Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный университет
геодезии и картографии

М.А. Антоненко, А.В. Аристархова, Н.Г. Бабаева

Индивидуальные задания по математике
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рекомендовано
учебно-методическим объединением вузов
Российской Федерации по образованию
в области геодезии и фотограмметрии
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
21.05.01 — Прикладная геодезия
с присвоением квалификации инженер-геодезист

Москва
2014

УДК 517.37

Рецензенты:

доцент, кандидат техн. наук **О.А. Баюк** (Финансовый университет при Правительстве РФ);
профессор, кандидат техн. наук **И.И. Лонский** (МИИГАиК)

Составители: **М.А. Антоненко, А.В. Аристархова, Н.Г. Бабаева**
Индивидуальные задания по математике. Криволинейные интегралы: учебное пособие. — М.: МИИГАиК, 2015 . — 36 с.

Содержит индивидуальные задания для самостоятельного решения студентами и примеры решения типовых задач по теме «Криволинейные интегралы». Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 210501 — Прикладная геодезия с присвоением квалификации (степени) специалист.

Электронная версия учебного пособия размещена на сайте библиотеки МИИГАиК http://library.miigaik.ru

1. Индивидуальные домашние задания

1. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L f(x,y)dl$, где L — отрезок прямой, заключенный между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$.

1.1) $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)dl$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$.

1.2) $\int\limits_L \left(4x + xy^2\right)dl$, $A(0,0)$, $B(1,2)$.

1.3) $\int\limits_L \left(x^3 - xy^2\right)dl$, $A(0,1)$, $B(2,1)$.

1.4) $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, $A(0,1)$, $B(1,2)$.

1.5) $\int\limits_L \left(x + xy - y^2\right)dl$, $A(-1,0)$, $B(0,2)$.

1.6) $\int\limits_L \left(4x - y + y^2\right)dl$, $A(0,2)$, $B(2,0)$.

1.7) $\int\limits_L \left(y^3 + x^2y + 5x\right)dl$, $A(-1,0)$, $B(-1,4)$.

1.8) $\int\limits_L \left(2\sqrt{x} - y\right)dl$, $A(0,1)$, $B(1,3)$.

1.9) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, $A(0,0)$, $B(1,-1)$.

1.10) $\int\limits_L \left(\sqrt{xy^3} + 2y\right)dl$, $A(0,0)$, $B(2,4)$.

1.11) $\int\limits_L \left(x^2 - 3y + 1\right)dl$, $A(-2,-1)$, $B(2,-1)$.

1.12) $\int\limits_L \left(e^x + x\sqrt{y}\right)dl$, $A(0,0)$, $B(2,2)$.

1.13) $\int\limits_L \left(x\sin y + y^2 \right) dl$, $A(0,1)$, $B(3,1)$.

1.14) $\int\limits_L \left(\dfrac{3}{x} + xy^2 - y \right) dl$, $A(1,0)$, $B(3,2)$.

1.15) $\int\limits_L \left(y\sqrt{x} + y^2 + 2x \right) dl$, $A(0,0)$, $B(2,1)$.

1.16) $\int\limits_L \left(y^2x - xy + \sqrt{y} \right) dl$, $A(1,-1)$, $B(1,2)$.

1.17) $\int\limits_L \dfrac{dl}{2x + y}$, $A(1,0)$, $B(2,2)$.

1.18) $\int\limits_L \left(x\sqrt{y} + \dfrac{y^2 + 1}{x} \right) dl$, $A(2,0)$, $B(2,4)$.

1.19) $\int\limits_L \left(x + x^3y - 4y^2 \right) dl$, $A(0,1)$, $B(1,0)$.

1.20) $\int\limits_L \left(\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y} \right) dl$, $A(-3,0)$, $B(0,6)$.

1.21) $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$, $A(-2,-2)$, $B(0,0)$.

1.22) $\int\limits_L \left(4xy^2 + 2y - x \right) dl$, $A(0,-1)$, $B(2,0)$.

1.23) $\int\limits_L \left(xe^y + 2y - 1 \right) dl$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

1.24) $\int\limits_L \left(y\sqrt{x} + x^2 - y^3 \right) dl$, $A(0,-2)$, $B(4,0)$.

1.25) $\int\limits_L \left(e^y \cos x + y^2 - xy \right) dl$, $A(0,0)$, $B(0,3)$.

2. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L f(x,y)dl$, где часть кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$.

2.1) $\int\limits_L \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)dl$, $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ $(0 \le t \le \pi)$.

2.2) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

2.3) $\int\limits_L \sqrt{\frac{y}{2}}\,dl$, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

2.4) $\int\limits_L x\,dl$, $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

2.5) $\int\limits_L y\,dl$, $x = \cos t$, $y = t + \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

2.6) $\int\limits_L \frac{dl}{x^2 + y^2}$, $x = t^2 \cos t - 2t\sin t$, $y = t^2 \sin t + 2t\cos t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

2.7) $\int\limits_L \frac{dl}{y}$, $x = 2\ln(\operatorname{ctg} t) + 1$, $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$ $\left(\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}\right)$.

2.8) $\int\limits_L \left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)dl$, $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{4}\right)$.

2.9) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$ $(0 \le t \le \pi)$.

2.10) $\int\limits_L y\,dl$, $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

2.11) $\int\limits_L y\,dl$, $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ $(0 \le t \le \pi)$.

2.12) $\int\limits_L (1 - x)\,dl$, $x = \cos t$, $y = t + \sin t$ $(0 \le t \le \pi)$.

2.13) $\int_L (x^2+y^2)\,dl$, $x=t^2\cos t-2t\,\mathrm{sint}$, $y=t^2\sin t+2t\cos t$ $(0\le t\le \pi)$.

2.14) $\int_L \frac{4dl}{y^4}$, $x=2\ln(\mathrm{ctg}\,t)+1$, $y=\frac{2}{\sin 2t}$ $\left(\frac{\pi}{4}\le t\le \frac{\pi}{3}\right)$.

2.15) $\int_L \sqrt[3]{x}\,dl$, $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

2.16) $\int_L (x^2+y^2)\,dl$, $x=a(\cos t+t\,\mathrm{sint})$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$

2.17) $\int_L (1-y)\,dl$, $x=2(t-\mathrm{sint})$, $y=2(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

2.18) $\int_L x(x^2+y^2)\,dl$, $x=e^t\,\mathrm{sint}$, $y=e^t\cos t$ $(0\le t\le \pi)$.

