & 0,425 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4.15. Координаты наблюдаемых пунктов во втором цикле

№	Пункты	Координаты пунктов, м		СКО, мм		
		X	Y	$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	M1	1 593 472,3596	485 060,9399	1,0	0,6	1,2
2	M2	1 593 473,6862	485 076,8354	0,9	0,7	1,1
3	M3	1 593 475,5308	485 098,9094	0,9	0,7	1,1
4	M4	1 593 476,9249	485 115,5558	0,9	0,7	1,1

На основании значений координат, вычисленных из двух циклов, получим

величины деформаций (табл. 4.16).

Таблица 4.16. Результаты анализа деформаций во втором цикле

№	Пункты	$\Delta x$ , мм	$\Delta x_{\text{доп}}$ , мм	Анализ	$\Delta y$ , мм	$\Delta y_{\text{доп}}$ , мм	Анализ
1	M1	1,2	$\pm 3,7$	Стабильность	-2,0	$\pm 2,5$	Стабильность
2	M2	1,4	$\pm 3,4$	Стабильность	-2,4	$\pm 2,7$	Стабильность
3	M3	0,6	$\pm 3,3$	Стабильность	-0,2	$\pm 2,7$	Стабильность
4	M4	-2,7	$\pm 3,2$	Стабильность	-0,5	$\pm 2,6$	Стабильность

Анализ деформаций показывает, что стабильными являются все пункты, поэтому для объединения циклов можно записать условные уравнения:

$$\delta \bar{x}_{1i} - \delta x_{2i} + w_{x_i} = 0;$$

$$\delta \bar{y}_{1i} - \delta y_{2i} + w_{y_i} = 0.$$

Обратная матрица для двух циклов составляется по формуле (4.8). Затем по формулам рекуррентного уравнивания находится матрица объединённых циклов. Приведём только её нижний правый блок:

$$\bar{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0,420 & 0,018 & 0,077 & 0,030 & 0,017 & 0,030 & 0,003 & 0,031 \\ & 0,190 & 0,018 & 0,116 & 0,014 & 0,107 & 0,003 & 0,107 \\ & & 0,357 & 0,010 & 0,068 & 0,017 & 0,013 & 0,021 \\ & & & 0,226 & 0,008 & 0,103 & 0,002 & 0,114 \\ & & & & 0,345 & 0,001 & 0,068 & 0,011 \\ & & & & & 0,227 & -0,002 & 0,125 \\ & & & & & & 0,332 & -0,022 \\ & & & & & & & 0,213 \end{pmatrix}.$$

Из сравнения величин диагональных элементов матриц  $Q_2$  и  $\bar{Q}_2$ , следует, что объединение циклов позволяет повысить точность при определении положения наблюдаемых пунктов.

По формулам (4.12) и (4.13) получим поправки к неизвестным

$$\Delta_2^T = (-0,0006 \quad 0,0010 \quad -0,0007 \quad 0,0012 \quad -0,0003 \quad 0,0001 \quad 0,0014 \quad 0,0003)$$



и координаты наблюдаемых пунктов объединённых циклов (табл. 4.17).

Таблица 4.17. Координаты наблюдаемых пунктов объединенных циклов

№	Пункты	Координаты пунктов, м		СКО, мм		
		X	Y	$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	M1	1 593 472,3590	485 060,9409	0,7	0,5	0,9
2	M2	1 593 473,6855	485 076,8366	0,6	0,5	0,8
3	M3	1 593 475,5305	485 098,9094	0,6	0,5	0,8
4	M4	1 593 476,9263	485 115,5555	0,6	0,5	0,8

В третьем цикле в сети были измерены: 13 сторон (табл. 4.18), восемь углов (табл. 4.19). Измерения производились электронным тахеометром «ТС-2003» с точностями измерения  $m_p = 1''$  и  $m_s = 1 \text{ мм} + 1 \text{ ppm}$  соответственно.

Таблица 4.18. Измеренные стороны в третьем цикле

№	Стороны	Обозначение сторон	Длина, м
1	T4 – M1	$S_1$	402,5369
2	T4 – M2	$S_2$	387,9723
3	T4 – M3	$S_3$	367,9306
4	T4 – M4	$S_4$	352,9851
5	T5 – M1	$S_5$	313,6416
6	T5 – M2	$S_6$	317,4573
7	T5 – M3	$S_7$	323,9825
8	T5 – M4	$S_8$	329,8089
9	M1–M2	$S_9$	15,9509
10	M1–M3	$S_{10}$	38,1000
11	M1–M4	$S_{11}$	54,8076
12	M2–M4	$S_{12}$	38,8557
13	M3–M4	$S_{13}$	16,7050

Таблица 4.19. Измеренные углы в третьем цикле

№	Углы			Обозначение углов	Значения
					° ' "
1	M1	T4	M2	$\beta_1$	00 56 32,7
2	M2	T4	M3	$\beta_2$	01 25 51,4
3	M3	T4	M4	$\beta_3$	01 11 11,0
4	M4	T4	T3	$\beta_4$	00 02 37,6
5	T3	T5	M1	$\beta_5$	27 45 10,6
6	M1	T5	M2	$\beta_6$	02 48 46,3
7	M2	T5	M3	$\beta_7$	03 46 55,2
8	M3	T5	M4	$\beta_8$	02 44 41,1

Веса результатов измерений вычислены по формуле (4.14).

Необходимые измерения: стороны:  $S_1 \div S_8$ .

Избыточные измерения: стороны:  $S_9 \div S_{13}$  и углы  $\beta_1 \div \beta_8$

Приняв  $\mu = m_\beta = 1$  и  $t = 2,5$ , после применения программного обеспечения, находим свободные члены избыточных измерений и их допустимые значения в третьем цикле (табл. 4.20, 4.21).

