Федеральное агентство по образованию РФ
Московский государственный университет геодезии и картографии
(МИИГАиК)

А.А. Кудлаев

Экономико-математические методы и моделирование
Поиск оптимальных решений

Учебно-методическое пособие по курсу «Экономико-математические методы и моделирование»

Москва 2007 г.

Составитель: к.т.н., Кудлаев А.А.

Поиск оптимальных решений. Учебно-методическое пособие по курсу «Экономико-математические методы и моделирование». М., МИИГАиК, 2007, 56 стр.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с утвержденной программой курса «Экономико-математические методы и моделирование» для студентов вечернего факультета специальности земельный кадастр, рекомендовано кафедрой вычислительной техники и автоматизированной обработки аэрокосмической информации.

В учебно-методическом пособии рассмотрены вопросы моделирования процессов оптимального планирования. Пособие содержит примеры и практические задания для реализации в среде MS EXCEL.

Библиография: 9 названий.

Рецензенты:

Член-корр. Международной Академии информатизации, доцент Института технологий, экономики и предпринимательства МЭИ, к.т.н. Макальский Л.М.

к.э.н., доцент кафедры «Финансов и банковского дела» Донецкого национального технического университета Устинова Л.Н.

к.т.н., доцент кафедры «ВТиАОАИ» МИИГАиК Зайцев А.А.

ОГЛАВЛЕНИЕ:

1. Моделирование как метод познания

Нельзя найти такой области знания, в которой в той или иной мере не использовались бы модели. Человек часто применял в практической деятельности метод аналогий.

Слово *модель* произошло от латинского слова *modelium,* которое означает *образ*. Его первоначальное значение было связано со строительным искусством, и употреблялось для обозначения образа или прообраза.

Под моделью объекта понимается другой объект, отличный от исходного, который обладает существенными для целей моделирования свойствами, и в рамках этих целей полностью заменяет исходный объект. Модель используется при разработке теории объекта в том случае, когда непосредственное исследование его не представляется возможным.

Выделяют такие признаки модели:

- это воображаемая или материально реализуемая система;
- она воспроизводит объект исследования;
- модель должна быть не только сходна с оригиналом, но и отлична от него, причем модель отражает те свойства оригинала, которые существенны;
- она способна замещать объекты;
- ее изучение дает новую информацию об объекте;
- модель обязательно имеет целевое назначение.

Часто термин *модель* употребляется как синоним термина *теория* в случае, когда теория еще недостаточно разработана, для обозначения предварительного варианта будущей теории.

Моделирование есть не только процесс построения модели, но и ее исследования. В отличие от обычного эксперимента, где средства эксперимента взаимодействуют с объектом исследования, в модельном эксперименте взаимодействия нет, так как экспериментируют не с самим объектом, а с его заместителем.

Для модельного эксперимента характерны следующие операции:

- переход от натурального объекта к модели построение модели;
- экспериментальное исследование модели;
- переход от модели к натуральному объекту, состоящий в перенесении результатов, полученных при исследовании, на этот объект.

Модель входит в эксперимент, не только замещая объект исследования, но и может замещать условия, в которых изучается объект натурного эксперимента.

Типы моделей

Существуют различные классификационные признаки, по которым выделяют различные *типы моделей*:

- способ построения (форма модели);
- качественная специфика (содержание модели).

По способу построения модели бывают *материальные и идеальные*.

Материальные модели подразделяются на:

1. *Физически подобные* (они сходны с оригиналом по физической природе и геометрической форме, отличаясь от него лишь числовыми значениями параметров - действующая модель электродвигателя);

2. *Пространственно-подобные* (макеты самолетов, судов);

3. *Математически подобные* (не имеют с оригиналом ни физического, ни геометрического сходства, но объект и модель описываются одинаковыми уравнениями - механические и электрические колебания).

Виды *абстрактных (идеальных) моделей:*

1. *Вербальные (текстовые).* Эти модели используют последовательности предложений на формализованных диалектах естественного языка для описания той или иной области действительности.

2. *Математические* — очень широкий класс знаковых моделей, широко использующих те или иные математические методы. Математические модели позволяют описывать, воспроизводить, изучать и прогнозировать процессы и явления с помощью математических и вычислительных средств. Математическое моделирование позволяет имитировать в принципе невоспроизводимые или нежелательные ситуации (прогноз погоды, последствия ядерной войны).

3. *Информационные* — класс знаковых моделей, описывающих информационные процессы (возникновение, передачу, преобразование и использование информации). Любое моделирование, отличное от натурного моделирования, можно отнести к информационному.

Граница между вербальными, математическими и информационными моделями проведена весьма условно; возможно, информационные модели следовало бы считать подклассом математических моделей.

Основные этапы компьютерного моделирования

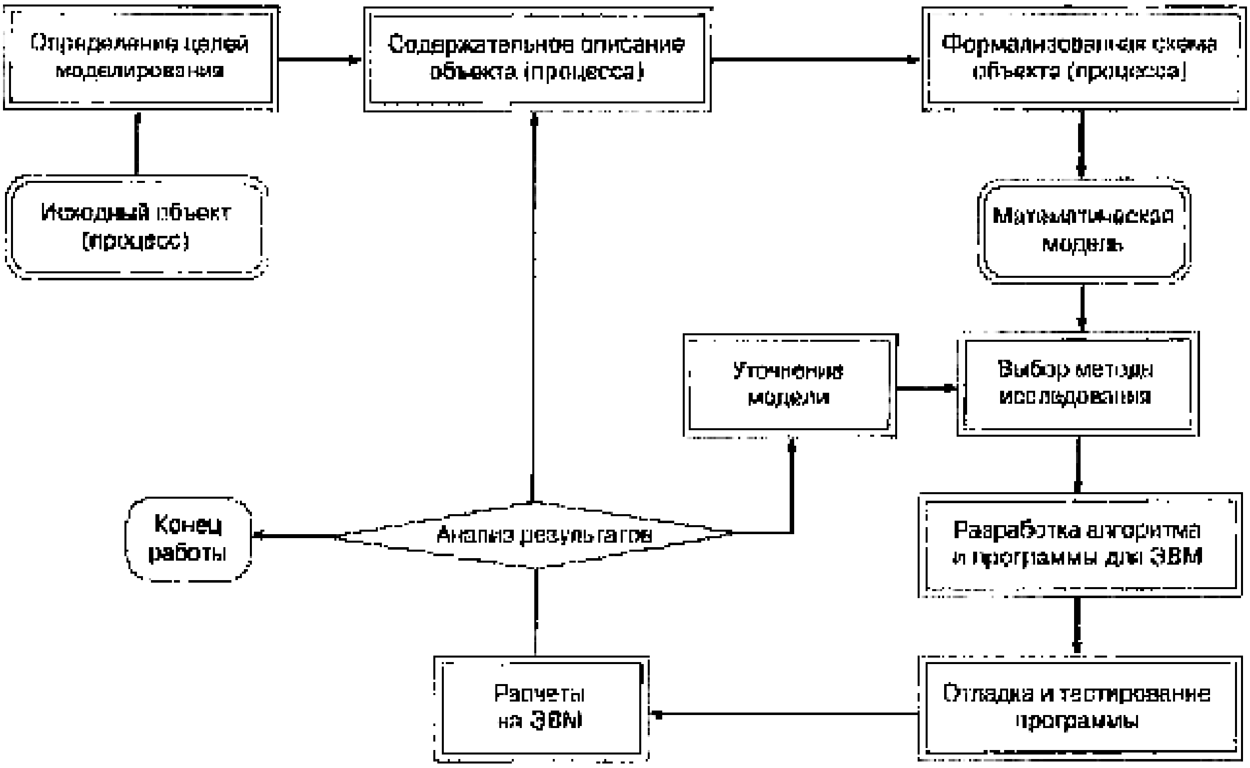
Первый этап — *определение целей моделирования*. Основные из них:

1) модель нужна для того, чтобы понять, как устроен конкретный объект, какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром;

2) модель нужна для того, чтобы научиться управлять объектом и определить наилучшие способы управления при заданных критериях;

3) модель нужна для того, чтобы прогнозировать последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

После этого переходят к *формализации* объекта (процесса), результатом которой и будет *математическая модель*.



Содержательное описание в словесной форме содержит:

- сведения о физической природе исследуемого процесса;
- сведения о количественных характеристиках элементарных явлений исследуемого процесса;
- сведения о месте и значении каждого элементарного явления в общем процессе функционирования системы;
- постановку прикладной задачи, определяющую цели моделирования исследуемого процесса.

Содержательное описание процесса служит основой для дальнейшей формализации этого процесса построения формализованной схемы и математической модели процесса.

Формализованная схема является промежуточным звеном между содержательным описанием и математической моделью. На этапе построения формализованной схемы должна быть сформулирована цель исследования, составлен список величин, от которых зависит поведение объекта или ход процесса, а также искомых величин и оцениваемых зависимостей.

Важнейшим этапом моделирования является разделение входных параметров (*ранжирование)* по степени важности влияния их изменений на выходные. От этого зависит успех моделирования, быстрота и эффективность достижения цели. Отбрасывание менее значимых факторов огрубляет объект моделирования и способствует пониманию его главных свойств и закономерностей.

На этапе перехода от формализованной схемы к математической модели необходимо перейти от абстрактной формулировки модели к формулировке, имеющей конкретное математическое наполнение: в виде уравнения, системы уравнений и т.д.

Последним этапом формализации является *идентификация модели* — определение параметров и структуры модели, обеспечивающей наилучшее совпадение исходных данных объекта и данных, полученных на модели объекта. Можно считать, что модель адекватна реальному процессу, если некоторые характеристики процесса совпадают с экспериментальными с заданной степенью точности.

Требование адекватности модели изучаемому объекту (процессу) предполагает:

- правильное качественное описание объекта;
- правильное количественное описание объекта.

Для достижения адекватности модели процессу необходимо осуществлять контроль:

- размерностей;
- порядков;
- характера зависимостей;
- экстремальных ситуаций;
- граничных условий;
- математической замкнутости.

Когда математическая модель сформулирована и выполнена ее идентификация, выбирается *метод исследования модели*.

Следующий этап - этап разработки алгоритма и программы на ЭВМ. Достаточно распространенным подходом к программированию остается *структурный подход*, основными приемами которого являются модульность, разработка алгоритма "сверху вниз" с дальнейшей пошаговой детализацией. Другим подходом является *объектно-ориентированное программирование*. В некоторых случаях расчеты удобно провести, используя *готовые программные продукты*, например, электронные таблицы или специальные математические пакеты.

После *составления программы* с ее помощью решается тестовая задача с целью *отладки и тестирования программы*, устранения грубых ошибок. Затем следует собственно *численный эксперимент*.

