Министерство науки
и высшего образования
Российской Федерации

**Московский
государственный
университет геодезии
и картографии
(МИИГАиК)**

Н.Г. Бабаева, Е.Г. Маркарян

Математика

методические указания по выполнению
контрольной работы № 2 по направлениям подготовки
21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»
и 21.03.02 «Землеустройство и кадастры»
заочная форма обучения

МОСКВА 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет геодезии и картографии» (МИИГАиК)

Н.Г. Бабаева, Е.Г. Маркарян

Математика

методические указания по выполнению контрольной работы № 2
«Дифференциальное исчисление функций одной переменной»
по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия»
по направлениям подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»
и 21.03.02 «Землеустройство и кадастры»
заочная форма обучения

МИИГАиК
Москва
2025

УДК 51
ББК 22.1
Б12

Рецензенты:
д-р пед. наук, доцент **М.В. Литвиненко** (МИИГАиК)
канд. физ.-мат. наук, **Е.С. Крупицын** (МГПУ)

Бабаева, Нахида Гасан кызы
Б12 Математика / Н.Г. Бабаева, Е.Г. Маркарян : методические указания по выполнению контрольной работы № 2 «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия», по направлениям подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» и 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», заочная форма обучения. — Москва : МИИГАиК, 2023. — 17 с.

В пособии изложены методические указания по выполнению контрольной работы № 2 «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» для студентов заочной формы обучения, по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия», по направлениям подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» и 21.03.02 «Землеустройство и кадастры».

УДК 51
ББК 22.1

Электронное учебное издание
Бабаева Нахида Гасан кызы, Маркарян Елена Георгиевна
Математика

Публикуется в авторской редакции

Рассмотрено и одобрено на заседании
Редакционно-издательского совета МИИГАиК
2023 г.

Электронная версия учебно-методического пособия размещена
на сайте МИИГАиК www.miigaik.ru

© МИИГАиК, 2023
© Н.Г. Бабаева, Е.Г. Маркарян, 2023

Содержание

1 Требования к знаниям и умениям **4**

2 Условие допуска к защите **5**

3 Методические указания по выполнению контрольной работы **6**

4 Методические указания по оформлению контрольной работы **7**

5 Задания для контрольной работы № 2 «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» **8**

Задачи 1–10 ..... **8**
Задачи 11–20 ..... **9**
Задачи 21–30 ..... **9**
Задачи 31–40 ..... **9**
Задачи 41–50 ..... **10**
Задачи 51–60 ..... **10**

6 Вопросы для самоконтроля по теме **11**

7 Демонстрационный вариант контрольной работы № 2 ..... **12**

Задача 1 ..... **12**
Задача 2 ..... **13**
Задача 3 ..... **13**
Задача 4 ..... **14**
Задача 5 ..... **14**
Задача 6 ..... **15**

8 Литература **17**

1 Требования к знаниям и умениям

По учебному плану для студентов 1 курса заочной формы обучения по направлениям подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование и по специальности 21.05.01 Прикладная геодезия предусматривается выполнение четырех контрольных работ, из которых работа № 2 — это «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» по курсу «Математика».

По результатам самостоятельной учебно-познавательной деятельности в ходе выполнения контрольной работы студент должен:

- *Знать:* теоретические сведения по всем вопросам математики, которые рассматриваются в контрольной работе № 2. С этой целью необходимо изучить следующие разделы математики: производная и ее геометрический смысл; таблица производных; основные теоремы о дифференцировании; производные и дифференциал высших порядков; исследование функций с помощью производных, используя в частности литературу, указанную в п. [8]. Полезно также ознакомиться с вопросами для самоконтроля п.[6] и ответить на них.
- *Уметь:* решать задачи, относящиеся к разделам математики контрольной работы № 2. С этой целью полезно разобрать решение задач демонстрационного варианта п.[7].

2 Условие допуска к защите

По результатам проверки студент может получить следующие оценки:

1. Работа допущена к защите.
2. Работа допущена к защите с исправлениями.
3. Работа не допущена к защите.