2.19) $\int_L \sqrt{2+2x}\,dl$, $x=\cos t$, $y=t+\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

2.20) $\int_L \sqrt[3]{xy}\,dl$, $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

2.21) $\int_L \frac{dl}{x^2+y^2}$, $x=2(\cos t+t\,\mathrm{sint})$, $y=2(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

2.22) $\int_L \frac{x}{4}\,dl$, $x=2(t-\mathrm{sint})$, $y=2(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

2.23) $\int_L \frac{x\,dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x=e^t\,\mathrm{sint}$, $y=e^t\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

2.24) $\int_L \frac{1+x}{2}\,dl$, $x=\cos t$, $y=t+\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

2.25) $\int_L \frac{8dl}{y^5}$, $x=2\ln(\mathrm{ctg}\,t)+1$, $y=\frac{2}{\sin 2t}$ $\left(\frac{\pi}{6}\le t\le \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L f(x,y)dl$, где L — кривая, заданная в полярных координатах $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$ уравнением $r = r(\varphi)$.

3.1) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, $r = 2\cos\varphi$.

3.2) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, $r = 1-\cos\varphi$.

3.3) $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dl$, $r = 2$.

3.4) $\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $r = 2(1+\cos\varphi)$.

3.5) $\int\limits_L (x+y)\,dl$, $r^2 = \cos 2\varphi$.

3.6) $\int\limits_L \frac{(y^2-x^2)xy}{(x^2+y^2)^2}dl$, $r = 9\sin 2\varphi$.

3.7) $\int\limits_L (x+y)\,dl$, $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$.

3.8) $\int\limits_L \frac{xdl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $r = 5(1+\cos\varphi)$.

3.9) $\int\limits_L xdl$, $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

3.10) $\int\limits_L \frac{xdl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $r = 1+\cos\varphi$.

3.11) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, $r = \cos\varphi$.

3.12) $\int\limits_L \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} dl$, $r = a$.

3.13) $\int\limits_L y dl$, $r^2 = \sin 2\varphi$.

3.14) $\int\limits_L |x| dl$, $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

3.15) $\int \sqrt{x^2 + y^2} dl$, $r = 2\sin\varphi$.

3.16) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)^2 dl$, $r = 2$.

3.17) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) dl$, $r = 4\cos\varphi$.

3.18) $\int\limits_L dl$, $r = \varphi$.

3.19) $\int\limits_L y dl$, $r = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$.

3.20) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) dl$, $r = \sin\varphi$.

3.21) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)^4 dl$, $r = 4$.

3.22) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, $r = 3\sin\varphi$.

3.23) $\int\limits_L \frac{xy}{x^2 + y^2} dl$, $r = 9$.

3.24) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) dl$, $r = a$.

3.25) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, $r = 3\cos\varphi$.

4. Вычислите $\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, где L — часть кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$.

4.1) $\int\limits_L xdx + \sqrt{9-y^2}dy + xdz$, $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 2t$ $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.2) $\int\limits_L \sqrt{4-x^2}dx + ydy + ydz$, $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $z = 3t$ $(0 \le t \le \pi)$.

4.3) $\int\limits_L \dfrac{ydx - xdy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(x^2+y^2\right)dz$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4.4) $\int\limits_L \dfrac{dx}{x} + 4\sqrt[3]{y}dy + zdz$, $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = t$, где $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$.

4.5) $\int\limits_L ydx - \sqrt{4-y^2}dy + zdz$, $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \dfrac{t}{2}$, где $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

4.6) $\int\limits_L \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + zdz$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, где $0 \le t \le \pi$.

4.7) $\int\limits_L \dfrac{dx + dy}{z} + \left(x^2+y^2\right)dz$, $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, где $0 \le t \le \pi$.

4.8) $\int\limits_L xdx + xdy + (y+1)dz$, $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, где $0 \le t \le 2\pi$.

4.9) $\int\limits_L ydx + \sqrt{r^2-x^2}dy + z^2dz$, $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = rt$, где $0 \le t \le \pi$.

4.10) $\int\limits_L \dfrac{dx + dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + zdz$, $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, где $0 \le t \le \pi$.

4.11) $\int\limits_L x^2dx + ydy + zdz$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, где $0 \le t \le \pi$.

4.12) $\int\limits_L \left(y^2 - z^2\right)dx + 2yzdy - x^2dz$, $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, где $0 \le t \le 1$.

4.13) $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} + zdz$, $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = t$, где $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

4.14) $\int\limits_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2} + z^2dz$, $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = rt$, где $0 \le t \le \pi$.

4.15) $\int\limits_L ydx + xdy + xydz$, $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 3t$, где $0 \le t \le 2\pi$.

4.16) $\int\limits_L ydx + \sqrt{9 - y^2}\,dy + xydz$, $x = \cos t$, $y = 3\sin t$, $z = t$, где $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

4.17) $\int\limits_L \frac{dy - dx}{z} - zdz$, $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$, где $0 \le t \le \pi$.

4.18) $\int\limits_L \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + ydy - xydz$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$, где $0 \le t \le \pi$.

4.19) $\int\limits_L xdy - ydx + \sqrt{x^2 + y^2}\,dz$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, где $0 \le t \le 2\pi$.

4.20) $\int\limits_L xdy - ydx - \sqrt{x^2 + y^2}\,dz$, $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, где $0 \le t \le \pi$.

4.21) $\int\limits_L x^2dx + y^2dy + z^2dz$, $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 3t$, где $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

4.22) $\int\limits_L (y - z)dx - zxdy + xydz$, $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, где $0 \le t \le 1$.

4.23) $\int\limits_L (2 - y)dx - (1 - y)dy + zdz$, $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = t$,
где $0 \le t \le 2\pi$.

4.24) $\int\limits_L xdx + ydy - zdz$, $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$, где $0 \le t \le \pi$.

4.25) $\int\limits_L \sqrt[3]{y}dy - \sqrt[3]{x}dx + zdz$, $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = t$, где $0 \le t \le \pi$.

5. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где L — контур треугольника с вершинами $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, пробегаемый против хода часовой стрелки, двумя способами: непосредственным подсчетом, используя определение криволинейного интеграла, и с помощью формулы Грина.

5.1) $\oint\limits_L 3xy^2dx + 2xydy$, $A(2,1)$, $B(2,3)$, $C(4,4)$.

5.2) $\oint\limits_L \left(x - y^2\right)dx + \left(x^2 - y\right)dy$, $A(1,1)$, $B(1,4)$, $C(5,4)$.

5.3) $\oint\limits_L 2\left(x^2 - y^2\right)dx + \left(x - y\right)^2 dy$, $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(4,0)$.

5.4) $\oint\limits_L \left(x^2 - y^2\right)dx + xy^2dy$, $A(0,2)$, $B(3,5)$, $C(3,0)$.

5.5) $\oint\limits_L \left(x - y\right)^2 dx + \left(x + y\right)^2 dy$, $A(-1,0)$, $B(3,2)$, $C(3,4)$.

5.6) $\oint\limits_L xy^2dy - x^2y^2dx$, $A(-1,0)$, $B(-1,4)$, $C(1,3)$.