В случае несоответствия модели реальному процессу происходит возврат к одному из предыдущих этапов. Возможные точки возврата указаны на схеме:

- либо в процессе огрубления были отброшены какие-то важные факторы или же было взято слишком много незначительных факторов и требуется уточнить математическую модель;
- либо выбор метода исследования оказался не слишком удачным и нужно использовать более сложный и точный.

После внесения тех или иных изменений вновь проходим по части технологической цепочки и делаем это до тех пор, пока не будут получены приемлемые результаты.

По окончании компьютерного эксперимента с математической моделью накопленные результаты (чаще всего численные) обрабатываются и интерпретируются.

Назначение и виды информационных моделей

Можно классифицировать модели *по отраслям наук*: математические модели в физике, биологии, социологии и т.д.

Можно положить в основу классификации применяемый *математический аппарат*, это естественно для математика, более интересующегося аппаратом математического моделирования.

Цели моделирования:

- дескриптивные (описательные) модели;
- оптимизационные модели;
- многокритериальные модели;
- игровые модели;
- имитационные модели.

Моделируя движение кометы, вторгшейся в Солнечную систему, исследователь описывает (предсказывает) траекторию ее полета, расстояние, на котором она пройдет от Земли, и т.д., т.е. ставит чисто *описательные цели.* В этой ситуации нет никаких возможностей повлиять на движение кометы, что-то изменить.

На уровне других процессов можно воздействовать на них, пытаясь добиться какой-то цели. В этом случае в модель входит один или несколько параметров, доступных влиянию. Например, меняя тепловой режим в зернохранилище, можно стремиться подобрать такой, чтобы достичь максимальной сохранности зерна, т.е. *оптимизировать процесс.*

Часто приходится оптимизировать процесс по нескольким параметрам сразу, причем цели могут быть весьма противоречивыми. Например, зная цены на продукты и потребность человека в пище, организовать питание больших групп людей (в армии, летнем лагере и др.) как можно полезнее и как можно дешевле. Ясно, что эти цели, вообще говоря, совсем не совпадают, т.е. при моделировании будет *несколько критериев,* между которыми нужно искать баланс.

Игровые модели могут иметь отношение не только к детским играм, но и к вещам весьма серьезным. В математике есть специальный раздел "Теория игр", где изучаются методы принятия решений в условиях неполной информации.

Иногда модель подражает реальному процессу, т.е. *имитирует* его. Например, моделируя изменение (динамику) численности микроорганизмов в колонии, можно рассматривать много отдельных объектов и следить за судьбой каждого из них, ставя определенные условия для его выживания, размножения и т.д. Если при этом не ставится целью вмешательство и регулирование численности колонии, то отличие имитационной модели от дескриптивной достаточно условно.

Классификация экономико-математических моделей

Экономико-математические модели можно классифицировать по ряду признаков, относящихся к особенностям моделируемого объекта:

1. *Макроэкономические модели* рассматривают экономику как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели: ВНП, потребление, инвестиции, занятость и т.д.
2. *Микроэкономические модели* описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики либо поведение одной такой составляющей в рыночной среде. Вследствие разнообразия типов экономических элементов и форм их взаимодействия на рынке микроэкономическое моделирование занимает основную часть экономико-математической теории.
3. *Равновесные модели* описывают такие состояния экономики, когда результирующая всех сил, стремящаяся вывести ее из данного состояния, равна нулю.
4. *Оптимизационные модели* присутствуют в основном на микроуровне: максимизация прибыли, минимизация затрат.
5. *Статические модели* описывают некоторый объект в определенный (фиксированный) момент времени.
6. *Динамические модели* включают взаимосвязи переменных во времени.
7. *Детерминированные модели* предполагают жесткие функциональные связи между переменными модели.
8. *Стохастические модели* допускают случайные воздействия на исследуемые показатели и используют инструментарий теории вероятностей и математической статистики.
9. *Эконометрические модели* строятся на основе изучения и анализа эмпирических данных.

2. Оптимизационные модели

Основные идеи линейного программирования возникли во время второй мировой войны в связи с поиском оптимальных стратегий при ведении военных операций. С тех пор они нашли широкое применение в промышленности, торговле и управлении. Этими методами можно решить многие задачи, связанные с эффективным использованием ограниченных ресурсов.

Постановка задачи оптимизации

В задачах оптимизации требуется найти значения параметров или функций, реализующих максимум или минимум некоторой зависящей от них величины. Во многих инженерных и экономических задачах ищется максимум меры выполнения или минимум стоимости. Другим приложением задач оптимизации является получение приближенных решений выбором неизвестных значений параметров или функций, дающих минимум ошибки.

Математически эти задачи относятся к задачам на условный экстремум. Постановка таких задач в общем виде выглядит следующим образом:

- найти условный максимум(минимум) функции $f(x_1 x_2 \ldots x_n) \to \max(\min)$;
- при условии, что независимые переменные удовлетворяют системам ограничений:

$$g_1(x_1 x_2 \ldots x_n) \le 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_m(x_1 x_2 \ldots x_n) \le 0$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

В задаче математического программирования функцию $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ называют целевой функцией; систему неравенств $G(x_1 x_2 \ldots x_n)$ – специальными ограничениями задачи математического программирования. Задачи линейного программирования – частный случай задачи математического программирования, в которых целевая функция и ограничения линейные.

Задача об оптимизации использования ресурсов

Фирма производит две модели A и B книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели A требуется 3 $м^2$ досок, а для изделия модели B – 4 $м^2$. Фирма может получить до 1700 $м^2$ досок в неделю. Для каждого изделия модели A требуется 12 минут машинного времени, а для изделия модели B – 30 минут. В неделю можно использовать 160 часов машинного времени.

Сколько изделий каждой модели следует фирме выпускать в неделю, если каждое изделие модели A приносит 2 рубля прибыли, а каждое изделие модели B – 4 рубля прибыли?

Чтобы сформулировать эту задачу математически, обозначим через x_1 количество выпущенных полок модели A, а через x_2 – количество выпущенных полок модели B. Задача состоит в том, чтобы найти наилучшие значения x_1 и x_2. Очевидно, наилучшими для данной задачи являются такие значения, которые максимизируют еженедельную прибыль. Еженедельная прибыль

$$P = 2x_1 + 4x_2 \tag{2.1}$$

Согласно классической теории оптимизации функция принимает экстремальные значения в точках, в которых обращаются в нуль ее производные, либо на границе области определения. Рассмотрения производных в нашем случае недостаточно, так как

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2 \text{ и } \frac{\partial P}{\partial x_2} = 4$$

и никаким выбором x_1 и x_2 нельзя обратить эти производные в нуль. Действительно, чтобы увеличить функцию P, надо увеличить x_1 и x_2. Но значение x_1 и x_2 не могут быть увеличены неограниченно. Эти значения ограничены, в частности, лимитами на сырье и машинное время.

Поскольку x_1 и x_2 выражают еженедельный объем выпускаемых изделий, то они не могут быть отрицательны, т.е.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{2.2}$$

Теперь ограничения на наличие досок и машинное время могут быть записаны следующим образом:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700 \text{ (для досок)} \tag{2.3}$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600 \text{ (для машинного времени)}$$

Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти значения x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям неотрицательности (2.2) и ограничениям типа неравенства (3) и максимизирующие функцию $P = 2x_1 + 4x_2$.

Это типичная двухмерная задача линейного программирования. Целевая функция, которая должна быть максимизирована, является *линейной функцией* своих переменных. Ограничения на эти переменные тоже линейны (представлены на рисунке). Условия неотрицательности позволяют ограничиться рассмотрением положительного квадранта. Границы определяются прямыми:

$$3x_1 + 4x_2 = 1700,$$

$$2x_1 + 5x_2 = 1600.$$

Стрелка на каждой границе рис. 2.1 указывает, с какой стороны прямой выполняется ограничения. Заштрихованная область 0ABC, содержащая точки, для которых соблюдены условия (2.2) и (2.3), называется допустимой. Точки внутри и на границе этой области изображают допустимые решения. Задача состоит в том, чтобы найти решение, максимизирующее функцию P.

Штриховыми линиями на рисунке изображены прямые $2x_1 + 4x_2 = 0$, $2x_1 + 4x_2 = 800$, обозначенные a и b соответственно. Эти прямые параллельны и представляют собой уровни функции P со значениями соответственно 0 и 800. Ясно, что значения функции P возрастает по мере того, как линии уровня удаляются от начала координат в положительном квадранте. Действительно, вектор с компонентами $\frac{\partial P}{\partial x_1}$, $\frac{\partial P}{\partial x_2}$, т.е. вектор с компонентами $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ указывает направление возрастания функции P, перпендикулярен штриховым линиям и направлен в сторону, противоположную началу координат.

Линией уровня с наибольшим значением функции P, имеющей хотя бы одну общую точку с допустимой областью, является прямая *c*, проходящая через вершину B; на ней P принимает значение 1400. Точка B, в которой $x_1 = 300$, $x_2 = 200$, соответствует оптимальному решению задачи. Эти значения могут быть получены как решение уравнений

$$3x_1 + 4x_2 = 1700,$$

$$2x_1 + 5x_2 = 1600$$

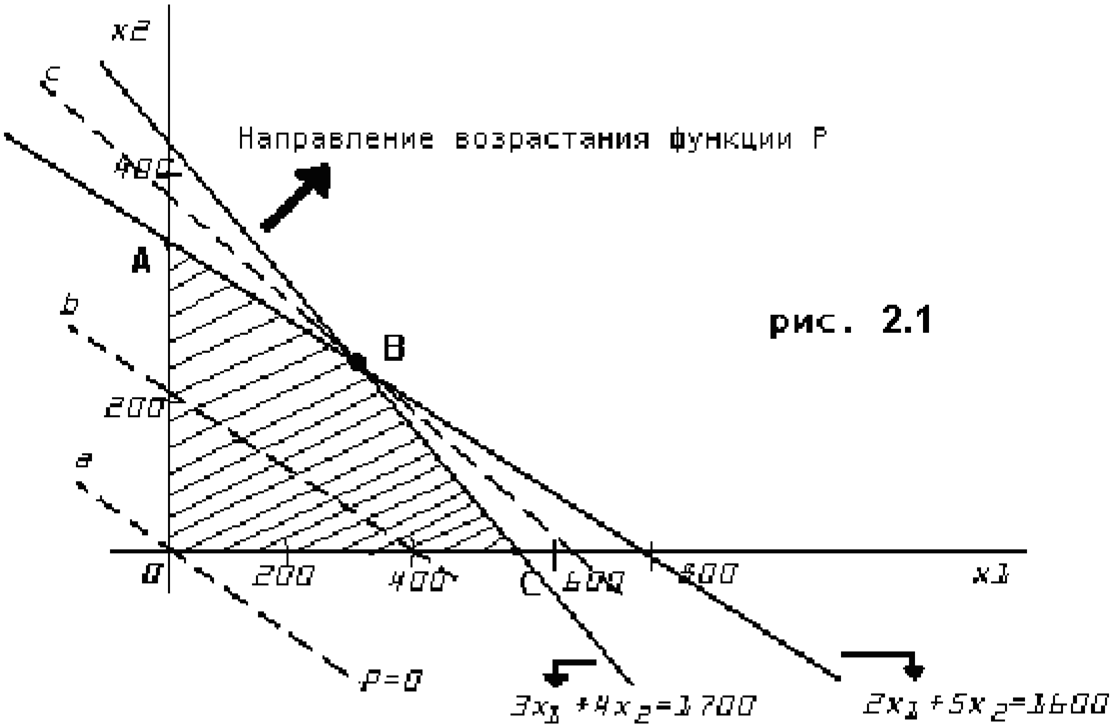


рис. 2.1

Следовательно, максимальная прибыль составляет 2*300+4*200=1400. При оптимальном решении оба ограничения превращаются в равенства, что означает полное использование сырья и машинного времени.