Таблица 4.20. Величины  $l_i$  и  $l_{i, \text{доп}}$  избыточных измерений углов в третьем цикле

№	Стороны	$l_i$ , "	$l_{i, \text{доп}}$ , "	Результат
1	$\beta_1$	-0,4	$\pm 3,2$	Допустимый
2	$\beta_2$	1,1	$\pm 3,2$	Допустимый
3	$\beta_3$	2,3	$\pm 3,3$	Допустимый
4	$\beta_4$	-2,4	$\pm 2,9$	Допустимый
5	$\beta_5$	0,4	$\pm 3,1$	Допустимый
6	$\beta_6$	-2,5	$\pm 3,6$	Допустимый
7	$\beta_7$	2,9	$\pm 3,5$	Допустимый
8	$\beta_8$	0,2	$\pm 3,5$	Допустимый

Таблица 4.21. Величины  $l_i$  и  $l_{i,доп}$  избыточных измерений сторон в третьем цикле

№	Стороны	$l_i$ , мм	$l_{i,доп}$ , мм	Результат
1	S <sub>9</sub>	-2,0	±4,8	Допустимый
2	S <sub>10</sub>	1,6	±4,7	Допустимый
3	S <sub>11</sub>	1,0	±4,7	Допустимый
4	S <sub>12</sub>	4,0	±4,7	Допустимый
5	S <sub>13</sub>	2,0	±4,6	Допустимый

Из анализа результатов видно, что избыточные измерения не содержат грубых ошибок. После уравнивания получим обратную матрицу весов неизвестных  $Q_3$  и координаты наблюдаемых пунктов (табл. 4.22).

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0,840 & 0,035 & 0,153 & 0,060 & 0,034 & 0,060 & 0,007 & 0,062 \\ & 0,380 & 0,037 & 0,233 & 0,027 & 0,214 & 0,005 & 0,214 \\ & & 0,713 & 0,019 & 0,135 & 0,034 & 0,027 & 0,042 \\ & & & 0,452 & 0,017 & 0,206 & 0,004 & 0,228 \\ & & & & 0,690 & 0,003 & 0,137 & 0,021 \\ & & & & & 0,454 & -0,004 & 0,249 \\ & & & & & & 0,665 & -0,045 \\ & & & & & & & 0,425 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4.22. Координаты наблюдаемых пунктов в третьем цикле

№	Пункты	Координаты пунктов, м		СКО, мм		
		X	Y	$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	M1	1 593 472,3571	485 060,9396	1,0	0,6	1,2
2	M2	1 593 473,6877	485 076,8351	0,9	0,7	1,1
3	M3	1 593 475,5306	485 098,9083	0,9	0,7	1,1
4	M4	1 593 476,9241	485 115,5561	0,9	0,7	1,1

На основании координат, вычисленных из третьего цикла и объединенных циклов 1, 2, получим величины деформаций (табл. 4.23):

Таблица 4.23. Результаты анализа деформаций в третьем цикле

№	Пункты	$\Delta x$ , мм	$\Delta x_{\text{доп}}$ мм	Анализ	$\Delta y$ , мм	$\Delta y_{\text{доп}}$ мм	Анализ
1	M1	-1,9	$\pm 3,2$	Стабильность	-1,3	$\pm 2,1$	Стабильность
2	M2	2,2	$\pm 2,9$	Стабильность	-1,5	$\pm 2,3$	Стабильность
3	M3	0,1	$\pm 2,9$	Стабильность	-1,2	$\pm 2,3$	Стабильность
4	M4	-2,2	$\pm 2,8$	Стабильность	0,5	$\pm 2,3$	Стабильность

Анализ деформаций указывает, что стабильными являются все пункты. Поэтому для объединения циклов можно записать следующие условные уравнения:

$$\delta \bar{x}_{2_i} - \delta x_{3_i} + w_{x_i} = 0;$$

$$\delta \bar{y}_{2_i} - \delta y_{3_i} + w_{y_i} = 0.$$

Обратную матрицу для двух циклов составляем по формуле (4.8). Затем по формулам рекуррентного уравнения находим матрицу объединённых циклов. Приведём только её нижний правый блок:

$$\bar{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0,280 & 0,012 & 0,051 & 0,020 & 0,011 & 0,020 & 0,002 & 0,021 \\ & 0,127 & 0,012 & 0,078 & 0,009 & 0,071 & 0,002 & 0,071 \\ & & 0,238 & 0,006 & 0,045 & 0,011 & 0,009 & 0,014 \\ & & & 0,151 & 0,006 & 0,069 & 0,001 & 0,076 \\ & & & & 0,230 & 0,001 & 0,046 & 0,007 \\ & & & & & 0,151 & -0,001 & 0,083 \\ & & & & & & 0,222 & -0,015 \\ & & & & & & & 0,142 \end{pmatrix}.$$

Из сравнения величин диагональных элементов матриц  $Q_3$  и  $\bar{Q}_3$ , следует,

что объединение циклов позволяет повысить точность при определении положения наблюдаемых пунктов.

По формулам (4.12) и (4.13) получим поправки к неизвестным

$$\Delta_3^T = (0,0012 \quad 0,0009 \quad -0,0014 \quad 0,0010 \quad -0,0001 \quad 0,0008 \quad 0,0014 \quad 0,0004)$$

и координаты наблюдаемых пунктов объединенных циклов (табл. 4.24).

Таблица 4.24. Координаты наблюдаемых пунктов объединенных циклов

№	Пункты	Координаты пунктов, м		СКО, мм		
		X	Y	$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	M1	1 593 472,3584	485 060,9405	0,6	0,4	0,7
2	M2	1 593 473,6862	485 076,8361	0,5	0,4	0,6
3	M3	1 593 475,5305	485 098,9090	0,5	0,4	0,6
4	M4	1 593 476,9256	485 115,5557	0,5	0,4	0,6

В 4-м цикле в сети были измерены: 13 сторон (табл. 4.25) и восемь углов (табл. 4.26). Измерения производились электронным тахеометром «ТС-2003» с точностями измерения  $m_\beta = 1''$  и  $m_s = 1 \text{ мм} + 1 \text{ ppm}$  соответственно.

Веса результатов измерений вычислены по формуле (4.14).

Необходимые измерения: стороны:  $S_1 \div S_8$ .

Избыточные измерения: стороны:  $S_9 \div S_{13}$  и углы  $\beta_1 \div \beta_8$

Приняв  $\mu = m_\beta = 1$  и  $t = 2,5$ , после применения программного обеспечения, находим свободные члены избыточных измерений и их допустимые значения в четвертом цикле (табл. 4.27, 4.28).