В таблице приводятся действия студента, получившего ту или иную оценку своей работы:

1.	**Работа допущена к защите**	Студент приносит распечатанную или отсканированную работу на экзамен.
2.	**Работа допущена к защите с исправлениями**	Сделав исправления в работе по указанию преподавателя, студент не присылает повторно работу на проверку, а приносит ее в период сессии в распечатанном виде для последующей проверки преподавателем.
3.	**Работа не допущена к защите**	Сделав исправления в работе по указанию преподавателя, студент присылает работу на проверку повторно до тех пор, пока работа не будет допущена к защите без исправлений или с незначительными исправлениями.

3 Методические указания по выполнению контрольной работы

В каждой контрольной работе студент решает все те задачи, номера которых оканчиваются на ту же цифру, на которую оканчивается номер учебного шифра. Например, если номер шифра оканчивается на 5, то студент должен решить задачи 5, 15, 25 и т.д.

При выполнении контрольной работы студент должен изложить подробное решение всех задач своего варианта, желательно, в той же последовательности, как они приводятся в задании. Содержание решения задачи должно включать условие задачи, пошаговый ход решения, при необходимости, демонстрационный чертеж.

Работы должны быть представлены не менее, чем за 2 недели до начала сессии.

4 Методические указания по оформлению контрольной работы

Каждая работа выполняется в отдельном файле «от руки» с последующим сканированием и сохранением в PDF. Чертежи к работе также выполняются от руки.

Работы в других форматах к проверке не допускаются.

5 Задания для контрольной работы № 2 «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

ЗАДАЧИ 1–10

В задачах № 1–10 для каждой из заданных функций найдите производную и вычислите значение производной в точке x_0.

1.

а) $y = (x^3 - e^{3x})^2$, $x_0 = 0$

б) $y = \frac{\sin(x+2)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x_0 = -2$

в) $y = (2x-1)^{x^2+2x-2}$, $x_0 = 1$

2.

а) $y = \left(\sin\frac{\pi}{x} + \cos\frac{\pi}{x}\right)^3$, $x_0 = 1$

б) $y = \cos(x^2 + x) \cdot e^{-2x}$, $x_0 = 0$

в) $y = (x^2 + x - 1)^{x^2+1}$, $x_0 = 1$

3.

а) $y = (e^{\cos x} + x)^2$, $x_0 = 0$

б) $y = \cos\pi x \cdot \sqrt{x^2+3}$, $x_0 = 1$

в) $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^{\arcsin x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$

4.

а) $y = (x^2 + \cos x)^3$, $x_0 = \pi$

б) $y = e^{3(x-1)} \cdot \sqrt{8 + x^2}$, $x_0 = 1$

в) $y = x^{tg\,(x-e)}$, $x_0 = e$

5.

а) $y = (\sin x + x^3)^4$, $x_0 = \pi$

б) $y = 2^{\frac{1}{x}} \cdot tg(x+1)$, $x_0 = -1$

в) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos(x-e)}$, $x_0 = e$

6.

а) $y = \ln^2(x+e)$, $x_0 = 0$

б) $y = 3^{\sin x} \cdot \sqrt{x^2 + \pi^2}$, $x_0 = \pi$

в) $y = (\ln x)^{x+1}$, $x_0 = e$

7.

а) $y = (\cos 2x + x)^4$, $x_0 = 0$

б) $y = e^{x-1} \cdot arctg x^2$, $x_0 = 1$

в) $y = x^{\sin^2 x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

8.

а) $y = \left(e^{x^2} + \sin(x-1)\right)^2$, $x_0 = 1$

б) $y = \ln(2x-3) \cdot \cos 3(x-2)$, $x_0 = 2$

в) $y = x^{arctg\,x}$, $x_0 = 1$

9.

а) $y = \sin(3x + x + 1)^5$, $x_0 = 0$

б) $y = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sin(1 - x)$, $x_0 = 1$

в) $y = x^{x^2+x}$, $x_0 = 1$

10.