5.7) $\oint\limits_L \left(3xy - y^2\right)dx - \left(x^2 + y\right)dy$, $A(-3,0)$, $B(0,-2)$, $C(0,3)$.

5.8) $\oint\limits_L \left(2x^2y + y\right)dx + \left(3x^2y + 3\right)dy$, $A(0,-2)$, $B(3,2)$, $C(0,2)$.

5.9) $\oint\limits_L \left(2x + 3y^2\right)dx - \left(3 - 2x^2\right)dy$, $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$.

5.10) $\oint\limits_L \left(x^2 - 5y\right)dx + \left(x^2y + 2\right)dy$, $A(0,1)$, $B(0,4)$, $C(4,0)$.

5.11) $\oint\limits_L \left(3xy + 2\right)dx + \left(xy^2 + 1\right)dy$, $A(1,-1)$, $B(3,0)$, $C(1,3)$.

5.12) $\oint\limits_L (2-3xy)dx - x^2ydy$, $A(0,-2)$, $B(3,0)$, $C(3,3)$.

5.13) $\oint\limits_L (x+y)^2 dx - \left(x^2+y^2\right)dy$, $A(-2,-2)$, $B(1,1)$, $C(-2,2)$.

5.14) $\oint\limits_L \left(y^2-x^2\right)dx + (y-x)^2 dy$, $A(2,2)$, $B(2,5)$, $C(-1,-1)$.

5.15) $\oint\limits_L xy^3dx + x^3ydy$, $A(0,0)$, $B(3,3)$, $C(0,4)$.

5.16) $\oint\limits_L \left(2xy^2-y\right)dx + \left(x+x^2y\right)dy$, $A(0,3)$, $B(3,0)$, $C(3,4)$.

5.17) $\oint\limits_L \left(y^2-3xy^2\right)dx + \left(2xy+x^2\right)dy$, $A(1,2)$, $B(3,0)$, $C(3,4)$.

5.18) $\oint\limits_L \left(y^3x-y\right)dx + \left(2x^2y^2-x\right)dy$, $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(4,0)$.

5.19) $\oint\limits_L \left(y^3x-y\right)dx + \left(2x^2y^2-x\right)dy$, $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(4,0)$.

5.20) $\oint\limits_L \left(xy-y^2x\right)dx + \left(x^2y+x\right)dy$, $A(0,-1)$, $B(2,1)$, $C(2,3)$.

5.21) $\oint\limits_L \left(y^2-2xy\right)dx + \left(x^2+4xy\right)dy$, $A(-3,1)$, $B(-3,-3)$, $C(0,0)$.

5.22) $\oint\limits_L \left(2-y^2\right)dx + \left(2+x^2\right)dy$, $A(1,0)$, $B(-2,3)$, $C(-2,-2)$.

5.23) $\oint\limits_L \left(y-xy^2\right)dx + \left(x+x^2y\right)dy$, $A(-3,2)$, $B(-2,0)$, $C(-2,3)$.

5.24) $\oint\limits_L \left(xy^2-2y\right)dx - \left(x^2y-2x\right)dy$, $A(0,4)$, $B(2,0)$, $C(2,5)$.

5.25) $\oint\limits_L \left(y-x^2y^2\right)dx + \left(x^2y^2+x\right)dy$, $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(0,4)$.

6. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, убедившись, что он не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2).

6.1) $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} \left(3x^2-3y\right)dx+\left(3y^2-3x\right)dy.$

6.2) $\int\limits_{(1,1)}^{(2,0)} \left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy.$

6.3) $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} \left(x+y\right)dx+\left(x-y\right)dy.$

6.4) $\int\limits_{(0,0)}^{(2,3)} \left(x^3-3xy^2+2\right)dx-\left(3x^2y-y^2\right)dy.$

6.5) $\int\limits_{(1,0)}^{(5,3)} \left(x^2-xy^2+2\right)dx-\left(x^2y-y^2\right)dy.$

6.6) $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx+xdy.$

6.7) $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,0)} \left(3x^2+1+xy^2\right)dx+\left(x^2y+4y^3\right)dy.$

6.8) $\int\limits_{(2,2)}^{(1,8)} \left(3+x^2+3xy^2\right)dx+\left(3x^2y+4+y^2\right)dy.$

6.9) $\int\limits_{(1,2)}^{(1,0)} \left(6xy+y\right)dx+\left(3x^2+x+y\right)dy.$

6.10) $\int\limits_{(2,0)}^{(1,1)}\left(4x^2+4y+2\right)dx+\left(4y^2+4x+2\right)dy.$

6.11) $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx+ydy.$

6.12) $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)dx-(x-y)dy.$

6.13) $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy.$

6.14) $\int\limits_{(3,0)}^{(2,1)}\left(x^2-2y\right)dx+\left(1+y^2-2x\right)dy.$

6.15) $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

6.16) $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy.$

6.17) $\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x}{(x-y)^2}dy-\frac{y}{(x-y)^2}dx.$

6.18) $\int\limits_{(2,-1)}^{(1,0)}\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy.$

6.19) $\int\limits_{(1,1)}^{(1,3)}\left(2x-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y+\frac{1}{x}\right)dy.$

6.20) $\int\limits_{(2,1)}^{(1,0)}\left(x^3+xy-y^2\right)dx+\left(\frac{x^2}{2}-2xy-y^3\right)dy.$

6.21) $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)dx + (x+y)dy.$

6.22) $\int\limits_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy.$

6.23) $\int\limits_{(-2,-1)}^{(1,7)} \left(x+6y-y^2\right)dx + (6x-2xy)dy.$

6.24) $\int\limits_{(7,0)}^{(10,10)} (x+y)dx + (x-y)dy.$

6.25) $\int\limits_{(1,1)}^{(2,8)} \left(x^2-xy^2\right)dx - \left(x^2y+y\right)dy.$

7. Найдите первообразную функцию $F(x,y)$ по ее полному дифференциалу.