Таблица 4.25. Измеренные стороны в 4-м цикле

№	Стороны	Обозначение сторон	Длина, м
1	T4 – M1	$S_1$	402,5356
2	T4 – M2	$S_2$	387,9705
3	T4 – M3	$S_3$	367,9320
4	T4 – M4	$S_4$	352,9840
5	T5 – M1	$S_5$	313,6439
6	T5 – M2	$S_6$	317,4564
7	T5 – M3	$S_7$	323,9848
8	T5 – M4	$S_8$	329,8079
9	M1–M2	$S_9$	15,9507
10	M1–M3	$S_{10}$	38,1011
11	M1–M4	$S_{11}$	54,8062
12	M2–M4	$S_{12}$	38,8555
13	M3–M4	$S_{13}$	16,7051

Таблица 4.26. Измеренные углы в 4-м цикле

№	УГЛЫ			Обозначение уг- лов	Значения
					° ' "
1	M1	T4	M2	$\beta_1$	00 56 31,8
2	M2	T4	M3	$\beta_2$	01 25 52,2
3	M3	T4	M4	$\beta_3$	01 11 11,1
4	M4	T4	T3	$\beta_4$	00 02 36,9
5	T3	T5	M1	$\beta_5$	27 45 10,5
6	M1	T5	M2	$\beta_6$	02 48 44,9
7	M2	T5	M3	$\beta_7$	03 46 56,9
8	M3	T5	M4	$\beta_8$	02 44 41,8

Таблица 4.27. Величины  $l_i$  и  $l_{i,доп}$  избыточных измерений углов в 4-м цикле

№	Стороны	$l_i$ , "	$l_{i,доп}$ , "	Результат
1	$\beta_1$	-1,2	$\pm 3,2$	Допустимый
2	$\beta_2$	1,9	$\pm 3,2$	Допустимый
3	$\beta_3$	1,0	$\pm 3,3$	Допустимый
4	$\beta_4$	-1,2	$\pm 2,9$	Допустимый
5	$\beta_5$	1,6	$\pm 3,1$	Допустимый
6	$\beta_6$	-1,2	$\pm 3,6$	Допустимый
7	$\beta_7$	-0,5	$\pm 3,5$	Допустимый
8	$\beta_8$	0,8	$\pm 3,5$	Допустимый

Таблица 4.28. Величины  $l_i$  и  $l_{i,доп}$  избыточных измерений сторон в 4-м цикле

№	Стороны	$l_i$ , мм	$l_{i,доп}$ , мм	Результат
1	$S_9$	-2,6	$\pm 4,8$	Допустимый
2	$S_{10}$	-2,0	$\pm 4,7$	Допустимый
3	$S_{11}$	0,8	$\pm 4,7$	Допустимый
4	$S_{12}$	3,4	$\pm 4,7$	Допустимый
5	$S_{13}$	2,8	$\pm 4,6$	Допустимый

Из анализа результатов видно, что избыточные измерения не содержат грубых ошибок. После уравнивания получим обратную матрицу весов неизвестных  $Q_4$  и координаты наблюдаемых пунктов (табл. 4.29).

$$Q_4 = \begin{pmatrix} 0,840 & 0,035 & 0,153 & 0,060 & 0,034 & 0,060 & 0,007 & 0,062 \\ & 0,380 & 0,037 & 0,233 & 0,027 & 0,214 & 0,005 & 0,214 \\ & & 0,713 & 0,019 & 0,135 & 0,034 & 0,027 & 0,042 \\ & & & 0,452 & 0,017 & 0,206 & 0,004 & 0,228 \\ & & & & 0,690 & 0,003 & 0,137 & 0,021 \\ & & & & & 0,454 & -0,004 & 0,249 \\ & & & & & & 0,665 & -0,045 \\ & & & & & & & 0,425 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4.29. Координаты наблюдаемых пунктов в 4-м цикле

№	Пункты	Координаты пунктов, м		СКО, мм		
		X	Y	$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	M1	1 593 472,3587	485 060,9407	1,0	0,6	1,2
2	M2	1 593 473,6873	485 076,8357	0,9	0,7	1,1
3	M3	1 593 475,5324	485 098,9092	0,9	0,7	1,1
4	M4	1 593 476,9236	485 115,5568	0,9	0,7	1,1

На основании координат, вычисленных из 4-ого цикла и объединенных циклов 1, 2, 3 получим величины деформаций (табл. 4.30):

Таблица 4.30. Результаты анализа деформаций в 4-м цикле

№	Пункты	$\Delta x$ , мм	$\Delta x_{\text{доп}}$ , мм	Анализ	$\Delta y$ , мм	$\Delta y_{\text{доп}}$ , мм	Анализ
1	M1	0,3	$\pm 2,5$	Стабильность	0,2	$\pm 1,7$	Стабильность
2	M2	1,1	$\pm 2,3$	Стабильность	-0,4	$\pm 1,8$	Стабильность
3	M3	1,9	$\pm 2,2$	Стабильность	0,2	$\pm 1,8$	Стабильность
4	M4	-2,0	$\pm 2,2$	Стабильность	1,1	$\pm 1,7$	Стабильность

Анализ деформаций указывает, что стабильными являются все пункты. Поэтому для объединения циклов можно записать следующие условные уравнения:



$$\delta\bar{x}_{2_i} - \delta x_{3_i} + w_{x_i} = 0;$$

$$\delta\bar{y}_{2_i} - \delta y_{3_i} + w_{y_i} = 0.$$

Обратную матрицу для двух циклов составляем по формуле (4.8). Затем по формулам рекуррентного уравнения находим матрицу объединённых циклов. Приведём только её нижний правый блок:

$$\bar{Q}_4 = \begin{bmatrix} 0.210 & 0.009 & 0.038 & 0.015 & 0.009 & 0.015 & 0.002 & 0.015 \\ & 0.095 & 0.009 & 0.058 & 0.007 & 0.054 & 0.001 & 0.054 \\ & & 0.178 & 0.005 & 0.034 & 0.009 & 0.007 & 0.011 \\ & & & 0.113 & 0.004 & 0.051 & 0.001 & 0.057 \\ & & & & 0.172 & 0.001 & 0.034 & 0.005 \\ & & & & & 0.114 & -0.001 & 0.062 \\ & & & & & & 0.166 & -0.011 \\ & & & & & & & 0.106 \end{bmatrix}$$

Из сравнения величин диагональных элементов матриц  $Q_4$  и  $\bar{Q}_4$ , следует, что объединение циклов позволяет повысить точность при определении положения наблюдаемых пунктов.