а) $y = (e^x + tg\,\pi x)^3$, $x_0 = 1$

б) $y = \ln x \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} + \sin \pi x\right)$, $x_0 = 1$

в) $y = (\ln x)^{x^3}$, $x_0 = e$

ЗАДАЧИ 11–20

В задачах № 11 – 20 найдите производную $\frac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции.

11. $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = t + \ln t \\ y = (t+1)^2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = arctg\, t \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = t^2 e^{-2t} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \ln\frac{t}{2} \\ y = \frac{t^2}{2} + 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = e^{3t} + 2 \\ y = t^3 e^{3t} \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$

ЗАДАЧИ 21–30

В задачах № 21–30 найдите производную y'_x неявно заданной функции.

21. $\mathrm{tg}(x^2 + y) + e^{xy} - x = 0$
22. $\sin(y - x^2) + y^3 x - 1 = 0$
23. $x^2 + xy - e^{xy} = 0$
24. $\sin(2x + y) - y^2 x + 2 = 0$
25. $(x + y)\, e^x - \ln y = 0$
26. $\mathrm{ctg}(x + y) + yx^2 = 0$
27. $e^x + e^y - x^3 y^2 = 0$
28. $\cos(x^2 + y) - y^2 + x^2 = 0$
29. $(x + y)^2 - e^x + y^2 = 0$
30. $\ln(x^2 + y) + y^3 - x = 0$

ЗАДАЧИ 31–40

В задачах № 31–40 найдите дифференциал первого порядка для функции $y = f(x)$ в точке x_0.

31. $y = x^2 \ln 2x$, $x_0 = 1$
32. $y = 2^{\sin x}$, $x_0 = 0$
33. $y = \ln(1 + x^2)$, $x_0 = 1$
34. $y = \cos^3 x$, $x_0 = \pi/4$
35. $y = \sin^3 x$, $x_0 = \pi/6$
36. $y = x^2 e^x$, $x_0 = 1$
37. $y = \ln(\sqrt{x} - 1)$, $x_0 = 4$
38. $y = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$, $x_0 = 1$
39. $y = e^{x^2 - 1}$, $x_0 = -1$
40. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x}$, $x_0 = 1$

ЗАДАЧИ 41–50

В задачах № 41–50 вычислите пределы функций с применением правила Лопиталя.

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$

44. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{arctg\,5x}$

47. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-tg\,x}$

49. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\sin x}{x+\sin x}$

ЗАДАЧИ 51–60

В задачах № 51–60 проведите полное исследование функции методами дифференциального исчисления и начертите ее график.

51. $y=\ln(e^{-x}+1)$

52. $y=(x+1)e^{-x}$

53. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$

54. $y=(x-1)e^{1-x}$

55. $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$

56. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$

57. $y=x^2e^{-x}$

58. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

59. $y=xe^{-x^2}$

60. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

6 Вопросы для самоконтроля по теме

«Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

1. Определение производной функции $y = f(x)$ и её геометрический смысл.
2. Таблица производных.
3. Правила дифференцирования суммы, произведения и отношения функций.
4. Метод логарифмического дифференцирования и его применение.
5. Дифференцирование сложной функции.
6. Дифференцирование неявно заданной функции и функции, заданной параметрически.
7. Производные высших порядков.
8. Дифференциалы первого и высших порядков.
9. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей $0/0$; ∞/∞ ; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 1^{∞} ; 0^0 ; ∞^0.
10. Определение возрастающей и убывающей функций. Признаки монотонности.
11. Точки экстремума. Необходимый и достаточный признаки экстремума.
12. Задача о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции.
13. Уравнения касательной и нормали.
14. Исследование функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.
15. Асимптоты и их отыскание.
16. Применение дифференциального исчисления к исследованию функции.
17. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

7 Демонстрационный вариант контрольной работы № 2

ЗАДАЧА 1

Для каждой из заданных функций найдите производную и вычислите ее значение в точке x_0.

а) $y = \dfrac{2^x}{\cos x + x^2}$, $x_0 = 0$;

б) $y = \ln(2x - x^3) \cdot e^{x^2}$, $x_0 = 1$;

в) $y = (\sin 4x)^{x^2+2x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

Решение

а) $y = \dfrac{2^x}{\cos x + x^2}$, $x_0 = 0$.