7.1) $dF = \left(\frac{1}{y} + ye^{xy}\right)dx + \left(xe^{xy} - \frac{x}{y^2}\right)dy.$

7.2) $dF = (12x+5y-9)dx + (5x+2y-4)dy.$

7.3) $dF = \left(3xy^2 - x^2\right)dx + \left(3y^2 + 3x^2y + 1\right)dy.$

7.4) $dF = (\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy.$

7.5) $dF = \left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy.$

7.6) $dF = \left(4xy + 3y^2 + 3x^2\right)dx + \left(2x^2 + 6xy\right)dy.$

7.7) $dF = \left(\ln x + y^3\right)dy + \frac{y}{x}dx.$

7.8) $dF = (10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy.$

7.9) $dF = \left(y + \dfrac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \dfrac{3}{y^2}\right)dy.$

7.10) $dF = (3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)dy.$

7.11) $dF = (2x - ye^{-x})dx + e^{-x}dy.$

7.12) $dF = 2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy.$

7.13) $dF = \left(\sin y - y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y + \cos x - \dfrac{1}{y}\right)dy.$

7.14) $dF = \dfrac{3x^2 + y}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3}dy.$

7.15) $dF = (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy.$

7.16) $dF = (e^{x+y} + \cos(x - y))dx + (e^{x+y} - \cos(x - y))dy.$

7.17) $dF = (1 - e^{x-y} + \cos x)dx + (e^{x-y} + \cos y)dy.$

7.18) $dF = (2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy.$

7.19) $dF = (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy.$

7.20) $dF = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}dy.$

7.21) $dF = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy.$

7.22) $dF = e^y dx + (xe^y - 2y)dy.$

7.23) $dF = \left(2x - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(y + \dfrac{1}{x}\right)dy.$

7.24) $dF=\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6xy^2+4y^3\right)dy.$

7.25) $dF=\left(15x^2-y\right)dx-\left(15y^4+x\right)dy.$

8. В задачах 1–15 вычислите массу дуги кривой $y=y(x)$, где $a\le x\le b$, если ее плотность в каждой точке равна $\mu(x,y)$. В задачах 16–25 вычислите площадь части цилиндрической поверхности, заключенной между плоскостью Oxy и указанной поверхностью.

8.1) $y=\ln\left(x+1\right),\ a=0,\ b=2,\ \mu\left(x,y\right)=\left(x+1\right)^2.$

8.2) $y=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right),\ a=0,\ b=1,\ \mu\left(x,y\right)=\dfrac{1}{y^2}.$

8.3) $y=\ln\left(1-x^2\right),\ a=0,\ b=\dfrac{1}{2},\ \mu\left(x,y\right)=x^2.$

8.4) $y=x^2,\ a=1,\ b=2,\ \mu\left(x,y\right)=\dfrac{y}{x}.$

8.5) $y=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1},\ a=1,\ b=2,\ \mu\left(x,y\right)=e^x.$

8.6) $y=\dfrac{x^3}{3},\ a=0,\ b=1,\ \mu\left(x,y\right)=3y.$

8.7) $y=e^x,\ a=0,\ b=2,\ \mu\left(x,y\right)=y^2.$

8.8) $y=2\ln\left(\dfrac{4}{4-x^2}\right),\ a=0,\ b=1,\ \mu\left(x,y\right)=x.$

8.9) $y=\ln\cos x,\ a=0,\ b=\dfrac{\pi}{3},\ \mu\left(x,y\right)=\sin x.$

8.10) $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x,\ a=1,\ b=e,\ \mu\left(x,y\right)=\dfrac{1}{x^2}.$

8.11) $y=x\sqrt{x},\ a=0,\ b=1,\ \mu\left(x,y\right)=x.$

8.12) $y=\ln\sin x$, $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $\mu(x,y)=\cos x$.

8.13) $y=\ln\left(x^2-1\right)$, $a=3$, $b=5$, $\mu(x,y)=2x$.

8.14) $y=\frac{x^2}{2}-1$, $a=0$, $b=\sqrt{2}$, $\mu(x,y)=\frac{y+1}{x}$.

8.15) $y=(x+1)^{\frac{3}{2}}$, $a=0$, $b=4$, $\mu(x,y)=x$.

8.16) $x^2+y^2=4$, $z=4-y^2$.

8.17) $x^2+y^2=9$, $6z=xy$.

8.18) $x^2+y^2=25$, $z=x^2$.

8.19) $x^2+y^2=16$, $z=\frac{1}{8}xy$.

8.20) $x^2+y^2=4$, $x+y+z=10$.

8.21) $x^2+y^2=9$, $z=y^2$.

8.22) $x^2+y^2=\frac{16}{9}$, $8z=3xy$.

8.23) $x^2+y^2=1$, $z-x-y=8$.

8.24) $x^2+y^2=4$, $z=2x^2+y^2$.

8.25) $x^2+y^2=9$, $z=9-x^2$.

2. Решение типового варианта

Если кривая L задана непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x)$, где $a \le x \le b$, то $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx.$

1. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, где L — отрезок прямой, заключенный между точками $A(0,0)$ и $B(2,2)$.

Решение: 1) Напишем уравнение прямой (AB). Напомним, что канонические уравнения прямой на плоскости имеют вид: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$.

То есть (AB) прямая задается уравнением $\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{2-0}$ или $x = y$. Таким образом, $dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx = \sqrt{2}dx$, так как $y'(x) = (x)' = 1$.

2) Вычислим данный криволинейный интеграл вдоль отрезка $[AB]$, учитывая, что $y = x,\ dl = \sqrt{2}dx,\ 0 \le x \le 2.$

$$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}} = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{8-2x^2}} = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{2}\sqrt{4-x^2}} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}} = \int\limits_0^2 \frac{2d\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}} =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Если кривая L задана непрерывно дифференцируемой функцией $x = x(y)$, где $c \le y \le d$, то $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_c^d f\left(x(y), y\right)\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy.$

2. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2 + xy + \sqrt{y})dl$, где L — отрезок прямой, заключенный между точками $A(2,0)$ и $B(2,3)$.

Решение: 1) Напишем уравнение прямой (AB). Напомним, что канонические уравнения прямой на плоскости имеют вид: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$.

То есть прямая (AB) задается уравнением $\dfrac{x-2}{2-2}=\dfrac{y-0}{3-0}$ или $x=2$. Таким образом, $dl=\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy=dy$, так как $x'(y)=(2)'=0$.

2) Вычислим данный криволинейный интеграл вдоль отрезка $[AB]$, учитывая, что $x=2$, $dl=dy$, $0\le y\le 3$.

$$\int_L (x^2+xy+\sqrt{y})dl=\int_0^3 (4+2y+\sqrt{y})dy=\left(4y+y^2+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=12+9+\frac{2}{3}\sqrt{27}=21+2\sqrt{3}.$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $a\le t\le b$, то $\int_L f(x,y)dl=\int_a^b f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$

3. Вычислите криволинейный интеграл $\int_L \dfrac{dl}{x^2+y^2+1}$, где L — дуга кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=3\left(\cos t+t\sin t\right)$, $y=3\left(\sin t-t\cos t\right)$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение: 1) Вычислим $x'(t)$ и $x'(t)$. Очевидно, что

$$x'(t)=\left(3\left(\cos t+t\sin t\right)\right)'=3\left(-\sin t+\sin t+t\cos t\right)=3t\cos t,$$

$$y'(t)=\left(3\left(\sin t-t\cos t\right)\right)'=3\left(\cos t-\cos t+t\sin t\right)=3t\sin t.$$