Рассмотренная задача может быть расширена до трех и более моделей и соответствующего количества неотрицательных переменных. Могут быть введены дополнительные ограничения, связанные с возможностями рынка, упаковкой и т.д. В этом случае задача по-прежнему заключается в максимизации линейной функции от нескольких неотрицательных переменных с линейными ограничениями в форме неравенств.

Общая задача линейного программирования состоит в максимизации (или минимизации) линейной функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.4)$$

от n вещественных переменных x_1, x_2,…, x_n, удовлетворяющих условиям неотрицательности

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0 \qquad (2.5)$$

и m линейным ограничениям

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq (=,\geq) b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq (=,\geq) b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.6) \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq (=,\geq) b_m \end{aligned}$$

Среди ограничений могут одновременно встречаться знаки $\leq, =, \geq$. Задача состоит в максимизации (минимизации) целевой функции. Значения b_i, c_j, a_{ij} предполагаются известными.

В матричных обозначениях задача может быть представлена следующим образом:
максимизировать (минимизировать) функцию

$$z = c^T x_0 , \qquad (2.7)$$

где

$$x_0 \geq 0, \qquad (2.8)$$

$$A_0 x_0 \leq (=,\geq) b, \qquad (2.9)$$

и

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец $n \times 1$,

а

$c^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – вектор-строка $1 \times n$,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец $m \times 1$,

$A_0 = (a_{ij})$ – матрица $m \times n$.

Индекс 0 в векторе x_0 и в матрице A_0 указывает на то, что это начальные значения.

Графическое решение двухмерных задач

На примере, рассмотренном в предыдущем разделе, показано, каким образом задачи линейного программирования возникают на практике, и продемонстрирован графический метод их решения. Рассмотрим еще несколько примеров такого рода, чтобы выявить общие свойства задач линейного программирования, которые подскажут путь к их общему решению.

Пример 1

Минимизировать функцию $z = -3x_1 - 4x_2$

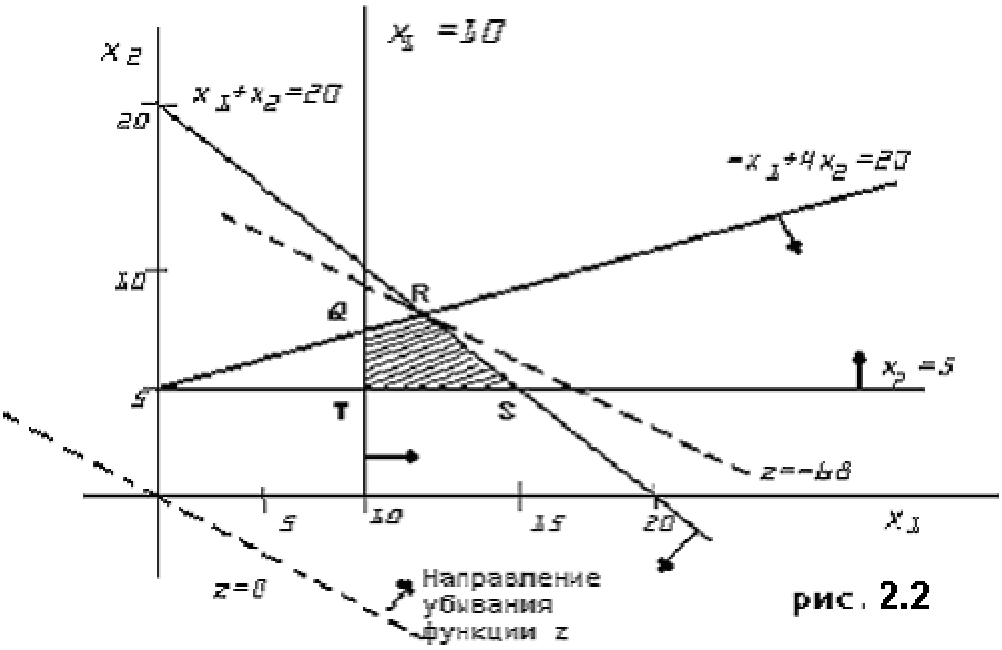


рис. 2.2

При ограничениях $x_1, x_2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 20 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ x_1 &\geq 10 \\ x_2 &\geq 5 \end{aligned}$$

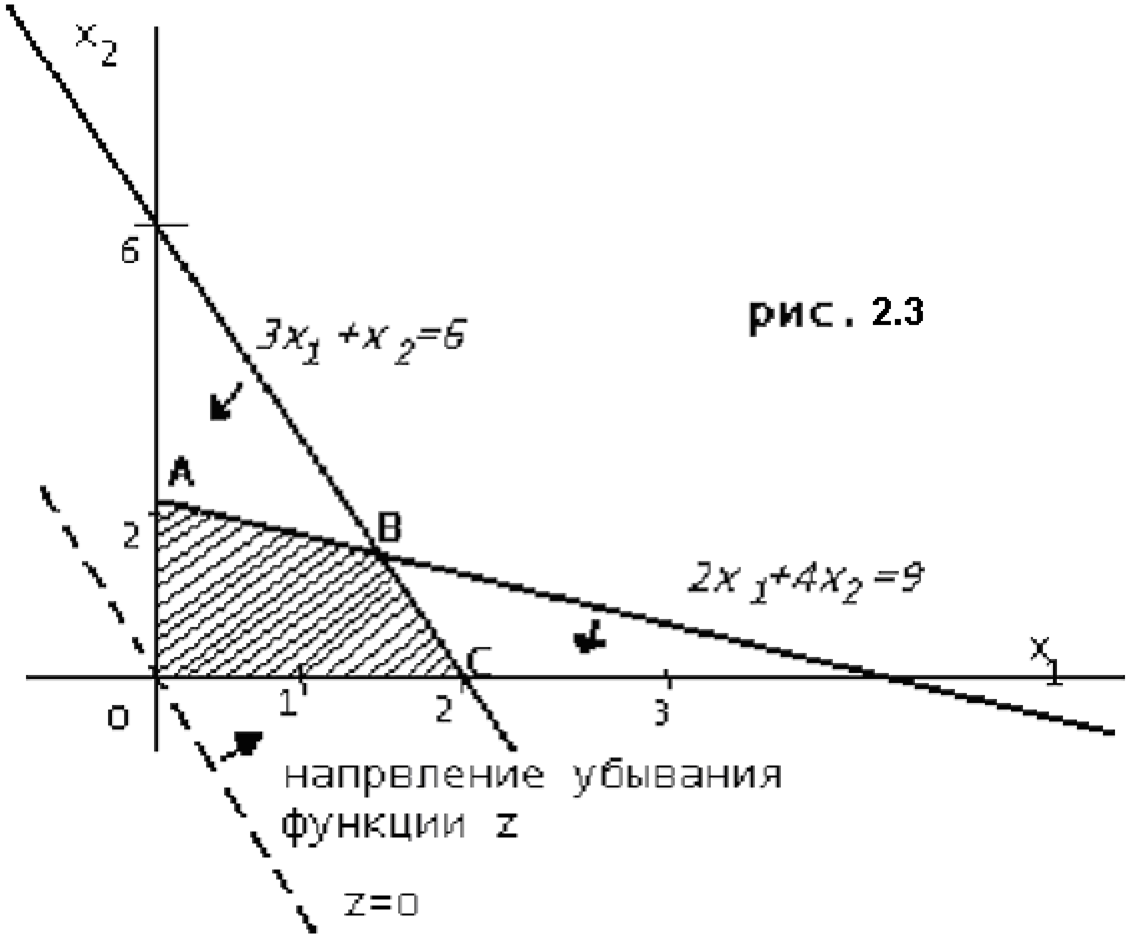
Допустимой областью, изображенной на рис. 2.2, является четырехугольник PQRS. Два последних ограничения усиливают условия неотрицательности. Функция z убывает в направлении вектора

$$-\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Оптимальным решением задачи является точка $x_1 = 12$, $x_2 = 8$ с минимальным значением функции $z = -68$. Иногда задача имеет более чем одно оптимальное решение.

Пример 2

Минимизировать функцию $z = -6x_1 - 2x_2$



при ограничениях $x_1, x_2 \geq 0,\ 2x_1 + 4x_2 \leq 9,\ \ 3x_1 + x_2 \leq 6$.

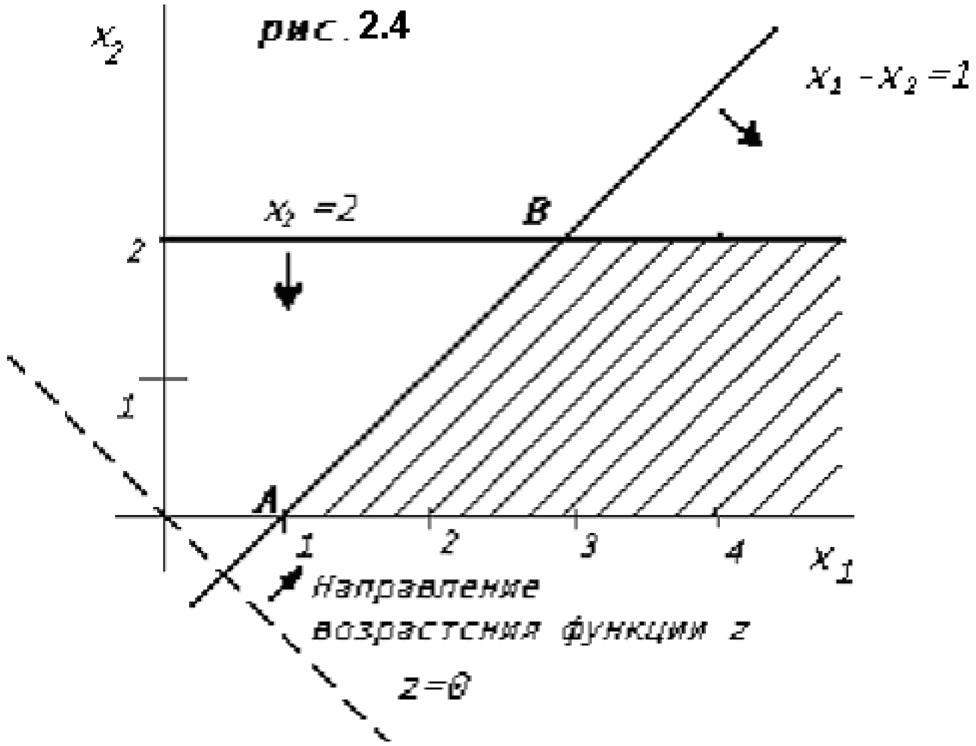
На рис.2.3 четырехугольник OABC изображает допустимую область $\frac{\partial z}{\partial x_1} = -6, \frac{\partial z}{\partial x_2} = -2$, и, таким образом, вектор $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ указывает направление убывания функции z. Любая точка на отрезке BC является оптимальным решением. В частности, в вершинах B $= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ и C=(2, 0) достигаются оптимальные решения, соответствующие одному и тому же минимальному значению функции $z = -12$. Функция z имеет единственное минимальное значение.