Используя таблицу производных и правила дифференцирования, получим

$$y' = \frac{(2^x)'(\cos x + x^2) - 2^x(\cos x + x^2)'}{(\cos x + x^2)^2} = \frac{2^x \ln 2(\cos x + x^2) - 2^x(-\sin x + 2x)}{(\cos x + x^2)^2}$$

Вычислим $y(x_0)$. С этой целью подставим $x_0 = 0$ в выражение y':

б) $y = \ln(2x - x^3) \cdot e^{x^2}$, $x_0 = 1$.

Используя правила дифференцирования произведения функций и сложной функции, получим

$$y' = (\ln(2x - x^3))' e^{x^2} + \ln(2x - x^3)\left(e^{x^2}\right)' = \frac{1}{2x - x^3}(2 - 3x^2) \cdot e^{x^2} + \ln(2x - x^3)e^{x^2} \cdot 2x.$$

Вычислим $y'(x_0)$. С этой целью подставили $x_0 = 1$ в выражение y':

$y'(1) = -e + 2\ln 1 \cdot e = -e$.

в) $y = (\sin 4x)^{x^2+2x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

При дифференцировании функций степенно-показательного вида $y = U(x)^{v(x)}$, где $U(x) > 0$, применяется прием логарифмического дифференцирования.

С этой целью равенство $y = U(x)^{v(x)}$ логарифмируют:

$\ln y = \ln U(x)^{v(x)} = v(x) \ln U(x)$.

После чего обе части равенства дифференцируют по x

$$(\ln y)' = (v(x) \ln U(x))' \Rightarrow \frac{y'}{y} = (v(x) \ln U(x))' \Rightarrow y' = y \cdot (v(x) \ln U(x))'.$$

Применим этот прием к заданной функции.

$\ln y = \ln(\sin 4x)^{x^2+2x} = (x^2+2x)\ln(\sin 4x)$

$\frac{y'}{y} = ((x^2+2x)'\ln\sin 4x) + (x^2+2x)(\ln(\sin 4x))'$

Тогда

$y' = y\left[(2x+2)\ln\sin 4x + (x^2+2x)\cdot\frac{\cos 4x}{\sin 4x}\cdot 4\right] = (\sin 4x)^{x^2+2x}\left((2x+2)\ln\sin 4x + 4(x^2+2x)ctg\ 4x\right).$

Вычислим $y'\left(\frac{\pi}{8}\right)$. С этой целью подставим $x = \frac{\pi}{8}$ в выражение $y'(x)$.

Так как $\sin 4\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{4\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\ln\sin\frac{\pi}{2} = 0$,

то в результате подстановки $x_0 = \frac{\pi}{8}$ в выражение $y'(x)$, получим $y'(\frac{\pi}{8}) = 0$.

ЗАДАЧА 2

Найдите $\frac{dy}{dx}$ параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = arctg\ t \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$$

Решение

Система уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \alpha < t < \beta \end{cases}$,

где $x(t)$ и $y(t)$ — дифференцируемые функции и при этом $x'(t) \neq 0$, определяет однозначную функцию $y(x)$, производная которой вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

Применяя формулу к заданной функции, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln(1+t^2))'_t}{(arctg\ t)'_t} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t.$$

ЗАДАЧА 3

Найдите производную y'_x от неявно заданной функции $y(x)$ в виде уравнения $e^{x^2} + e^{y^2} - 3^{xy} - 1 = 0$.

Решение

Пусть уравнение $F(x,y) = 0$ определяет неявно заданную функцию $y(x)$, предполагаемую дифференцируемой.