Таким образом,

$$dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=\sqrt{\left(3t\cos t\right)^2+\left(3t\sin t\right)^2}\,dt=\sqrt{9t^2\cos^2 t+9t^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\sqrt{9t^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt=3tdt.$$

При этом заметим, что подынтегральная функция будет иметь вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}=\frac{1}{\left(3\left(\cos t+t\sin t\right)\right)^2+\left(3\left(\sin t-t\cos t\right)\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{9\left(\cos^2 t+2t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t\right)+9\left(\sin^2 t-2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t\right)+1}=$$

$$=\frac{1}{9\cos^2 t+18t\cos t\sin t+9t^2\sin^2 t+9\sin^2 t-18t\sin t\cos t+9t^2\cos^2 t+1}=$$

$$=\frac{1}{9\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)+9t^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+1}=\frac{1}{10+9t^2}.$$

2) Вычислим данный криволинейный интеграл вдоль дуги кривой L, учитывая, что $dl=3tdt$, $f(x,y)=\dfrac{1}{10+9t^2}$, $0\le t\le 2\pi$.

$$\int_L \frac{dl}{x^2+y^2+1}=\int_0^{2\pi}\frac{3tdt}{10+9t^2}=\left[d\left(10+9t^2\right)=18tdt\right]=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\frac{18tdt}{10+9t^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\frac{d\left(10+9t^2\right)}{10+9t^2}=\left(\frac{1}{6}\ln\left|10+9t^2\right|\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{6}\left(\ln\left|10+36\pi^2\right|-\ln|10|\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{10+36\pi^2}{10}\right)=\frac{1}{6}\ln\left(1+3{,}6\pi^2\right).$$

Если кривая L задана в полярных координатах $\left(x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi\right)$ уравнением $r=r(\varphi)$, где $a\le\varphi\le b$, то

$$\int_L f(x,y)dl=\int_a^b f\left(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+\left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L |y|dl$, где кривая L — лемниската Бернулли $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Решение. 1) Построим кривую интегрирования L, заданную уравнением $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$, по точкам в полярной системе координат. Поскольку левая часть уравнения кривой L неотрицательна, так как $r\ge 0$, то область изменения угла φ найдем из неравенства $\sqrt{\cos 2\varphi}\ge 0$, которое выполняется для всех φ, удовлетворяющих неравенству $\cos 2\varphi\ge 0$. А значит, $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\le 2\varphi\le\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ или $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Учитывая, что $\varphi\in[0;2\pi]$, получаем: $-\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{5\pi}{4}$. Построим по точкам кривую L, для этого составим таблицу точек $M_i=(r;\varphi)$, где $i=\overline{1,10}$.

№ точек	φ	2φ	$\cos 2\varphi$	$r=\sqrt{\cos 2\varphi}$
M_1	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	0
M_2	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	0,50	0,71
M_3	0	0	1	1
M_4	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	0,50	0,71
M_5	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	0
M_6	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	0
M_7	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	0,50	0,71
M_8	π	2π	1	1
M_9	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	0,50	0,71
M_{10}	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	0	0

Для построения кривой L проводим из полюса O лучи, соответствующие выбранным значениям φ, и на каждом луче откладываем вычисленные значения полярного радиуса r. Полученные точки M_i (где $i=\overline{1,10}$) соединяем плавной кривой (при этом, точки M_1, M_5, M_6, M_{10} совпадают с полюсом O). Кривая L, изображенная на рис. 1, называется *лемнискатой Бернулли*.

Заметим, что, учитывая свойства четности и периодичности функции $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$, достаточно было провести построение точек, соответствующих значениям $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. Затем можно полностью достроить кривую L, предполагая ее симметричность относительно прямой, содержащей полярную ось, и то, что часть кривой, попавшей в сектор $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, совпадает с частью кривой, попавшей в соседний сектор, при повороте вокруг полюса на угол π.

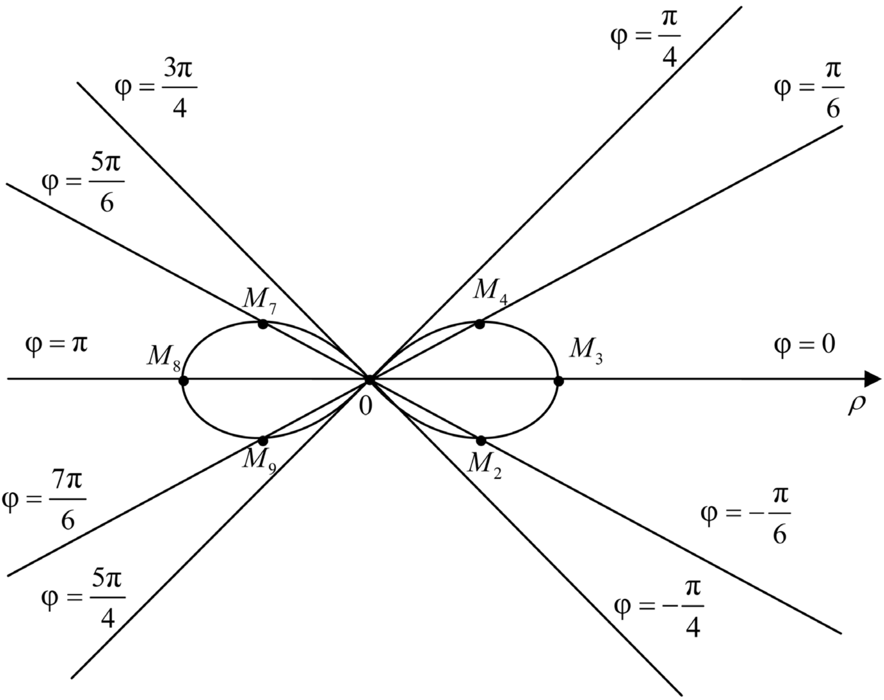

Рис. 1

2) Напомним, что если кривая L задана в полярных координатах $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ уравнением $r = r(\varphi)$, где $a \le \varphi \le b$, то имеет место формула:

$$\int\limits_L f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f\big(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\big)\sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2 + \big(r'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi.$$

Так как $r(\varphi) = \sqrt{\cos 2\varphi}$, то

$$r'(\varphi) = -\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

$$dl = \sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2 + \big(r'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi = \sqrt{\cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Кроме того, $f(x, y) = |y| = |r\sin\varphi| = r|\sin\varphi|$, так как $r \ge 0$.