Иногда решение задачи не ограничено.

Пример 3

Минимизировать функцию $z = x_1 + x_2$

при ограничениях $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, $x_1 - x_2 \geq 1$, $x_2 \leq 2$.



Допустимая область, изображенная на рис. 2.4, не ограничена в направлении, в котором функция z возрастает, т.е. в допустимой области не существует конечной точки, в которой функция z достигала бы максимума. Решение, как и максимальное значение функции z, не ограничено. Однако некоторые задачи с неограниченными допустимыми областями имеют конечные решения. Например, задача максимизации функции $z = x_2$ при ограничениях из примера 3 имеет конечное решение.

Если бы задача состояла в минимизации функции $z = x_1 + x_2$ при тех же ограничениях, то минимум достигался бы в единственной точке (z (min) в вершине допустимой области x_1=1, x_2=0).

Иногда задача не имеет решения, поскольку допустимой области не существует.

Пример 4

Минимизировать функцию $z = 2x_1 + 3x_2$

при ограничениях $x_1,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 10,\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15$.

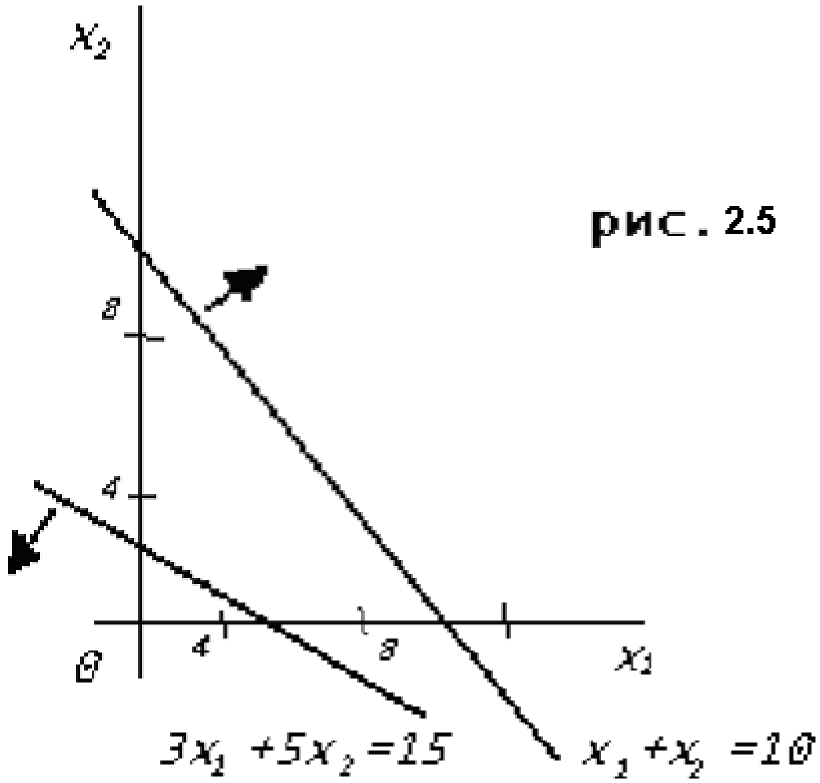


рис. 2.5

Ограничения задачи противоречивы, поэтому нет допустимых решений

Из рассмотренных выше примеров можно вывести несколько характерных черт задач линейного программирования:

1. допустимая область всегда является выпуклым многоугольником, если не пусто;
2. если оптимальное решение существует, то оно всегда достигается в угловых точках допустимого множества, причем, если целевая функция достигает экстремума более чем в одной угловой точке, то задача имеет множество оптимальных планов, которым соответствуют все точки отрезка, соединяющего указанные угловые точки.

Решение оптимизационных задач с помощью «Поиска решений» табличного процессора EXCEL

Пример 1: задача об оптимальном использовании ресурсов.

Фирма производит две модели книжных полок: А и В. Их производство ограничено наличием сырья и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3 м^2 досок, а для изделия модели В – 4 м^2. Фирма может получить до 1700 м^2 досок в неделю. Для каждого изделия модели А требуется 12 минут машинного времени, а для изделия модели В – 30 минут. В неделю можно использовать 160 часов машинного времени.

Сколько изделий каждой модели следует фирме выпускать в неделю, если каждое изделие модели А приносит 2 рубля прибыли, а В – 4 рубля прибыли?

Для решения этой задачи необходимо построить математическую модель:

1. Для определения каких величин (переменных) строится модель?

Переменными являются: А - объем производства полок А, В - объем производства полок В.

2. В чем состоит цель выбора оптимальных переменных?

Цель – определить среди всех допустимых значений А и В такие, которые максимизируют прибыль Р. Прибыль от производства А и В равна: `P = 2*A + 4*B`

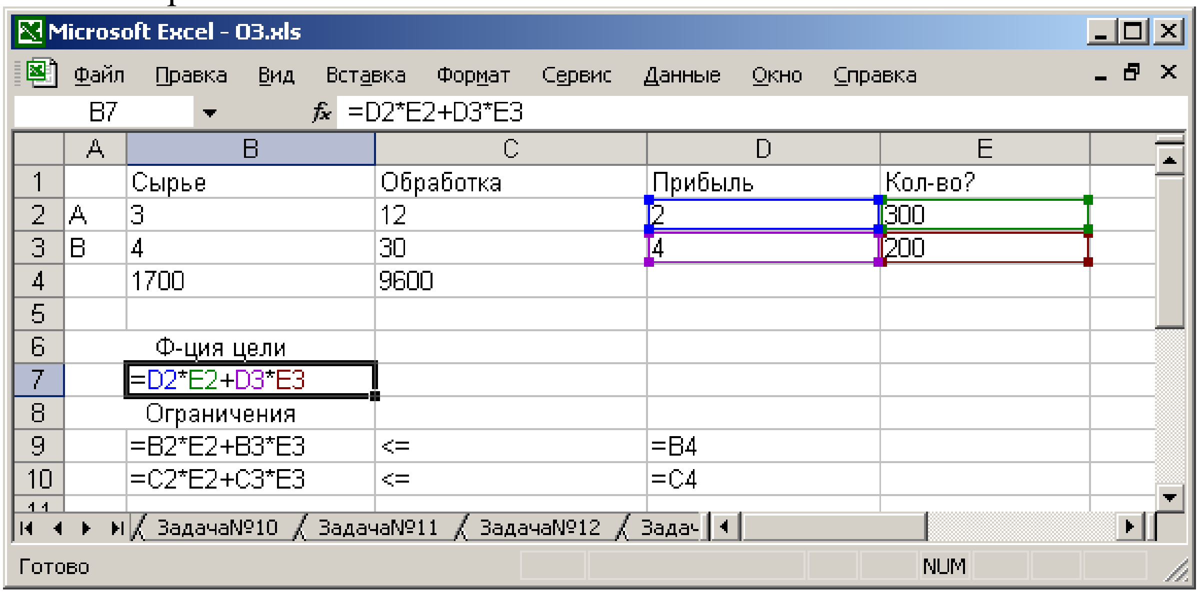
3. Ограничения неизвестных?

Объем производства положительный и счетный: `A, B> = 0, A, B = целые.`

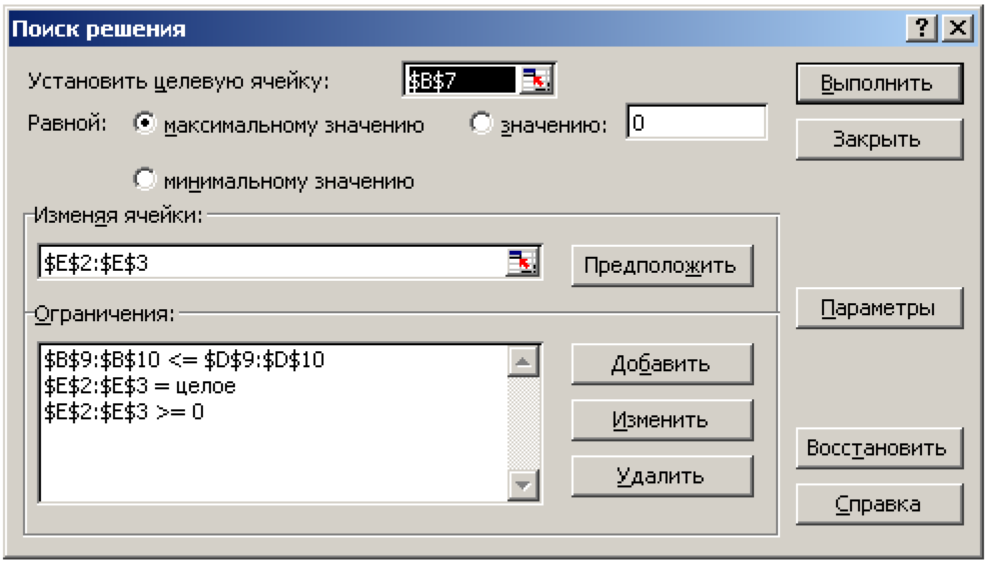
Расход материала не может превосходить его запас: `3*A + 4*B <= 1700.`

Временные затраты на изготовление изделий не могут превышать лимита машинного времени: `12*A + 30*B <= 9600.`