Дифференцируя по x уравнение $F(x,y)=0$, получим уравнение первой степени относительно y'. Из этого уравнения находится $y'(x)$. Продифференцируем по x заданное уравнение, рассматривая y как функцию от x.

$$\left(e^{x^2}\right)' + \left(e^{y^2}\right)' - (3^{xy})' = 0\,.$$

Так как $\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2}(x^2)' = e^{x^2}\cdot 2x$, $\left(e^{y^2}\right)' = e^{y^2}(y^2)'_x = e^{y^2}\cdot 2y\cdot y'$,
$(3^{xy})' = 3^{xy}\cdot \ln 3\cdot (xy)' = 3^{xy}\ln 3\,(y+xy')$,
то получим:
$2xe^{x^2} + 2yy'e^{y^2} - y\cdot 3^{xy}\ln 3 - xy'3^{xy}\cdot \ln 3 = 0$.
Из этого уравнения находим y':
$y'\left(2ye^{y^2} - x3^{xy}\ln 3\right) = y\,3^{xy}\ln 3 - 2xe^{x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{y\,3^{xy}\ln 3 - 2xe^{x^2}}{2ye^{y^2} - x3^{xy}\ln 3}$.

Отметим, что y' существует для всех значений x и y, при которых знаменатель дроби не обращается в нуль.

ЗАДАЧА 4

Найдите дифференциал первого порядка для функции $y = e^{x^3-x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение

Дифференциал первого порядка вычисляется по формуле $dy = f'(x)dx$.
Следовательно, если $y = e^{x^3-x}$, то $y' = e^{x^3-x}(3x^2-1)$ и $dy = e^{x^3-x}(3x^2-1)dx$.
В точке $x=1$ $dy = f'(1)dx = 2dx$.

ЗАДАЧА 5

Вычислите пределы с применением правила Лопиталя.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)}\,.$$

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x-1) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1}\ln(e^x-e) = -\infty$,

имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x-1))'}{(\ln(e^x-e))'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{e^x-e}{e^x} = \frac{1}{e}\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}\,.$$

В полученном пределе числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x\to 1$. Применим вторично правило Лопиталя, а именно

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(e^x-e)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}e^x=e\,.$$

Следовательно, исходный предел равен 1.

ЗАДАЧА 6

Исследовать функцию $y = x^2\,e^{1/x}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Решение

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности.

Схема исследования функции:

1. *Найти область определения функции.*
2. *Найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности.*
3. *Исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность.*
4. *Найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.*
5. *Найти асимптоты графика функции.*
6. *Найти интервалы возрастания и убывания функции. Определить ее экстремумы.*
7. *Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, а также точки перегиба.*
8. *По результатам исследования построить график.*

1. Функция определена при любом действительном значении аргумента за исключением $x = 0$. Следовательно, область определения данной функции состоит из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.
2. $x = 0$ — точка разрыва функции, функция непрерывна на интервалах $(-\infty;0)$ и $(0; +\infty)$.
3. Функция не является ни четной, ни нечетной, функция непериодическая.
4. $y \neq 0$, т.е. график функции не имеет точек пересечения с осями координат.
5. Прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота, т.к.

$$\lim_{x\to 0-0} x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0+0} x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты вида $y = kx + b$.
С этой целью вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$.
Если этот предел существует, то он равен k, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{\frac{1}{x}}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{\frac{1}{x}}=\infty$,
то график функции не имеет наклонных асимптот.

6. Найдем y':

$$y' = \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)' = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}(2x-1).$$

$y' = 0$ при $x = \frac{1}{2}$. Точка $x = \frac{1}{2}$ — критическая точка.

При $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, $y' < 0$ и функция убывает.

При $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ $y' > 0$ и функция возрастает.

Точка $x = \frac{1}{2}$ — точка минимума.

$$y_{min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4} \approx 1{,}8\,.$$

7. Найдем y'',

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (2x-1) + e^{\frac{1}{x}} \cdot 2 = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2},$$

$$y'' \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in D(f)$$

y'' на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ — положительна и график функции вогнутый при $x \in D(f)$.

8. Построим график функции, используя результаты исследования.

8 Литература

1. Д. Письменный Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М.: Айрис – Пресс, 2011 и все издания.
2. П.Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. М.: АСТ. Оникс 2009г. и все издания.
3. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Интеграл-пресс 2010 и все издания.
4. К.Н. Лунгу. Сборник задач по высшей математике 1 часть, М., Айрис-Пресс, 2017 г.