По формулам (4.12) и (4.13) получим поправки к неизвестным

$$\Delta_4^T = (-0,0002 \quad -0,0001 \quad -0,0008 \quad 0,0003 \quad -0,0014 \quad -0,0001 \quad 0,0015 \quad -0,0008)$$

и координаты наблюдаемых пунктов объединённых циклов (табл. 4.31).

Таблица 4.31. Координаты наблюдаемых пунктов объединённых циклов

№	Пункты	Координаты пунктов, м		СКО, мм		
		X	Y	$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	M1	1 593 472,3585	485 060,9406	0,4	0,3	0,5
2	M2	1 593 473,6865	485 076,8360	0,4	0,3	0,5
3	M3	1 593 475,5310	485 098,9091	0,4	0,3	0,5
4	M4	1 593 476,9251	485 115,5560	0,3	0,3	0,4

В 5-м цикле в сети были измерены: восемь углов (табл. 4.33) и 13 сторон (табл. 4.32). Измерения производились электронным тахеометром «ТС-2003» с точностями измерения  $m_{\beta} = 1''$  и  $m_s = 1 \text{ мм} + 1 \text{ ppm}$  соответственно.

Таблица 4.32. Измеренные стороны в 5-м цикле

№	Стороны	Обозначение сторон	Длина, м
1	T4 – M1	$S_1$	402,5377
2	T4 – M2	$S_2$	387,9700
3	T4 – M3	$S_3$	367,9318
4	T4 – M4	$S_4$	352,9839
5	T5 – M1	$S_5$	313,6421
6	T5 – M2	$S_6$	317,4567
7	T5 – M3	$S_7$	323,9835
8	T5 – M4	$S_8$	329,8059
9	M1–M2	$S_9$	15,9517
10	M1–M3	$S_{10}$	38,1003
11	M1–M4	$S_{11}$	54,8073
12	M2–M4	$S_{12}$	38,8569
13	M3–M4	$S_{13}$	16,7050

Таблица 4.33. Измеренные углы в 5-м цикле

№	Углы			Обозначение углов	Значения ° ' "
	M1	T4	M2		
1	M1	T4	M2	$\beta_1$	00 56 30,7
2	M2	T4	M3	$\beta_2$	01 25 54,5
3	M3	T4	M4	$\beta_3$	01 11 10,9
4	M4	T4	T3	$\beta_4$	00 02 36,5
5	T3	T5	M1	$\beta_5$	27 45 12,4
6	M1	T5	M2	$\beta_6$	02 48 45,0
7	M2	T5	M3	$\beta_7$	03 46 56,8
8	M3	T5	M4	$\beta_8$	02 44 40,8

Веса результатов измерений вычислены по формуле (4.14).

Необходимые измерения: стороны:  $S_1 \div S_8$ .

Избыточные измерения: стороны:  $S_9 \div S_{13}$  и углы  $\beta_1 \div \beta_8$

Приняв  $\mu = m_\beta = 1$  и  $t = 2,5$ , после применения программного обеспечения, находим свободные члены избыточных измерений и их допустимые значения в пятом цикле (табл. 4.34, 4.35).

Таблица 4.34. Величины  $l_i$  и  $l_{i,\text{доп}}$  избыточных измерений углов в 5-м цикле

№	Стороны	$l_i$ , "	$l_{i,\text{доп}}$ , "	Результат
1	$\beta_1$	1,3	$\pm 3,2$	Допустимый
2	$\beta_2$	-1,3	$\pm 3,2$	Допустимый
3	$\beta_3$	0,8	$\pm 3,3$	Допустимый
4	$\beta_4$	0,4	$\pm 2,9$	Допустимый
5	$\beta_5$	-1,9	$\pm 3,1$	Допустимый
6	$\beta_6$	0,7	$\pm 3,6$	Допустимый
7	$\beta_7$	-0,8	$\pm 3,5$	Допустимый
8	$\beta_8$	1,8	$\pm 3,5$	Допустимый

Таблица 4.35. Величины  $l_i$  и  $l_{i,\text{доп}}$  избыточных измерений сторон в 5-м цикле

№	Стороны	$l_i$ , мм	$l_{i,\text{доп}}$ , мм	Результат
1	$S_9$	-0,2	$\pm 4,8$	Допустимый
2	$S_{10}$	1,2	$\pm 4,7$	Допустимый
3	$S_{11}$	1,7	$\pm 4,7$	Допустимый
4	$S_{12}$	0,5	$\pm 4,7$	Допустимый
5	$S_{13}$	2,5	$\pm 4,6$	Допустимый

Из анализа результатов видно, что избыточные измерения не содержат грубых ошибок. После уравнивания получим обратную матрицу весов неизвестных  $Q_5$  и координаты наблюдаемых пунктов (табл. 4.36).

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 0,840 & 0,035 & 0,153 & 0,060 & 0,034 & 0,060 & 0,007 & 0,062 \\ & 0,380 & 0,037 & 0,233 & 0,027 & 0,214 & 0,005 & 0,214 \\ & & 0,713 & 0,019 & 0,135 & 0,034 & 0,027 & 0,042 \\ & & & 0,452 & 0,017 & 0,206 & 0,004 & 0,228 \\ & & & & 0,690 & 0,003 & 0,137 & 0,021 \\ & & & & & 0,454 & -0,004 & 0,249 \\ & & & & & & 0,665 & -0,045 \\ & & & & & & & 0,425 \end{pmatrix}.$$

Таблица 4.36. Координаты наблюдаемых пунктов в 5-м цикле

№	Пункты	Координаты пунктов, м		СКО, мм		
		X	Y	$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	M1	1 593 472,3578	485 060,9402	1,0	0,6	1,2
2	M2	1 593 473,6859	485 076,8353	0,9	0,7	1,1
3	M3	1 593 475,5319	485 098,9091	0,9	0,7	1,1
4	M4	1 593 476,9226	485 115,5569	0,9	0,7	1,1

На основании координат, вычисленных из 5-ого цикла и объединенных циклов 1, 2, 3, 4 получим величины деформаций (табл. 4.37):