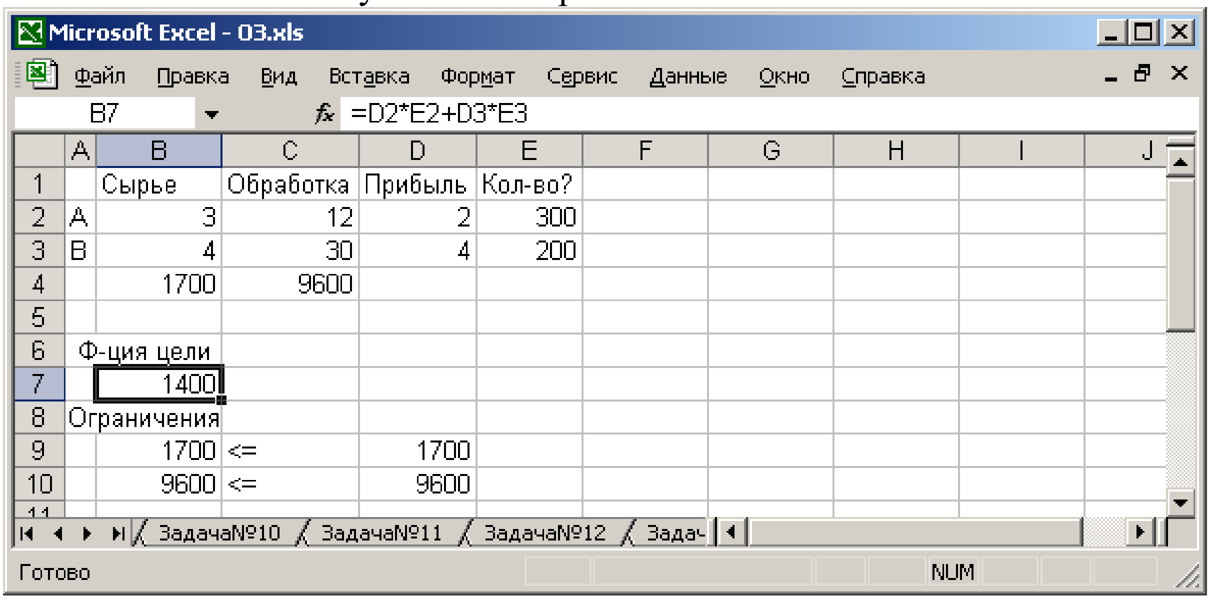
Исходные данные, искомые величины, функция цели и ограничения заполняются на рабочем листе EXCEL:



В меню **«Сервисе/Поиск решения»** выполняется заполнение форм ввода окна:



В результате будет получено следующее решение, при котором будут оптимально выполнены все условия и ограничения:



Элементы диалогового окна Поиск решения

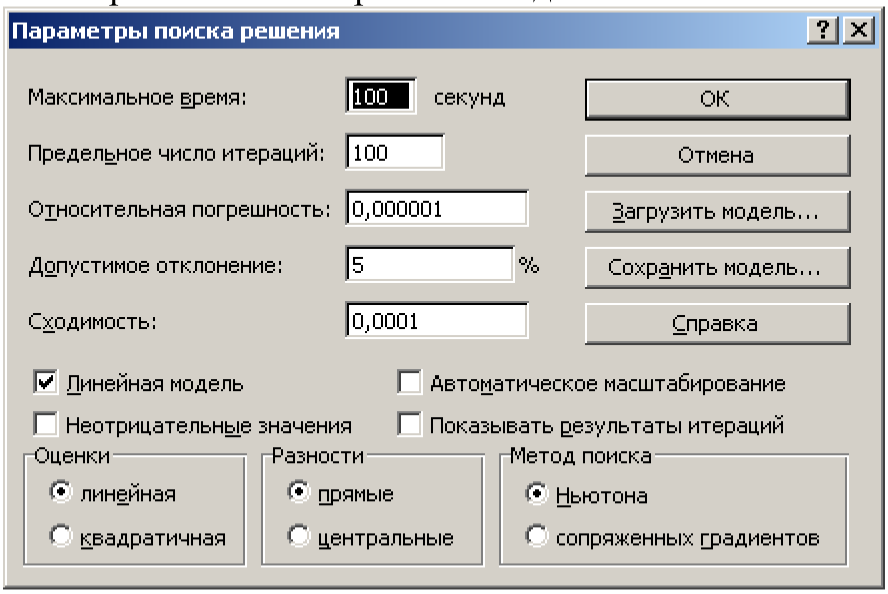
В поле ***Установить целевую ячейку*** дается ссылка на ячейку с функцией, для которой будет находиться максимум, минимум или заданное значение. Тип взаимосвязи между решением и целевой ячейкой задается переключателем в группе ***Равной*** (максимальному значению, минимальному значению или значению).

В поле ***Изменяя ячейки*** указываются ячейки, которые должны изменяться в процессе поиска решения задачи, т.е. ячейки, отведенные под переменные.

Ограничения, налагаемые на переменные, отображаются в поле ***Ограничения.*** Средство поиска решений допускает ограничения в виде равенств, неравенств, а также позволяет ввести требование целочисленности.

Ограничения добавляются по одному в диалоговом окне ***Добавления ограничения.*** В поле ***Ссылка на ячейку*** вводится левая часть на ограничение, в поле ***Ограничение*** – правая часть. С помощью раскрывающегося списка вводится отношение между левой и правой частями ограничения. Нажатие кнопки ***Ок*** завершает ввод ограничений.

С помощью кнопки ***Параметры*** диалогового окна **Поиск решения** вызывается диалоговое окно **Параметры поиска решения**, где можно изменять условия и варианты поиска решения задачи.



Элементы окна **Параметры поиска решения**:

Поле ***Максимальное время*** служит для задания ограничения времени. Поле ***Предельное число итераций*** ограничивает число промежуточных вычислений. Поля ***Относительная погрешность*** и ***Допустимое отклонение*** служат для задания точности поиска решения. Флажок ***Линейная модель*** служит для поиска решения линейной задачи оптимизации или нелинейной аппроксимации нелинейной задачи. В случае нелинейной задачи этот флажок должен быть сброшен, в случае линейной задачи – установлен. Флажок ***Показывать результаты итераций*** служит для приостановки поиска решений и просмотра результатов. Флажок ***Автоматическое масштабирование*** служит для включения автоматической нормализации входных и выходных значений. Группа ***Оценка*** служит для выбора метода экстраполяции. Группа ***Разности*** служит для выбора метода численного дифференцирования. Группа ***Метод поиска*** служит для выбора алгоритма оптимизации.

Отчет о результатах решения задачи выбирается в диалоговом окне **Результаты поиска решения**: ***Результаты, Устойчивость, Пределы.***

Пример 2: Задача о составе смеси.

Фирма занимается разработкой нового типа автомобильных покрышек для дорог Европы, предъявляющей свои требования:

	Требования ЕС	A	B	C
Износостойкость	6	5	6	8
Сцепление	10	10	12	8
Прочность	5	8	5	3

Для производства покрышек используются три полимера: A, B и C - с характеристиками в условных и безразмерных единицах, указанными выше. В каких пропорциях необходимо смешать эти полимеры, чтобы износостойкость оказалась максимальной?

Решения задачи проводится по аналогии с предыдущей задачей:

1. Для определения каких величин (переменных) строится модель?

Переменными являются: A – доля полимера A, B – доля полимера B и C – доля полимера C в смеси.

2. В чем состоит цель выбора оптимальных переменных?

Цель – определить среди всех допустимых значений A, B и C такие, которые максимизируют износостойкость покрышек. Износостойкость равна: =5*A + 6*B + 8*C

3. Ограничения неизвестных?

Доли компонентов смеси положительны: A, B, C > = 0;

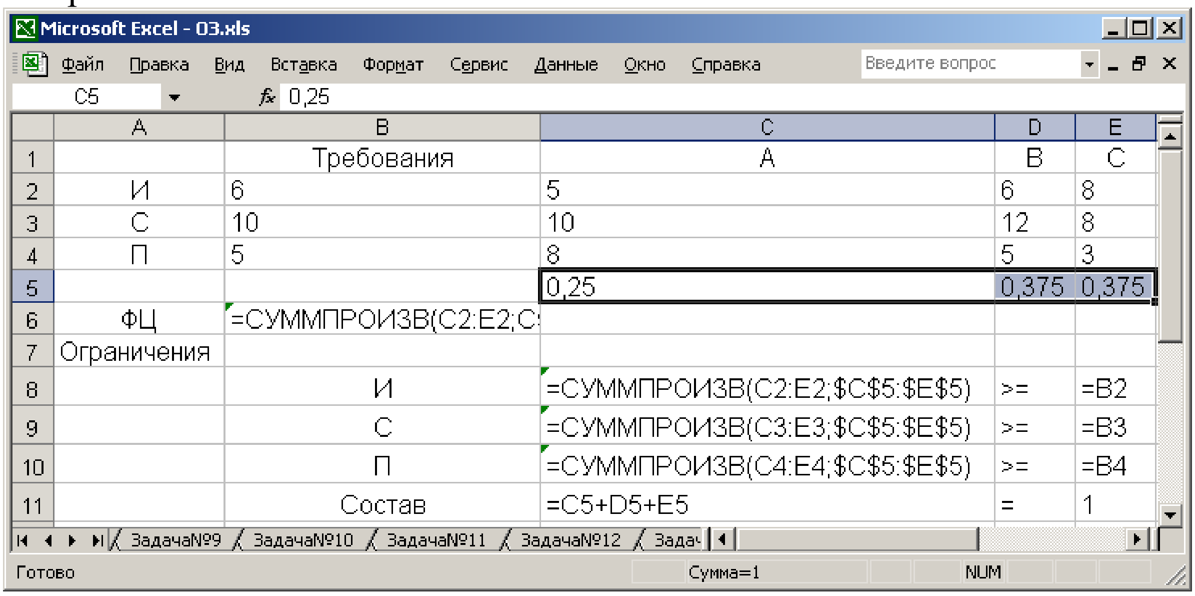
Сумма долей компонентов должна составлять 100% : A + B + C= 1.

Износостойкость должна соответствовать: 5*A + 6*B + 8*C >= 6

Сцепление должно соответствовать: 10*A + 12*B + 8*C > =10

Износостойкость должна соответствовать: 8*A + 5*B + 3*C >= 5

После подстановки исходных данных, условий и ограничений будет получено решение:


Microsoft Excel - 03.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

C5 fx 0,25

	A	B	C	D	E
1		Требования	A	B	C
2	И	6	5	6	8
3	С	10	10	12	8
4	П	5	8	5	3
5			0,25	0,375	0,375
6	ФЦ	=СУММПРОИЗВ(C2:E2;C:			
7	Ограничения				
8		И	=СУММПРОИЗВ(C2:E2;$C$5:$E$5)	>=	=B2
9		С	=СУММПРОИЗВ(C3:E3;$C$5:$E$5)	>=	=B3
10		П	=СУММПРОИЗВ(C4:E4;$C$5:$E$5)	>=	=B4
11		Состав	=C5+D5+E5	=	1

Задача№9 / Задача№10 / Задача№11 / Задача№12 / Зада

Готово Сумма=1 NUM

Задания:

1. Фирма производит полки двух типов: А и В. В неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 $м^2$ материала, а для полки типа В - 3 $м^2$ материала. Фирма может получить до 1200 $м^2$ материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин. станочного времени, а для изготовления одной полки типа В - 30 мин. Станок можно использовать 160 ч в неделю. Если прибыль от продаж полок типа А составляет 3 рубля., а полок типа В - 4 рубля, то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю, чтобы получить максимальную прибыль?