3) Вычислим данный криволинейный интеграл, с учетом свойства аддитивности:

$$\int\limits_L |y|\,dl=\int\limits_L r|\sin\varphi|\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\int\limits_L\sqrt{\cos 2\varphi}\,|\sin\varphi|\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\int\limits_L|\sin\varphi|\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{OM_2M_3}|\sin\varphi|\,d\varphi+\int\limits_{OM_4M_3}|\sin\varphi|\,d\varphi+\int\limits_{OM_7M_8}|\sin\varphi|\,d\varphi+\int\limits_{OM_9M_8}|\sin\varphi|\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-\sin\varphi)\,d\varphi+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi+\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi+\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}(-\sin\varphi)\,d\varphi=4-2\sqrt{2}.$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, где $a\le t\le b$, то

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_a^b (P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+$$

$$+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t))dt.$$

5. Вычислите $\int\limits_L\left(x^2+y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy+zdz$, где L — часть кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=\cos t$, $y=3\sin t$, $z=\dfrac{t}{2\pi}$ $(0\le t\le 2\pi)$

Решение: 1) Вычислим $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$. Очевидно, что $x'(t)=(\cos t)'=-\sin t$, $y'(t)=(3\sin t)'=3\cos t$, $z'(t)=\left(\dfrac{t}{2\pi}\right)'=\dfrac{1}{2\pi}$.

2) Вычислим данный криволинейный интеграл вдоль дуги кривой L:

$$\int\limits_L\left(x^2+y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy+zdz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(\cos^2 t+3\sin t\right)(-\sin t)+\left(9\sin^2 t-\cos t\right)(3\cos t)+\frac{t}{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-\cos^2 t\sin t-3\sin^2 t+27\sin^2 t\cos t-3\cos^2 t+\frac{t}{(2\pi)^2}\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\cos^2 t\sin t+27\sin^2 t\cos t-3+\frac{t}{(2\pi)^2}\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2 t(-\sin t)dt+27\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t dt-3\int_0^{2\pi}dt+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}tdt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2 t(-\sin t)dt+27\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t dt-3\int_0^{2\pi}dt+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}tdt=$$

$$\begin{bmatrix} d(\cos t)=(-\sin t)dt \\ d(\sin t)=\cos t dt \end{bmatrix}=\int_0^{2\pi}\cos^2 t d(\cos t)+27\int_0^{2\pi}\sin^2 t d(\sin t)-3\int_0^{2\pi}dt+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}tdt=$$

$$=\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{2\pi}+\left.\frac{27\sin^3 t}{3}\right|_0^{2\pi}-3t\Big|_0^{2\pi}+\left.\frac{t^2}{2(2\pi)^2}\right|_0^{2\pi}=0,5-6\pi.$$

6. Вычислите криволинейный интеграл $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+3(x+y)^2dy$, где L — контур треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, пробегаемый против хода часовой стрелки, двумя способами: непосредственным подсчетом, используя определение криволинейного интеграла, и с помощью формулы Грина.

Решение методом непосредственного подсчета:

1) Напишем уравнения сторон треугольника ABC, изображенного на рис. 2, как прямых на плоскости, проходящих через две точки. Напишем уравнение прямой (AB). Учитывая, что канонические уравнения этой прямой на плоскости имеют вид: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$, получаем, что прямая (AB) задается уравнением $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-1}{2-1}$ или $x=y$. Напишем уравнение прямой (BC). Учитывая, что канонические уравнения данной прямой на плоскости имеют вид: $\dfrac{x-x_B}{x_C-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_C-y_B}$, получаем, что прямая (BC) задается уравнением $\dfrac{x-2}{1-2}=\dfrac{y-2}{3-2}$ или $y=4-x$. Наконец, канонические уравнения прямой (CA) на плоскости имеют вид: $\dfrac{x-x_C}{x_A-x_C}=\dfrac{y-y_C}{y_A-y_C}$. Получаем, что прямая (CA) задается уравнением $\dfrac{x-1}{1-1}=\dfrac{y-3}{1-3}$ или $x=1$.

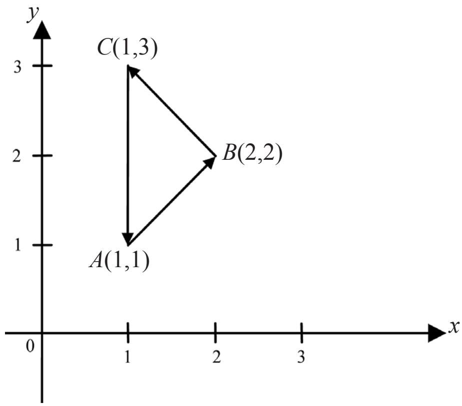

Рис. 2

2) Вычислим криволинейный интеграл $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+3\left(x+y\right)^2dy$.

По свойству аддитивности криволинейного интеграла имеем:

$$\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+3\left(x+y\right)^2dy=$$

$$=\oint\limits_{[AB]} 2\left(x^2+y^2\right)dx+3\left(x+y\right)^2dy+$$

$$+\oint\limits_{[BC]} 2\left(x^2+y^2\right)dx+3\left(x+y\right)^2dy+$$

$$+\oint\limits_{[CA]} 2\left(x^2+y^2\right)dx+3\left(x+y\right)^2dy.$$

2.1) $\left[AB\right]$: $y=x,\ 1\le x\le 2,$ то есть $dy=dx$. Таким образом,

$$\oint\limits_{[AB]} 2\left(x^2+y^2\right)dx+3\left(x+y\right)^2 dy=\int\limits_1^2 2\left(x^2+x^2\right)dx+3\left(x+x\right)^2 dx=$$

$$=16\int\limits_1^2 x^2dx=\frac{16x^3}{3}\Bigg|_1^2=\frac{112}{3}.$$

2.2) $\left[BC\right]$: $y=4-x,\ 2\ge x\ge 1,$ то есть $dy=-dx$. Таким образом,

$$\oint\limits_{[BC]} 2\left(x^2+y^2\right)dx+3\left(x+y\right)^2dy=\int\limits_2^1 2\left(x^2+\left(4-x\right)^2\right)dx+3\left(x+4-x\right)^2\left(-dx\right)=$$

$$=4\int\limits_2^1\left(x^2-4x-4\right)dx=4\left(\frac{x^3}{3}-2x^2-4x\right)\Bigg|_2^1=\frac{92}{3}.$$

2.3) $\left[CA\right]$: $x=1,\ 3\ge y\ge 1$, то есть $dx=0$. Таким образом,

$$\oint\limits_{[CA]} 2\left(x^2+y^2\right)dx+3\left(x+y\right)^2dy=3\int\limits_3^1\left(1+y\right)^2dy=3\int\limits_3^1\left(1+y\right)^2 d\left(1+y\right)=$$

$$=\left(1+y\right)^3\Big|_3^1=-56.$$

Окончательно, получаем $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+3\left(x+y\right)^2dy=\frac{112}{3}+\frac{92}{3}-56=12.$

Решение с помощью формулы Грина:

Напомним, что если L — замкнутый контур, ограничивающий конечную односвязную область D (т.е. без «дыр»), пробегаемый так, что область D остается слева, и функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в данной области и на ее границе, то имеет место *формула Грина*:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Указанная формула справедлива также и для конечной области D, ограниченной несколькими контурами, если под границей данной области понимать объединение всех граничных контуров, направление обхода которых выбирается так, что область D остается слева.