Таблица 4.37. Результаты анализа деформаций в 5-м цикле

№	Пункты	$\Delta x$ , мм	$\Delta x_{\text{доп}}$ , мм	Анализ	$\Delta y$ , мм	$\Delta y_{\text{доп}}$ , мм	Анализ
1	M1	-0,7	$\pm 2,2$	Стабильность	-0,4	$\pm 1,5$	Стабильность
2	M2	-0,6	$\pm 2,0$	Стабильность	-0,7	$\pm 1,6$	Стабильность
3	M3	0,8	$\pm 2,0$	Стабильность	-0,0	$\pm 1,6$	Стабильность
4	M4	-2,5	$\pm 1,9$	<b>Нестабильность</b>	0,8	$\pm 1,6$	Стабильность

Анализ деформаций указывает, что стабильными являются пункты М1, М2, М3 и нестабильным – пункт М4. Поэтому для объединения циклов запишем только следующие условные уравнения пунктов М1, М2, М3:

$$\delta\bar{x}_{2i} - \delta x_{3i} + w_{x_i} = 0;$$

$$\delta\bar{y}_{2i} - \delta y_{3i} + w_{y_i} = 0.$$

Обратную матрицу для двух циклов составляем по формуле (4.8). Затем по формулам рекуррентного уравнивания находим матрицу объединённых циклов. Приведём только её верхний правый блок:

$$\bar{Q}_5 = \begin{bmatrix} 0.168 & 0.007 & 0.031 & 0.012 & 0.007 & 0.012 & 0.001 & 0.012 \\ & 0.076 & 0.007 & 0.047 & 0.005 & 0.043 & 0.001 & 0.043 \\ & & 0.143 & 0.004 & 0.027 & 0.007 & 0.005 & 0.009 \\ & & & 0.090 & 0.003 & 0.041 & 0.001 & 0.046 \\ & & & & 0.138 & 0.001 & 0.027 & 0.004 \\ & & & & & 0.091 & -0.001 & 0.050 \\ & & & & & & 0.643 & -0.050 \\ & & & & & & & 0.275 \end{bmatrix}$$

Из сравнения величин диагональных элементов матриц  $Q_5$  и  $\bar{Q}_5$ , следует, что объединение циклов позволяет повысить точность при определении положения наблюдаемых пунктов.

По формулам (4.12) и (4.13) получим поправки к неизвестным

$$\Delta_5^T = (0,0006 \quad 0,0004 \quad 0,0005 \quad 0,0006 \quad -0,0007 \quad 0,0000 \quad -0,0002 \quad 0,0002)$$

и координаты наблюдаемых пунктов объединенных циклов (табл. 4.31).

Таблица 4.38. Координаты наблюдаемых пунктов объединенных циклов

№	Пункты	Координаты пунктов, м		СКО, мм		
		X	Y	$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1 593 472,3584	485 060,9405	0,4	0,2	0,4
2	М2	1 593 473,6864	485 076,8359	0,3	0,3	0,4
3	М3	1 593 475,5312	485 098,9091	0,3	0,3	0,4
4	М4	1 593 476,9224	485 115,5571	0,7	0,4	0,8

Координаты наблюдаемых пунктов первого цикла, объединенных циклов 1, 2 и 1, 2, 3 приведены в табл. 4.39.

Таблица 4.39. Координаты наблюдаемых пунктов первого цикла, объединенных циклов 1, 2 и 1, 2, 3

№	Пункты	Первый цикл		Объединенные циклы 1, 2		Объединенные циклы 1, 2, 3	
		Координаты пунктов, м					
		X	Y	X	Y	X	Y
1	M1	1 593 472,3584	485 060,9419	1 593 472,3590	485 060,9409	1 593 472,3584	485 060,9405
2	M2	1 593 473,6848	485 076,8378	1 593 473,6855	485 076,8366	1 593 473,6862	485 076,8361
3	M3	1 593 475,5302	485 098,9095	1 593 475,5305	485 098,9094	1 593 475,5305	485 098,9090
4	M4	1 593 476,9276	485 115,5553	1 593 476,9263	485 115,5555	1 593 476,9256	485 115,5557

Координаты наблюдаемых пунктов объединенных циклов 1, 2, 3, 4 и 1, 2, 3, 4, 5 приведены в табл. 4.40.

Таблица 4.40. Координаты наблюдаемых пунктов объединенных циклов 1, 2, 3, 4 и 1, 2, 3, 4, 5

№	Пункты	Объединенные циклы 1, 2, 3, 4		Объединенные циклы 1, 2, 3, 4, 5	
		Координаты пунктов, м			
		X	Y	X	Y
1	M1	1 593 472,3585	485 060,9406	1 593 472,3584	485 060,9405
2	M2	1 593 473,6865	485 076,8360	1 593 473,6864	485 076,8359
3	M3	1 593 475,5310	485 098,9091	1 593 475,5312	485 098,9091
4	M4	1 593 476,9251	485 115,5560	1 593 476,9224	485 115,5571

### Вывод:

Результаты выполненного в этом разделе анализа позволяют сделать заключение о том, что применение алгоритма последовательного объединения циклов наблюдений, основанного на рекуррентном уравнивании, действительно приводит к повышению точности определения положения наблюдаемых пунктов и позволяет выполнить анализ деформаций.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате, выполненных в диссертационной работе исследований можно сделать вывод о том, что основная цель работы, состоящая в совершенствовании методов геодезического обеспечения наблюдений за деформациями ГТС с использованием рекуррентного способа уравнивания, выполнена.

Основные **итоги** диссертационной работы:

- разработана методика оптимального проектирования плановой геодезической сети с минимальным количеством измеряемых сторон и максимальной точностью определения положения наблюдаемых пунктов;
- разработан основанный на рекуррентном способе уравнивания алгоритм поиска возможных грубых ошибок измерений и исходных данных при наблюдении за деформациями гидротехнических сооружений;
- выполнен анализ деформаций ГТС, выявленных в результате последовательного объединения циклов повторных измерений по рекуррентному способу.

В **перспективе** дальнейших исследований возможно решение следующих задач:

- совершенствование методики оптимального проектирования геодезических сетей с возможностью определения не только оптимального количества измерений, но и их вида;
- совершенствование разработанного алгоритма анализа деформационных процессов путем использования альтернативных критериев контроля грубых ошибок измерений с целью повышения надёжности выявления деформаций.