2. Столяр изготавливает стулья двух типов: А и В. Трудоемкость изготовления первого типа стульев вдвое выше трудоемкости изготовления второго. Столяр за месяц может сделать 100 стульев типа А, если будет заниматься только ими. На изготовление стула А материала затрачивается 5 единиц, а стула В – 3 единицы. Запас материала составляет 500 единиц. Месячный объем сбыта стульев обоих типов ограничен диапазоном от 120 до 180 штук. Прибыль от продажи стула А составляет 80 рублей, а стула В – 60 рублей. Определить оптимальный объем производства стульев, при котором достигается максимальная прибыль.

3. Предприятие выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии составляет 60 изделий, второй линии – 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 30 и 20 рублей, соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства радиоприемников для получения максимальной прибыли.

4. Фирма производит два продукта: А и В,- рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан последовательно на станках типа I, II, III. Время обработки в часах для каждого из изделий А и В приведено ниже:

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Время работы станков I, II, III составляет 40, 36 и 36 часов в неделю, соответственно. Прибыль от изделий А и В составляет 5 и 3 рублей. Определить недельные нормы выпуска изделий А и В, максимизирующие прибыль.

5. Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10-ю часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найти оптимальный объем производства изделий каждого вида.

Изделие	Время обработки одного изделия, мин.			Удельная прибыль
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2
2	5	20	15	3

6. Фирма производит два вида продукции – А и В. объем сбыта продукции А составляет не менее 60% общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырье, запас которого ограничен величиной 100 кг. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 кг, а на единицу продукции В – 4 кг. Стоимость продукции А и В равны 20 и 40 рублей, соответственно. Определить оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В, позволяющее получить максимальный доход.

7. Изделия четырех типов проходят последовательную обработку на двух станках. Время обработки одного изделия каждого типа на каждом станке приведено в таблице:

Станок	Время обработки одного изделия, ч			
	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Затраты на производство одного изделия каждого типа определяются как величины, прямо пропорциональные времени использования станков (в машино-часах). Стоимость машино-часа составляет 10 рублей и 15 рублей для станков 1 и 2. Допустимое время использования станков ограничено значениями: 500 машино-часов для станка 1 и 380 машино-часов для станка 2. Цены изделий типов 1, 2, 3, 4 равны 65, 70, 55, 45 рублей. Составить план производства, позволяющий получить максимальную чистую прибыль.

8. Завод выпускает изделия трех моделей. Для их изготовления используются два вида ресурсов А и В, запасы которых составляют 4000 и 6000 единиц. Расход ресурсов на одно изделие каждой модели приведены в таблице.

Ресурс	Расход ресурса на одно изделие данной модели		
	1	2	3
А	2	3	5
В	4	2	7

Трудоемкость изготовления модели 1 вдвое больше, чем модели 2, и втрое больше, чем модели 3. Численность рабочих завода позволяет выпускать 1500 изделий модели 1. Анализ условий сбыта показывает, что минимальный спрос на продукцию завода составляет 200, 200 и 150 изделий моделей 1, 2 и 3, соответственно. Однако соотношение выпуска изделий моделей 1, 2 и 3 должно быть равно 3:2:5. Прибыль от реализации изделий моделей 1, 2, 3 составляет 30, 20, 50 рублей, соответственно. Определить количество выпускаемых изделий, при котором будет получена максимальная прибыль.

9. Предприятие производит два вида фотопленок: Ц – цветная и ЧБ – черно-белая. Трудоемкость изготовления Ц вдвое выше трудоемкости изготовления ЧВ. Если бы предприятие выпускало только фотопленку типа Ц, то суточный объем производства мог бы составить 5000 ед. На фотопленку Ц требуется 350 ед. исходного материала, а на фотопленку Ч – 200 ед. Запас исходного материала ограничен 600000 единицами. Суточный объем сбыта фотопленки обоих видов ограничен диапазоном от 1500 до 2000 штук. Прибыль от продажи пленки типа Ц равна 80 руб., а типа ЧВ – 50 руб. Определить какое количество фотопленки каждого типа следует изготовить, чтобы максимизировать прибыль.

10. Автозавод выпускает две модели автомобилей: “Каприз” и “Фиаско”. На заводе работает 1000 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, каждому из которых оплачивается 40 ч в неделю. Для изготовления модели “Каприз” требуется 30 часов неквалифицированного и 50 часов квалифицированного труда; для “Фиаско” требуется 40 часов неквалифицированного и 20 часов квалифицированного труда. Каждая модель “Фиаско” требует затрат в размере 500 рублей на сырье и комплектующие изделия, тогда как каждая модель “Каприз” требует затрат в размере 1500 рублей; суммарные затраты не должны превосходить 900000 рублей в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, работают пять дней в неделю, и могут забрать с завода не более 210 машин в день. Каждая модель “Каприз” приносит фирме 1000 рублей прибыли, а каждая модель “Фиаско” - 500 рублей прибыли. Какой объем выпуска каждой модели Вы бы порекомендовали для повышения прибыли?

11. Корреспонденция компании отправляется 3 способами: по электронной почте, по факсу и по обычной почте. Каждый из видов пересылки характеризуется скоростью, допустимым объемом пересылаемой информации, конфиденциальностью и стоимостью.

Вид связи	Время доставки	Объем	Конфиденциальность	Цена
Эл. Почта	2	20	2	9
Факс	7	5	5	20
Почта	25	30	15	50

Компания исходит из тех расчетов, что для ее успешной работы минимальный объем пересылаемой корреспонденции должен составлять 400 ед., время пересылки не должно превышать 400 ед., а конфиденциальность должна составлять не менее 250 ед. Как организовать отправку корреспонденции, чтобы выполнить указанные ограничения и затратить минимум средств на ее пересылку?

12. Фирма выпускает два типа деталей: А и В. Для этого она закупает литье, подвергаемое токарной обработке, сверлению и шлифовке. Данные, характеризующие загрузку станочного парка фирмы, приведены в таблице:

Станки	Деталь А, шт/ч	Деталь В, шт/ч
Токарный	25	40
Сверлильный	28	35
Шлифовальный	35	25

Каждая отливка, из которой изготавливают деталь А, стоит 2 рубля. Стоимость отливки для детали В – 3 рубля. Продажная цена деталей равна 5 и 6 рублей, соответственно. Стоимость часа станочного времени составляет для используемых станков 20, 14 и 17,5 рублей. Найти оптимальный план выпуска продукции, позволяющий максимизировать прибыль.

13. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя радиосеть и телевидение. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены суммой 1000 рублей в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 руб., а каждая минута телерекламы – в 100 руб. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в два раза чаще, чем телевидение. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше объема сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определить оптимальное распределение ежемесячно отпускаемых средств между радио- и телерекламой.

14. Имеется 6 видов мебели: гардероб, книжный шкаф, буфет, стул, стол и диван. Необходимость этих предметов расценивается с точки зрения их вместимости, комфортности и площади, которую они занимают, а также их стоимости.

Мебель	Вместимость	Комфорт	Площадь	Цена
Гардероб	10	1	1	8000
Книжный шкаф	5	1	0,6	5000
Буфет	4	1	0,5	7000
Стул	0	8	0,2	1000
Стол	0	7	0,5	2000
Диван	0	10	2	10000

Подобрать мебель таким образом, чтобы при минимальной ее стоимости, площадь под нее не превышала 9 м^2, она позволяла бы разместить 30 ед. вещей, и комфорт при этом был бы не менее 50 ед. Данные предметы мебели должны быть представлены в помещении, по крайней мере, в одном экземпляре.

15. Придя в магазин, студент обнаружил, что у него в кармане 500 рублей. Прицениввшись, он решил, что на эти деньги может купить 4 вида продуктов:

	Цена	Вес (кг)	Безвредность	**Содержание питательных веществ (%)**		
				Жиры	Белки	Углеводы
Пельмени	60	1,0	6	30	15	50
Хлеб	15	1,0	3	3	2	90
Яйца	25	1,0	5	5	50	25
Колбаса	120	1,0	8	40	30	25

В каких количествах стоит купить эти продукты, если в этот день необходимо употребить не менее 200 г. жиров, 500 г. белков, 1 кг углеводов, а организм очень чувствителен к вредной пище?

16. Имеется два способа похудеть: 1 - диета; 2 - применение специальных препаратов. Каждый день диеты обходится в 100 рублей, а каждый день приема специальных препаратов в 500 рублей. Диета позволяет худеть за день на 300 грамм. Эффект от приема препаратов в 5 раз больше, чем от диеты. Пациент хочет, чтобы диета применялась как минимум в 2 раза чаще. Найти оптимальное сочетание способов похудения за три недели, если пациент может потратить не более 6000 рублей. Сколько денег необходимо потратить?

17. Культурист занимается 1 час разминкой перед тренировкой, причем каждое упражнение отнимает силы и имеет определенный эффект:

	Затрата сил	Польза для организма	Эффект	Время
Подтягивание	20	70	90	5
Приседания	10	45	30	5
Отжимание	15	60	70	5

Сколько подходов культурист должен сделать к каждому из упражнений, чтобы добиться максимальной пользы. При этом спортсмен оценивает свои силы в 200 и хочет добиться эффекта не менее 400.

18. Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и с долей зольных примесей не более 3,25%. Три сорта угля A, B, C доступны по следующим ценам (за 1 т):

Сорт угля	Содержание примеси фосфора, %	Содержание примеси золы, %	Цена, руб.
A	0,06	2,0	30
B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45

Как их смешивать, чтобы получить минимальную цену и удовлетворить ограничениям на содержание примесей?

19. Средства очистки пола оценивают по следующим трем показателям: а) очищающие свойства, б) дезинфицирующие свойства, в) раздражающее воздействие на кожу. Каждый из этих показателей измеряется по линейной шкале от 0 до 100 единиц.

Продукт должен иметь по крайней мере 60 единиц очищающих свойств и по крайней мере 60 дезинфицирующих свойств по соответствующей шкале. При этом раздражающее воздействие на кожу должно быть минимальным. Конечный продукт должен быть смесью трех основных очистителей, характеристики которых приводятся в таблице:

Очиститель	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие на кожу
А	90	30	70
В	65	85	50
С	45	70	10

20. Птицеферма выращивает кур на перья и на мясо. Одна перьевая курица (П) дает мяса 1 кг, пуха – 5 кг, а мясная (М), наоборот, 5:1. Стоимость килограмма мяса – 40 рублей, пуха – 50 рублей. Для выращивания птиц требуется корм: 32 единицы белкового корма на один кг мяса и 50 единиц витаминного на один кг пуха. При этом, количество корма ограничено: 150000 единиц белкового и 200000 единиц витаминного. Сколько кур можно вырастить для получения максимальной прибыли?

21. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. В среднем (за 8 недель) недельный рацион цыплят составляет 1 килограмм.