В нашем случае, $P(x, y) = 2\left(x^2 + y^2\right)$, $Q(x, y) = 3(x + y)^2$. Значит, $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6(x + y)$. Применяя формулу Грина, получаем:

$$\oint_L 2\left(x^2 + y^2\right)dx + 3(x + y)^2 dy = \iint_D (6x + 6y - 4y)dxdy = 2\iint_D (3x + y)dxdy,$$

где областью D является треугольник ABC.

Перейдем от двойного интеграла к повторному, где пределы интегрирования внутреннего интеграла зависят от переменной, по которой берется внешний интеграл. Переменная x в области D находится в пределах от $x=1$ до $x=2$. Для того, чтобы получить пределы интегрирования по y, необходимо провести произвольный луч, параллельный оси Oy и пересекающий область D. В этом случае точка входа луча в область есть нижний предел интегрирования по $y: y_{\text{вх}}=x$, а точка выхода луча из области — верхний предел интегрирования по $y: y_{\text{вых}}=4-x$ (рис. 3). Следовательно, получаем

$$\iint_D (3x + y)dxdy = \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (3x + y)dy = \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (3x + y)d(3x + y) =$$

$$= \int_1^2 \left. \frac{(3x + y)^2}{2} \right|_x^{4-x} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left((2x + 4)^2 - 16x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 4\left(-3x^2 + 4x + 4\right)dx =$$

$$= 2\left.\left(-x^3 + 2x^2 + 4x\right)\right|_1^2 = 6.$$

Таким образом, $\oint_L 2\left(x^2 + y^2\right)dx + 3(x + y)^2 dy = 2\iint_D (3x + y)dxdy = 2 \cdot 6 = 12.$

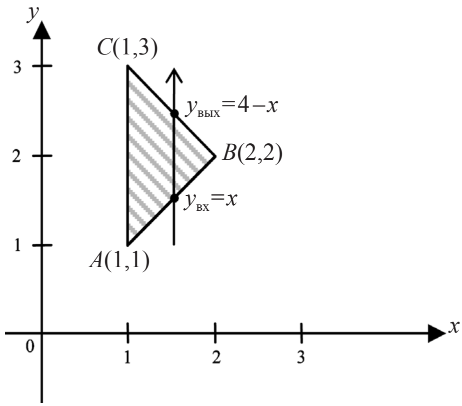

Рис. 3

Напомним, что если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ и в односвязной области D (т.е. без «дыр»), и на ее границе, то следующие утверждения равносильны:

1) существует функция $F(x,y)$, полный дифференциал которой имеет вид

$dF(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$;

2) в каждой точке области тождественно выполняется условие: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$;

3) $\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, где L — замкнутая кривая, целиком лежащая в области D;

4) криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования AB, а зависит только от координат точек A и B из области D, в связи с чем данный интеграл обозначается символом

$$\int\limits_A^B P(x,y)dx+Q(x,y)dy \text{ или } \int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Заметим, что условие 2) называется условием *Грина*.

7. Вычислите $\displaystyle\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$, убедившись, что данный криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки $(1,\pi)$ и $(2,\pi)$.

Решение:

1) Проверим выполнение условия Грина. В нашем случае, $P(x,y)=1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}$, $Q(x,y)=\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}$. Значит,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y}{x^2}\left(\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}-2\cos\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{y}{x^2}\left(\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}-2\cos\frac{y}{x}\right).$$

Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y}{x^2}\left(\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}-2\cos\frac{y}{x}\right)$, и, значит, криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки $A(1,\pi)$ и $B(2,\pi)$. Для вычисления данного интеграла в качестве пути интегрирования возьмем простейший, то есть отрезок, соединяющий указанные точки (рис. 4).

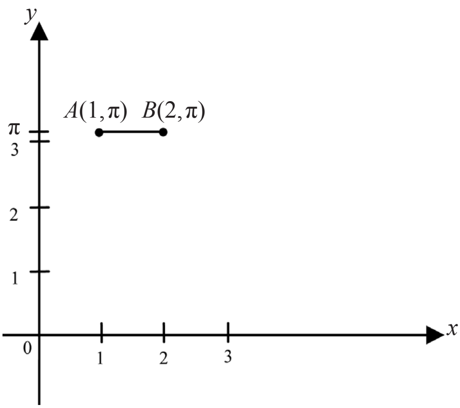

Рис. 4

2) Напишем уравнение прямой (AB). Учитывая, что канонические уравнения этой прямой на плоскости имеют вид: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$, получаем, что прямая (AB) задается уравнением $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-\pi}{\pi-\pi}$ или $y=\pi$.

3) Вычислим криволинейный интеграл $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+$ $+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy.$

Итак, $[AB]$: $y=\pi,\ 1\le x\le 2$, то есть $dy=0$. Таким образом,

$$\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy=\int\limits_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx=\int\limits_1^2 dx+$$

$$+\pi\int\limits_1^2\cos\frac{\pi}{x}\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)dx=\left[d\left(\frac{\pi}{x}\right)=-\frac{\pi}{x^2}dx\right]=x\Big|_1^2+\pi\int\limits_1^2\cos\frac{\pi}{x}d\left(\frac{\pi}{x}\right)=1+\pi\sin\frac{\pi}{x}\Big|_1^2=1+\pi.$$

8. Найдите первообразную функцию $F(x,y)$ по ее полному дифференциалу $dF=e^{-y}dx+\left(1-xe^{-y}\right)dy$.

Решение:

1) Проверим выполнение условия Грина. В нашем случае, $P(x,y)=e^{-y}$, $Q(x,y)=1-xe^{-y}$. Значит, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\right)=-e^{-y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(1-xe^{-y}\right)=-e^{-y}$.

Таким образом, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-e^{-y}$. Следовательно, действительно существует функция $F(x,y)$, полный дифференциал которой имеет вид

$$dF=e^{-y}dx+\left(1-xe^{-y}\right)dy.$$

Такую функцию можно найти, используя формулу

$$F(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(\chi,y_0)d\chi+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,\xi)d\xi+C,\text{ где } C\in\mathbb{R}.$$

В качестве начальной точки (x_0,y_0) берут произвольную точку, принадлежащую пересечению областей определения функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ (обычно, если это возможно, берут точку (0,0)).