Разработанный автором комплекс технологических решений может быть рекомендован для наблюдения за деформациями ГТС и анализа деформационных процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. – М.: Недра, 1989.
2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1984.
3. Большаков В.Д., Левчук Г.П., Новак В.Е. и др. Справочное руководство по инженерно-геодезическим работам / М.: Недра. 1980. – 781 с.
4. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
5. Герасименко М.Д. Оптимальное проектирование и уравнивание геодезических сетей. - М.: Наука, 1992. - 160 с.
6. Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений: учебник для вузов. –М.: Изд-во МИИГАиК, 2016. - 422 с.
7. Голубев В.В. Основы теории ошибок. –М.: Изд-во МИИГАиК, 2005.
8. Динь Тхи Ле Ха. Разработка методики создания геодезических опорных сетей при строительстве гидроэлектростанций во Вьетнаме. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М., 2013.
9. Зайцев А.К., Марфенко С.В., Михелев Д.Ш. Геодезические методы исследования деформаций сооружений. М.: Недра, 1991. - 272 с.
10. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. – М.: Советское радио, 1973.
11. Карлсон А.А. Измерение деформации гидротехнических сооружений. М.: Недра, 1984.
12. Ключин Е.Б., Киселёв М.И., Михелев Д.Ш., Фельдман В.Д. Инженерная геодезия: Учебник для вузов, 4-е изд., испр. // Под ред. Д.Ш. Михелева. - М.: Академия. - 2004. - 480 с.
13. Ключин Е.Б., Михелев Д.Ш., Барков Д.П. - Практикум по прикладной геодезии. Геодезическое обеспечение строительства и эксплуатации инженерных сооружений. М.: Недра. 1993. -369 с.
14. Кузнецов П.Н. Геодезия Часть 1: Учебник для вузов. – М.:Картгеоцентр – Геодезиздат, 2002. – 341 с.



15. Куштин И.Ф. Геодезия: обработка результатов измерений // Учебное пособие. - М.: ИКЦ «МарТ». - Ростов-на-Дону: издательский центр «МарТЧ. - 2006. - 288 с.
16. Лэ Ань Куонг. К вопросу об оптимальном проектировании геодезических сетей // Изв. вузов «геодезия и аэрофотосъемка». 2018. Т. 62. № 2. С. 147–151. doi: 10.30533/0536-101X-2018-62-2-147-151.
17. Левчук Г.П., Новак В.Е, Конусов В. Г. Прикладная геодезия: Основные методы и принципы инженерно-геодезических работ. Учебник для вузов. М.: Недра 1981.- 438 с.
18. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математикостатистической теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1962.
19. Мазмишвили А. И. Способ наименьших квадратов.– М.: Недра, 1968.
20. Маркузе Ю. И. Основы уравнительных вычислений: Учебное пособие для вузов – М.: Недра, 1990. – 240 с.
21. Маркузе Ю. И., Голубев В. В. Теория математической обработки геодезических измерений: Учебное пособие для вузов // Под общ. ред. Ю. И. Маркузе. – М.: Академический Проект Альма Матер, 2010. – 247 с.
22. Маркузе Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ. - М.: Недра, 1989. – 248 с.
23. Маркузе Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. – М.: Недра, 1982.
24. Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей. – М.: Картгеоцентр - Геодезиздат, 1994.
25. Маркузе Ю.И. Анализ и уравнивание геодезических сетей без составления нормальных уравнений. Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып.3, 1981, с.3-10.
26. Маркузе Ю.И. Взаимосвязь процедур уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей. Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 3. 1984, с 3-14.
27. Маркузе Ю.И. Математическая обработка геодезических измерений. Ито-

- ги науки и техники, серия Геодезия и аэрофотосъемка т.23. М. ВИНТИ, 1985.
28. Маркузе Ю.И. Эффективный алгоритм для анализа деформаций. Геодезия, 225 лет МИИГАиК. С.306-317.
  29. Маркузе, Ю.И. Синтез рекуррентного и традиционного уравнивания // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. — 1990. — № 3. — С. 3-13.
  30. Маркузе, Ю.И. Уравнивание геодезических сетей с контролем грубых ошибок// Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. -1986. —№5. —С. 9-18
  31. Маркузе, Ю.И., П.П. Лобанов, Мансур Жорж. Об определении необходимых и избыточных измерений в процессе рекуррентного уравнивания // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1994. — № 2-3. — С. 27-35.
  32. Маркузе, Ю.И. Поиск грубых ошибок при рекуррентном уравнивании наземных и спутниковых геодезических сетей// Геодезия и картография. — 1995. — № 11. — С.8-15.
  33. Маркузе Ю.И. Обобщенный рекуррентный алгоритм уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей с локализацией грубых ошибок. «Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка», 2000, №1, с 3-16.
  34. Маркузе Ю.И., Лэ Ань Куонг. Исследование алгоритма для анализа деформаций геодезических пунктов при наблюдении за горизонтальными смещениями гидротехнических сооружений // Геодезия и картография. — 2017. — Т. 78. — № 7. — С. 23-30. DOI: 10.22389/0016-7126-2017-925-7-23-30.
  35. Маркузе Ю.И., Лэ Ань Куонг, Чан Тиен Ранг. Исследование исходной матрицы обратных весов неизвестных при рекуррентном способе уравнивания измерений // Геодезия и картография. — 2016. — № 11. — С. 7–10. DOI: 10.22389/0016-7126-2016-917-11-7-10.
  36. Маркузе Ю. И., Лэ Ань Куонг, Нгуен Тхи Тху, Динь Хай Нам. Контроль грубых ошибок измерений и исходных данных // Геодезия и картография. — 2018. — Т. 79. — № 7.— С. 11–16. DOI: 10.22389/0016-7126-2018-937-7-11-16.
  37. Марфенко С.В. Геодезические работы по наблюдению за деформациями