Чтобы цыплята достигли к восьмой неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента.

Ингредиент	Содержание питательных веществ, кг/кг ингредиента			Стоимость/кг
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0,38	-	-	0,04
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,5	0,08	0,4

Смесь должна содержать:

- не менее 0,8%, но и не более 1,2% кальция
- не менее 22% белка
- не более 5% клетчатки

Необходимо определить количество каждого из трех ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности.

22. Кинологический клуб насчитывает 2000 собак, которые выращиваются до 8-ми месячного возраста и после соответствующего обучения распределяются по службам (МЧС, ФСБ, МВД и т.п.). В среднем за 8 месяцев рацион питания собаки составляет 100 килограммов.

Для того чтобы собаки были в хорошей форме, кормовой рацион собак должен удовлетворять определенным требованиям. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов. Ограничимся рассмотрением трех основных ингредиентов: крупа, овощи, мясо. В таблице приведены данные, характеризующие содержание питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента.

Ингредиент	Содержание питательных веществ, кг/кг ингредиента			Стоимость кг.
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Крупа	0.2	0.05	0.4	10
Овощи	0.05	0.05	0.8	10
Мясо	0.1	0.5	0.3	50

Смесь должна содержать:

- не менее 10%, но и не более 15% кальция,
- не менее 30% белка,
- не менее 50% клетчатки.

Необходимо определить количество каждого из трех ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности.

23. На участок строящейся дороги необходимо вывезти 20000 м^3 каменных материалов. В районе строительства имеются три карьера с запасами 8000 м^3, 9000 м^3. и 10000 м^3. Для погрузки используются экскаваторы, имеющие производительность 250 м^3 в смену в карьерах 1 и 2 и 500 м^3 в карьере 3. На погрузку материалов для участка выделен для экскаваторов общий лимит 60 смен. Для перевозки из карьера 1 используются самосвалы вместимостью 10 м^3., из карьера 2 и 3 – 8 м^3. Требуется найти оптимальный план работ, обеспечивающий минимальное количество транспортных перевозок.

24. Для изготовления бетона используют цемент, песок и щебень. Каждый из ингредиентов смеси обладает свойствами:

	Вязкость	Прочность	Цена
Цемент	10	5	10
Песок	8	7	5
Щебень	5	10	7

Для получения бетонной плиты, отвечающей ГОСТу, необходимо, чтобы вязкость смеси была не менее 6 ед., ее прочность - не ниже 7 ед., а для рентабельности производства стоимость смеси не должна превышать 7 ед. Каким должно быть процентное содержание веществ в смеси, чтобы обеспечить минимальный объем затрат при соблюдении требований ГОСТа?

25. Фирма планирует организовать грандиозную распродажу залежавшихся на складе товаров. В течение трёх недель она планирует продать всю продукцию. На складе имеется три вида товаров: А, В, С,- количество которых составляет 60000 единиц, а их соотношение 3:5:2. Фирма может реализовать свою продукцию двумя способами:

- непосредственно через рынок. На рынке покупатели готовы купить товары А, В, С не дороже 15, 10, 20 рублей соответственно, а их недельный спрос равен 1900, 8000, 3400.

- через оптовую компанию. Оптовая компания готова приобрести у фирмы не менее 40% всей продукции, однако в этом случае фирма теряет 20% прибыли с каждого товара, нежели при реализации продукции на рынке.

Как следует организовать распродажу, чтобы выполнить намеченный план и получить максимальную прибыль?

26. Курсы повышения квалификации выпускают подготовленных специалистов 3–х категорий. Для их подготовки используются два вида специального оборудования: А и В, загрузки которых составляют 4000 и 6000 часов ежегодно, соответственно. Загрузки оборудования на одного специалиста каждой категории приведен в таблице:

Оборудование	Загрузки оборудования на одного специалиста (часы)		
	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

Трудоемкость подготовки специалистов I – й категории вдвое больше, чем специалистов II – й категории и втрое больше, чем специалистов III – й категории. Если бы готовили только специалистов I – й категории, то их выпуск составил бы 500. Анализ условий трудоустройства показывает, что минимальный спрос на специалистов составляет 200, 150 и 350 человек категорий I, II и III, соответственно. Однако, соотношение выпуска специалистов категорий I, II и III должно быть равно 3:2:5. Прибыль, приносимая трудоустроенными специалистами, составляет 300, 200, 500 рублей, соответственно. Определить прибыль, удовлетворяющую заданным условиям.

27. При изготовлении бланков для тестирования можно использовать два вида краски: желтую (Ж) и розовую (Р). При расчете на 1 тысячу бланков следует учитывать:

- производство одного бланка Р обходится в 30 копеек, а бланка Ж – 36 копеек. На производство 1 тысячи бланков выделяется не более 330 рублей;
- производство одного бланка Р длится 2 секунды, Ж- 2,2 секунды. Для обеспечения непрерывности процесса тестирования на изготовление одной тысячи бланков должно тратиться не более 35 минут времени работы печатного станка;
- при обработке бланков следует учитывать, что качество сканирования бланка Р по 10-ти бальной шкале можно оценить на 6, а бланка Ж - на 8. Это сказывается на процессе обработки: верификаторам за обработку одного бланка Р платят 60 копеек, а бланка Ж – 50 копеек. Суммарно на обработку одной тысячи бланков выделяется не более 560 рублей. Следует учитывать, что обработка одной тысячи бланков Р занимает в среднем 2 часа 30 минут, а бланков Ж – 2 часа 15 минут. Для обеспечения своевременности на обработку одной тысячи бланков должно уходить не более 2 часов 20 минут.

Определить, сколько бланков каждого цвета выгодно производить фирме, чтобы снизить издержки на их производство и обработку.

28. Для получения сплавов A и B используются четыре металла I, II, III и IV, требования к содержанию которых в сплавах приведены в таблице:

Сплав	**Требования к содержанию металла**
A	Не более 80% металла I Не более 30% металла II
B	От 40 до 60% металлаII Не менее 30% металла III Не более 70% металла IV

Характеристики и запасы руд, используемых для производства металлов I, II, III и IV приведены в таблице:

Руда	Запас, т	Состав, %					Цена, т
		I	II	III	IV	Другие компоненты	
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

Цена 1 т. сплава A равна 200 рублей, а 1 т. сплава B – 210 рублей. Необходимо максимизировать прибыль от продажи сплавов A и B.

29. Компания импортирует красные вина трех марок:

Марка красного вина	Цена одной бутылки	Количество импортируемых бутылок в год
Французское бургундское	1,08	100000
Французское бордо	0,96	130000
Испанское красное	0,50	150000

Красные вина смешиваются для получения столовых вин трех марок:

Марка столового вина	Содержание красного вина, %		Максимальное количество, продаваемых бутылок в год	Цена одной бутылки
	Не менее	Не более		
Божеле	30(бургундское)	50 (испанское)	200000	1,96
Нюи-Сент-Жорж	30(бургундское)	30 (испанское)	Не ограничено	2,46
Сент-Эмильон	60(бордо)	30 (испанское)	180000	2,08

Как организовать производство, чтобы прибыль была максимальной?

3. Основные понятия теории игр

Каждая игра характеризуется:

- количеством игроков;
- возможным для каждого из игроков набором действий, называемых стратегией;
- функциями выигрыша (платежа), отражающими степень достижения интересов каждого игрока;
- результатом игры, к которому приводят выбранные игроками стратегии.

Один из способов описания игры состоит в том, что рассматриваются все возможные стратегии игроков и определяются платежи, соответствующие любой возможной комбинации стратегий игроков. *Описанная таким образом игра называется игрой в нормальной форме.*

Пример

Фермер, имеющий ограниченный участок земельных угодий, может засадить его тремя различными культурами: A_1, A_2, A_3. Урожай этих культур зависит главным образом от погоды, которая может находиться также в трех различных состояниях: B_1, B_2, B_3.

Фермер имеет информацию об урожайности этих культур при трех различных состояниях погоды, которая отражена в матрице H`:

Виды культур	Возможные состояния погоды			Цены С
	Засуха - B_1	Нормальная - B_2	Дождливая - B_3	
Рожь - A_1	20	5	15	2
Пшеница - A_2	7,5	12,5	5	4
Овес - A_3	0	7,5	10	8

$\|h`_{ij}\|$ - элемент матрицы, который показывает, какое количество центнеров культуры i (i=1..3) получит фермер с одного гектара земли, в том случае, если реализуется состояние природы j (j=1,2,3);

C_i – рыночная цена одного центнера культуры A_i.

Тогда матрица H, характеризующая возможные доходы, которые может получить фермер от каждой из культур при различном состоянии погоды, будет:

Виды культур	Возможные состояния погоды		
	Засуха - B_1	Нормальная - B_2	Дождливая - B_3
Рожь - A_1	40	10	30
Пшеница – A_2	30	50	20
Овес - A_3	0	60	80

$\|h`_{ij}\|$ - элемент матрицы, который показывает, какой доход может получит фермер с одного гектара земли, если он посеет культуру i (i=1..3), а погода будет находится в состоянии j (j=1,2,3);

Необходимо определить пропорции, в которых фермер должен засеять имеющийся участок земли, чтобы максимизировать свой доход вне зависимости от того, какие погодные условия будут реализованы.

Данная задача может быть сведена к антагонистической игре. В данном случае в качестве первого игрока выступает фермер, а в качестве второго природа.

Антагонистические игры и их свойства

Игра двух лиц называется антагонистической, если один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой.

Наличие этого свойства дает возможность рассматривать не две матрицы, а одну матрицу, в которой каждый из элементов характеризует выигрыши первого игрока и проигрыши второго при выборе ими соответствующих стратегий.

Процесс разыгрывания конечной антагонистической игры состоит в том, что оба игрока независимо друг от друга выбирают свои стратегии, которые определяют результат игры, отражающийся в матрице выигрышей.

Оптимальные стратегии и их выбор

Выбираю ту или иную стратегию, каждый из игроков стремится удовлетворить свои интересы: первый обеспечит себе максимально возможный выигрыш, а второй минимально возможный проигрыш.

Стратегия первого игрока называется оптимальной, если при ее применении выигрыш первого игрока не может быть уменьшен, какими бы стратегиями ни пользовался второй игрок. Стратегия второго игрока является оптимальной в том случае, если проигрыш второго игрока не может быть увеличен, какими бы стратегиями ни пользовался первый игрок.

Принцип осторожности предполагает, что каждый игрок выбирает свои стратегии исходя из предположения, что его противник не упустит возможности использовать его ошибки в своих интересах.

Руководствуясь этим принципом, первый игрок проанализирует, какой минимальный выигрыш может быть получен при использовании им каждой из трех его возможных стратегий. Если он использует:

- стратегию (A_1), его минимально возможный выигрыш будет равен 10;
- стратегию (A_2), его минимально возможный выигрыш будет равен 20;
- стратегию (A_3), его минимально возможный выигрыш будет равен 0.