2) Найдем функцию $F(x,y)$. Положим, что $(x_0,y_0)=(0,0)$. Тогда,

$$F(x,y)=\int\limits_0^x P(\chi,0)d\chi+\int\limits_0^y Q(x,\xi)d\xi+C=\int\limits_0^x e^0 d\chi+\int\limits_0^y\left(1-xe^{-\xi}\right)d\xi+C=$$

$$=\int\limits_0^x d\chi+\int\limits_0^y d\xi+x\int\limits_0^y e^{-\xi}d(-\xi)+C=\chi\Big|_0^x+\varepsilon\Big|_0^y+xe^{-\xi}\Big|_0^y+C=$$

$$=x+y+xe^{-y}-x+C=y+xe^{-y}+C.$$

Итак, $F(x,y)=y+xe^{-y}+C$.

Если дуга L кривой с плотностью, равной $\mu=\mu(x,y)$, задана непрерывно дифференцируемой функцией $y=y(x)$, где $a\le x\le b$, то ее масса вычисляется по формуле

$$M(L)=\int\limits_L \mu(x,y)dl=\int\limits_a^b \mu(x,y(x))\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx.$$

9. Вычислите массу дуги кривой $y=\ln(x+2)$, где $-1\le x\le 0$, если ее плотность в каждой точке равна $\mu(x,y)=(x+2)^2$.

Решение:

1) Так как дуга кривой задается уравнением $y=\ln(x+2)$, то

$$dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{(x+2)^2}}dx=\sqrt{\frac{1+(x+2)^2}{(x+2)^2}}dx=\frac{\sqrt{1+(x+2)^2}}{x+2}dx,$$

так как $y'(x)=\left(\ln(x+2)\right)'=\dfrac{1}{x+2}$ и $-1\le x\le 0$.

2) Вычислим массу дуги кривой L, учитывая, что $\mu\left(x, y(x)\right)=(x+2)^2$, $dl=\dfrac{\sqrt{1+(x+2)^2}}{x+2}dx,\ -1\leq x\leq 0.$

$$M(L)=\int_{-1}^{0}(x+2)^2\frac{\sqrt{1+(x+2)^2}}{x+2}dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+(x+2)^2}\,(x+2)dx=$$

$$=\left[d\left(1+(x+2)^2\right)=2(x+2)dx\right]=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{1+(x+2)^2}\,d\left(1+(x+2)^2\right)=$$

$$\left.\frac{\left(1+(x+2)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{-1}^{0}=\frac{(1+4)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.$$

Если функция $z=f(x,y)$ положительна во всех точках плоской дуги кривой L, лежащей в плоскости Oxy, то площадь S части цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz и проходящими через точки дуги кривой L, ограниченной снизу указанной дугой, сверху — линией пересечения цилиндрической поверхности с поверхностью $z=f(x,y)$, а с боков — прямыми, проходящими через концы дуги кривой L параллельно оси Oz, вычисляется по формуле

$$S=\int_L f(x,y)dl.$$

Если функция $z=f(x,y)$ отрицательна во всех точках плоской дуги кривой L, то $-S=\int_L f(x,y)dl$. И, наконец, если в некоторых точках плоской дуги кривой L функция $z=f(x,y)$ меняет знак, то интеграл $\int_L f(x,y)dl$ выражает разность площадей частей описанной цилиндрической поверхности, находящихся над плоскостью Oxy и под ней.

10. Вычислите площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=4$, заключенной между плоскостью Oxy и поверхностью $z=2+\dfrac{x^2}{2}$.

Решение:

Площадь S части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=4$, заключенной между плоскостью Oxy и поверхностью $z=2+\dfrac{x^2}{2}$, изображенной на рис. 5, вычисляется по формуле

$$S=\int_L\left(2+\frac{x^2}{2}\right)dl,$$

где L — окружность в плоскости Oxy, заданная уравнениями $x^2+y^2=4$, $z=0$. В параметрическом виде уравнения этой окружности будут иметь вид $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, где $0\le t\le 2\pi$. В этом случае, учитывая, что $x'(t)=(2\cos t)'=-2\sin t$, $y'(t)=(2\sin t)'=2\cos t$, получаем:

$$dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=\sqrt{\left(-2\sin t\right)^2+\left(2\cos t\right)^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=2dt.$$

Подынтегральная функция будет иметь вид:

$$f\left(x,y\right)=2+\frac{x^2}{2}=2+\frac{\left(2\cos t\right)^2}{2}=2+2\cos^2 t.$$

Таким образом,

$$S=\int\limits_L\left(2+\frac{x^2}{2}\right)dl=2\int\limits_0^{2\pi}\left(2+2\cos^2 t\right)dt=4\int\limits_0^{2\pi}dt+4\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=$$

$$=4t\Big|_0^{2\pi}+4\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=8\pi+2\int\limits_0^{2\pi}dt+2\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t\,dt=$$

$$=8\pi+2t\Big|_0^{2\pi}+\int\limits_0^{2\pi}\cos 2t\,d\left(2t\right)=8\pi+4\pi+\sin 2t\Big|_0^{2\pi}=12\pi.$$

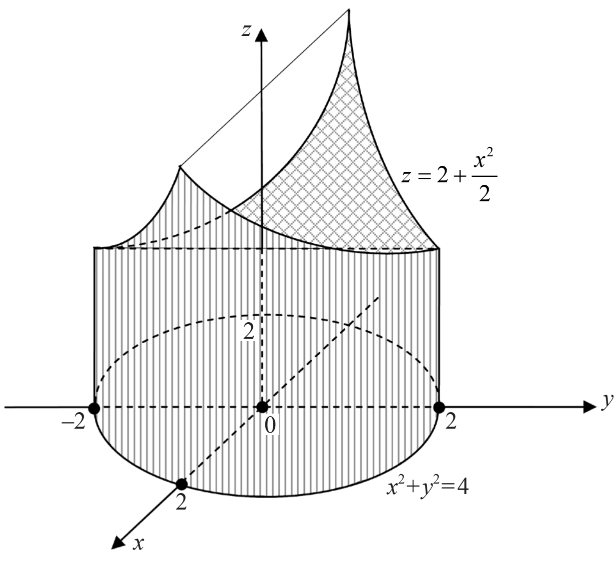

Рис. 5

Список рекомендуемой литературы

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — СПб.: Профессия, 2004.

2. *Данко П.Е. и др.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Оникс, Мир и образование, 2008.

3. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: АСТ, Астрель, 2007.

4. *Кудрявцев Л.Д. и др.* Сборник задач по математическому анализу. Т. 3. — М.: Физматлит, 2003.

5. *Лунгу К.Н. и др.* Сборник задач по высшей математике. 2 курс. — М.: Айрис Пресс, 2006.

6. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. — М.: Наука, 1976.

7. *Рябушко А.П. и др.* Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. — Минск: Вышэйшая школа, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Для заметок

Внутривузовское издание

Подписано в печать 26.12. 2014. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16 Бумага офсетная
Объем 2,5 усл. печ. л
Тираж 30 экз. Заказ № 211 Продаже не подлежит

Отпечатано в УПП «Репрография» МИИГАиК