- сооружений. Учебное пособие. М. МИИГАиК, 2004.- 36 с.
38. Маслов А.В., Гордеев А.В., Батраков Ю.Г. Геодезия. – М.: Колос, 2006.
  39. Михелев Д.Ш. и др. Геодезические измерения при изучении деформаций крупных инженерных сооружений. Недра, М.: 1977.
  40. Нгуен Вьет Ха. Разработка методики определения деформации плотин гидроэлектростанций по результатам спутниковых геодезических измерений во Вьетнаме. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М., 2009.
  41. П-648. Руководство по натурным наблюдениям за деформациями гидротехнических сооружений и их оснований геодезическими методами. 2014.
  42. Пискунов М.Е. Методика геодезических наблюдений за деформациями сооружений. М. "Недра", 1980. - 248 с.
  43. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение. –М.: Наука, 1968.
  44. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. – М.: Мир, 1973.
  45. Тамутис З. П. Проектирование инженерных геодезических сетей. М.: Недра, 1990. 138 с.
  46. Фельдман В.Д. Основы инженерной геодезии. - М.: Высшая школа, 2001. - 456 с.
  47. Ассане Антонио Алфредо. Геодезические методы анализа высотных и плановых деформаций инженерных сооружений и земной поверхности. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М., 2006.
  48. Шеховцов Г.А., Шеховцова Р.П. Современные геодезические методы определения деформаций инженерных сооружений. Монография /Нижний Новгород.: ННГАСУ. 2009. С. – 156.
  49. [Электронный ресурс] / Режим доступа:  
<http://vneconomy.vn/20090813080916457P0C11/dan-so-viet-nam-dat-gan-86-trieu-nguoi.htm>, 2009.

50. [Электронный ресурс] / Режим доступа:  
[https://vi.wikipedia.org/wiki/%C4%90%E1%BB%8Ba\\_1%C3%BD\\_Vi%E1%BB%87t\\_Nam#Kh%C3%AD\\_h%E1%BA%ADu](https://vi.wikipedia.org/wiki/%C4%90%E1%BB%8Ba_1%C3%BD_Vi%E1%BB%87t_Nam#Kh%C3%AD_h%E1%BA%ADu).
51. [Электронный ресурс] / Режим доступа:  
[https://vi.wikipedia.org/wiki/Th%E1%BB%83\\_lo%E1%BA%A1i:Nh%C3%A0\\_m%C3%A1y\\_th%E1%BB%A7y\\_%C4%91i%E1%BB%87n\\_Vi%E1%BB%87t\\_Nam](https://vi.wikipedia.org/wiki/Th%E1%BB%83_lo%E1%BA%A1i:Nh%C3%A0_m%C3%A1y_th%E1%BB%A7y_%C4%91i%E1%BB%87n_Vi%E1%BB%87t_Nam)
52. [Электронный ресурс] / Режим доступа:  
[https://vi.wikipedia.org/wiki/Vi%E1%BB%87t\\_Nam#D%C3%A2n\\_s%E1%BB%91](https://vi.wikipedia.org/wiki/Vi%E1%BB%87t_Nam#D%C3%A2n_s%E1%BB%91)
53. Dau Quang Tuan, Tu hoc lap trinh Visual Basic 6.0, NXB Giao thong van tai 2006.
54. Bao cao ky thuat cong tac do dac quan trac bien dang cac hang muc cong trinh thuy dien Pleikrông (2012 – 2013).
55. Ha Minh Hoa. Phuong phap binh sai truy hoi voi phep bien doi xoay: Sach chuyen khao – Nha xuất ban khoa hoc va ki thuat, 2013. - 287 trang.
56. Hoang Ngoc Ha. Tinh toan trac dia va co so du lieu. NXB Giao duc, Ha Noi, 2001.
57. Hoang Ngoc Ha. Binh sai tinh toan trac dia va GPS. NXB Khoa hoc ky thuat, Ha Noi, 2006.
58. Le Anh Tuan, Dao Thi Viet Nga. Phat trien thuy dien o Viet Nam: Thach thuc va giai phap. Trung tam Bao ton va Phat trien Tai nguyen nuoc phat hanh. Nha xuất ban Khoa hoc va Ky thuat, 2016.
59. Le Duc Tinh. Nghien cuu giai phap nang cao hieu qua cong tac quan trac bien dang cong trinh o Viet Nam. Luan an tien si. Ha Noi, 2012.
60. Luong Van Dai. Vai net ve nganh dien Viet Nam, <http://www.vncold.vn>, 2008.
61. Nguyen Quang Phuc. Nghien cuu hoan thien phuong phap thanh lap va xu ly so lieu luoi khong che thi cong cac cong trinh xay dung trong dieu kien Viet Nam, 2009.
62. Nguyen Quang Phuc. Nghien cuu hoan thien phuong phap thanh lap va xu ly

- so lieu luoi khong che thi cong cac cong trinh xay dung trong dieu kien Viet Nam, 2009.
63. Nguyen Quang Phuc. Nghien cuu toi uu hoa thiet ke he thong luoi quan trac chuyen dich bien dang cong trinh. Luan an tien si. Ha Noi 2006.
  64. Nha may thuy dien Hoa Binh (2005-2011). Bao cao tinh trang cong trinh qua ket qua quan trac cac nam 2005-2011.
  65. Pham Huu Khang, Tham khao nhanh Visual Basic 6.0, NXB Thong ke, 2004.
  66. Pham Huu Khang, Kĩ xảo lập trình Visual Basic 6.0, NXB Lao dong xa hoi, 2004.
  67. Phan Van Hien, Do Ngoc Duong. Thiet ke toi uu luoi trac dia. NXB Giao thong – van tai, 2007.
  68. Quy chuan ky thuat quoc gia ve xay dung luoi do cao, National technical regulation on establishment of leveling network QCVN 11 : 2008/BTNMT.
  69. TCXDVN 309: 2004. Cong tac trac dia trong xay dung cong trinh – Yeu cau chung.
  70. TCXDVN 351: 2005. Quy trinh ky thuat quan trac chuyen dich ngang nha va cong trinh.
  71. TCVN 9360:2012 – Quy trinh ky thuat xac dinh do lun cong trinh dan dung va cong nghiep bang phuong phap do cao hinh hoc.
  72. Tran Khanh. Quan trac va phan tich chuyen dich bien dang cong trinh. Truong Dai hoc Mo Dia chat, Ha Noi, 2005.
  73. Tran Khanh. Nghien cuu quy trinh cong nghe cong tac quan trac bien dang cong trinh thuy dien. Bao cao tong ket de tai NCKH cao bo (Bo Giao duc va Dao tao), Ma so. B200-36-14, 5/2013.
  74. Tran Khanh, Nguyen Quang Phuc. Quan trac chuyen dich va bien dang cong trinh. NXB Giao thong - van tai, 2010.
  75. Tran Khanh. Ung dung cong nghe moi trong Trac dia cong trinh. NXB Giao thong - van tai, 2010.
  76. Tran Khanh. Quy trinh cong nghe quan trac chuyen dich bien dang cong trinh. Bao cao de tai nhanh trong de tai cap nha nuoc 46A-05-01.

77. US. Army Corp of engineers. Analysis and assessment of results from periodic monitoring survey of hydraulic structures, 2001.
78. US. Army Corp of engineers. Structural deformation surveying, 2002.
79. Behr J., K. Hudnut and N. King. Monitoring structural deformation at Pacoima dam, California, using continuous GPS, Proc. of ION-GPS98, September 15 – 18, Nashville TN, USA, pp 59-68, 2004.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**39 вариантов измерения 19-ти сторон и ошибки положения наблюдаемых пунктов удовлетворяют требованиям точности в 3-ой главе.**

1. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М1, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,2	2,5	2,7
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	4,0
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

2. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М3, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,2	2,5	2,8
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

3. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М3, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,1	2,5	2,8
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	2,2	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

4. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М1, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	2,7	3,0
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	2,3	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

5. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М1, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,2	2,5	2,7
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	3,9
4	М4	2,3	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8



6. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М1, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	2,7	3,0
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,9	2,1	2,8

7. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М2, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,0	2,4	2,6
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	3,9
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,9	2,1	2,8

8. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М2, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,0	2,4	2,6
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	3,9
4	М4	2,2	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

9. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М2, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,1	2,5	2,8
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,9	2,1	2,8

10. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М2, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,1	2,5	2,8
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	2,3	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

11. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М1, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,1	2,5	2,8
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	2,3	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

12. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М1, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,2	2,5	2,7
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

13. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М3, Т5-М6, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,0	2,4	2,6
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,9	2,1	2,8

14. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М3, Т5-М4, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,0	2,4	2,6
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	2,3	2,2	3,2
5	М5	2,1	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

15. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М2, Т5-М1, Т6-М4, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,2	1,9	2,3
4	М4	1,6	2,8	3,2
5	М5	2,0	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

16. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М2, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	4,0
4	М4	1,6	1,7	2,3
5	М5	1,9	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

17. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М3, Т5-М1, Т6-М4, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,6	1,9	2,5
4	М4	1,6	2,8	3,2
5	М5	2,0	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

18. Исключаемые измерения: Т3-М4, Т4-М3, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	2,3	1,9	3,0
5	М5	2,3	1,9	3,0
6	М6	1,8	2,1	2,8

19. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М2, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	4,0
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,0	1,9	2,8
6	М6	1,6	2,0	2,6

20. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М3, Т5-М1, Т6-М4, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,3	1,9	2,3
4	М4	1,6	2,8	3,2
5	М5	2,0	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

21. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М6, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,2	3,6	3,7
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,3	2,0	3,0
6	М6	2,3	2,0	3,0

22. Исключаемые измерения: Т3-М4, Т4-М2, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	2,3	1,9	3,0
5	М5	2,3	2,0	3,0
6	М6	1,8	2,1	2,8

23. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М3, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	1,6	1,7	2,3
5	М5	1,9	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

24. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М3, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,0	1,9	2,8
6	М6	1,6	2,0	2,6

25. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М6, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,3	4,1	4,3
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	4,0
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,3	1,9	3,0
6	М6	2,3	2,0	3,1

26. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М1, Т5-М1, Т6-М4, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,5	4,1	4,4
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,3	1,9	2,3
4	М4	1,6	2,8	3,2
5	М5	2,0	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

27. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М1, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,5	4,1	4,4
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	4,0
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,0	1,9	2,8
6	М6	1,6	2,0	2,6

28. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М1, Т5-М1, Т6-М4, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,5	4,1	4,4
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,1	1,9	2,2
4	М4	1,6	2,8	3,2
5	М5	2,0	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

29. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М1, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,5	4,1	4,4
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	1,6	1,7	2,3
5	М5	1,9	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8



30. Исключаемые измерения: Т3-М2, Т4-М1, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,5	4,1	4,4
2	М2	1,3	4,0	4,2
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,0	1,9	2,8
6	М6	1,6	2,0	2,6

31. Исключаемые измерения: Т3-М3, Т4-М1, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,5	4,1	4,4
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,3	3,7	3,9
4	М4	1,6	1,7	2,3
5	М5	1,9	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

32. Исключаемые измерения: Т3-М4, Т4-М1, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,5	4,1	4,4
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	2,3	1,9	3,0
5	М5	2,3	2,0	3,0
6	М6	1,8	2,1	2,8

33. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М2, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	4,2	4,5
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,0	1,9	2,8
6	М6	1,6	2,0	2,6

34. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М2, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	4,2	4,8
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	1,6	1,7	2,3
5	М5	1,9	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

35. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М2, Т5-М1, Т6-М4, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	4,2	4,8
2	М2	1,4	3,9	4,1
3	М3	1,1	1,9	2,1
4	М4	1,6	2,8	3,2
5	М5	1,9	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8

36. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М3, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	4,2	4,5
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,0	1,9	2,8
6	М6	1,6	2,0	2,6

37. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М3, Т5-М1, Т6-М4, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	4,2	4,8
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,3	1,9	2,3
4	М4	1,6	2,8	3,2
5	М5	2,0	1,9	2,8
6	М6	1,8	2,1	2,8

38. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М6, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М5, М4-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	4,3	4,5
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,2	3,6	3,8
4	М4	1,8	1,7	2,5
5	М5	2,3	2,0	3,0
6	М6	2,3	2,0	3,1

39. Исключаемые измерения: Т3-М1, Т4-М3, Т5-М1, Т6-М3, М1-М2, М1-М3, М2-М3, М4-М6, М5-М6

№	Пункты	Средняя квадратическая ошибка, мм		
		$m_x$	$m_y$	$m_p$
1	М1	1,4	4,3	4,5
2	М2	1,3	3,9	4,1
3	М3	1,4	3,6	3,8
4	М4	1,6	1,7	2,3
5	М5	1,9	1,9	2,7
6	М6	1,8	2,1	2,8