Из найденных минимальных выигрышей найдем максимальный ($V_{\wedge}=\max_i \min_j h_{ij}=20$ – нижняя цена игры), и выберем соответствующую ему стратегию первого игрока (A_2). Очевидно, что применение такого принципа может привести первого игрока к выбору оптимальной стратегии.

Применяя этот же принцип, второй игрок проанализирует, какой максимальный проигрыш он может иметь при использовании им каждой из трех возможных стратегий. Если он использует:

- стратегию (B_1), его максимальный проигрыш будет равен 40;
- стратегию (B_2), его максимальный проигрыш будет равен 60;
- стратегию (B_3), его максимальный проигрыш будет равен 80;

Из найденных максимальных проигрышей найдем минимальный ($V^{\wedge}=\min_j \max_i h_{ij}=40$ – верхняя цена игры), и выберем соответствующую ему стратегию второго игрока (B_1). Очевидно, что применение такого принципа может привести и второго игрока к выбору оптимальной стратегии.

Применение принципа осторожности может привести и первого и второго игрока к выбору оптимальной стратегии.

Так как нижняя цена игры не равна верхней цене игры, то антагонистическая игра не имеет седловой точки и решения в чистых стратегиях. *Пара чистых стратегий создает в игре равновесие, когда в матрице выигрышей существует элемент, который одновременно является наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Этот элемент называется Седловой точкой.*

Решение этой игры следует искать в смешанных стратегиях.

Смешанная стратегия – это вероятностная комбинация чистых стратегий.

Антагонистическую игру можно свести к паре взаимодвойственных задач линейного программирования.

Если первый игрок – фермер – применяет свою оптимальную смешанную стратегию P*, а второй игрок – природа – применяет последовательно свои чистые стратегии, то математическое ожидание дохода, который фермер может получить со своего участка, будет не меньше цены игры *V*, где $V_{\wedge}<V<V^{\wedge}$. Следовательно, должна выполняться следующая система неравенств:

$40p_1^*+30p_2^*\geq V$

$10p_1^*+50p_2^*+60p_3^*\geq V$

$30p_1^*+20p_2^*+80p_3^*\geq V$

Для этой системы неравенств проведем следующее преобразование: разделим каждое из них на V и введем новые переменные:

$$y_1=\frac{p_1^*}{V} \quad y_2=\frac{p_2^*}{V} \quad y_3=\frac{p_3^*}{V}$$

Тогда, рассматриваемая система примет вид:

$40y_1+30y_2\geq 1$

$10y_1+50y_2+60y_3\geq 1$

$30y_1+20y_2+80y_3\geq 1$

Разделив равенство: $p_1^*+ p_2^*+ p_3^*=1$ на V, получим, что переменные y_1, y_2, y_3 удовлетворяют условию

$y_1+y_2+y_3=1/V$

Поскольку цель первого игрока – максимизация его выигрыша, а математическое ожидание его выигрыша не меньше цены игры, то первый игрок будет стремиться максимизировать цену игры, которая в свою очередь эквивалентна минимизации величины 1/V. Из вышеуказанного следует, что для первого игрока задача может быть сформулирована следующим образом: определить вектор Y=(y_1, y_2, y_3), компоненты которого удовлетворяли бы:

- Системе функциональных ограничений:

$40y_1+30y_2\geq 1$

$10y_1+50y_2+60y_3\geq 1$

$30y_1+20y_2+80y_3\geq 1$

- Системе прямых ограничений:

$y_1\geq 0,\ y_2\geq 0,\ y_3\geq 0$

- Целевая функция Z стремилась бы к минимуму:

Задача второго игрока	**Задача первого игрока**
Целевая функция:	
$F=x_1+x_2+x_3 \to max$	$Z=y_1+y_2+y_3 \to min$
Функциональные ограничения	
$40x_1+10x_2+30x_3\leq 1$ $30x_1+50x_2+20x_3\leq 1$ $60x_2+80x_3\leq 1$	$40y_1+30y_2\geq 1$ $10y_1+50y_2+60y_3\geq 1$ $30y_1+20y2+80y3\geq 1$
Прямые ограничения	
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0$	$y_1\geq 0,\ y_2\geq 0,\ y_3\geq 0$

Решая эти задачи, найдем оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Оптимальная стратегия первого игрока будет определяться вектором Y= $\begin{pmatrix} 0{,}015 \\ 0{,}013 \\ 0{,}004 \end{pmatrix}$

Из соотношения $y_1+y_2+y_3=1/V$ найдем V: $V=\dfrac{1}{y_1+y_2+y_3}$

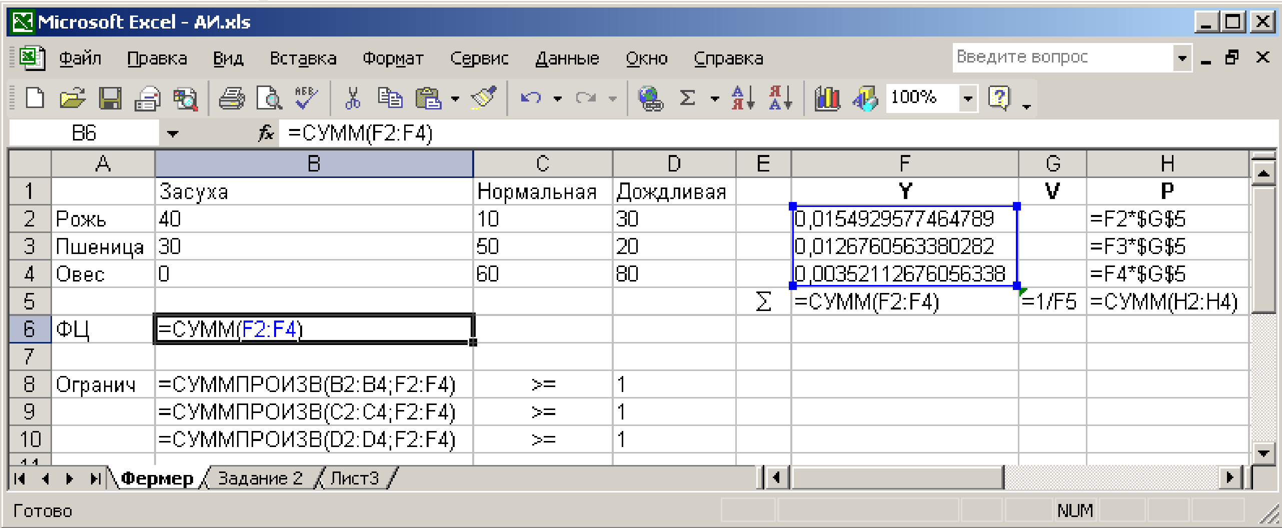
Из соотношений: $y_1=\dfrac{p_1^*}{V}$ $y_2=\dfrac{p_2^*}{V}$ $y_3=\dfrac{p_3^*}{V}$ найдем:

$p_1^*= 0{,}49$ $\qquad$ $p_2^*= 0{,}40$ $\qquad$ $p_3^*=0{,}11$

*Смешанная стратегия фермера в данном случае может трактоваться в виде смеси стратегий, подразумевающей одновременное применение игроком своих чистых стратегий в определенных пропорциях, которые заданы вектором P**

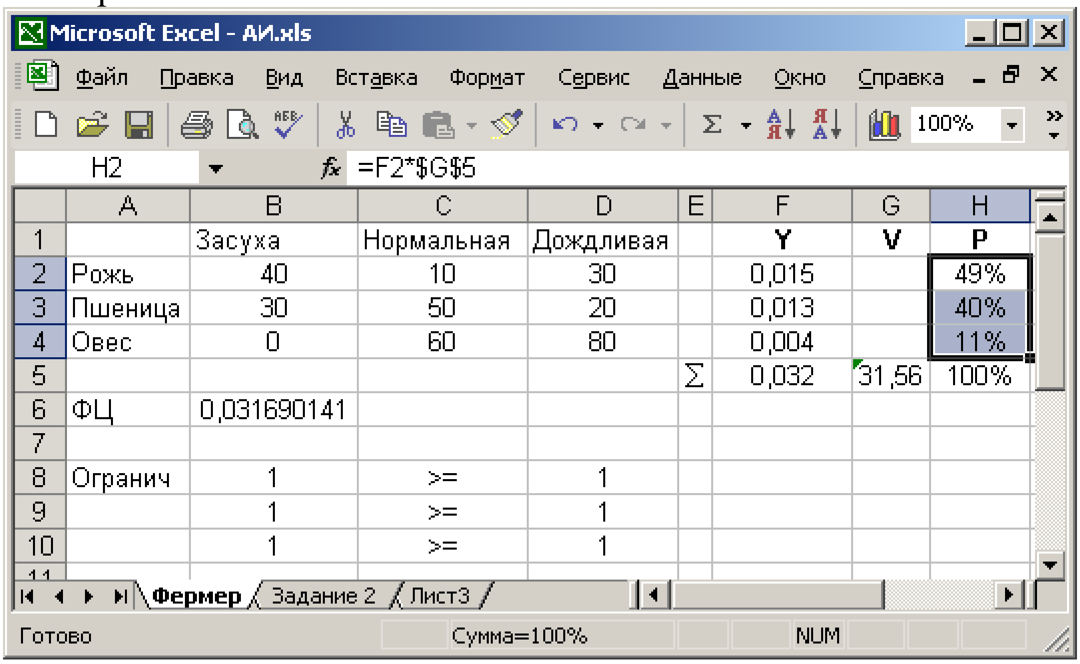
Решение задачи средствами EXCEL

Исходные данные, искомые величины, функция цели и ограничения заполняются на рабочем листе EXCEL:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Засуха	Нормальная	Дождливая		Y	V	P
2	Рожь	40	10	30		0,0154929577464789		=F2*$G$5
3	Пшеница	30	50	20		0,0126760563380282		=F3*$G$5
4	Овес	0	60	80		0,00352112676056338		=F4*$G$5
5					Σ	=СУММ(F2:F4)	=1/F5	=СУММ(H2:H4)
6	ФЦ	=СУММ(F2:F4)						
7								
8	Огранич	=СУММПРОИЗВ(B2:B4;F2:F4)	>=	1				
9		=СУММПРОИЗВ(C2:C4;F2:F4)	>=	1				
10		=СУММПРОИЗВ(D2:D4;F2:F4)	>=	1				

После заполнения формы ввода и запуска задачи на выполнение будет получено следующее решение, при котором будут оптимально выполнены все условия и ограничения:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Засуха	Нормальная	Дождливая		Y	V	P
2	Рожь	40	10	30		0,015		49%
3	Пшеница	30	50	20		0,013		40%
4	Овес	0	60	80		0,004		11%
5					Σ	0,032	31,56	100%
6	ФЦ	0,031690141						
7								
8	Огранич	1	>=	1				
9		1	>=	1				
10		1	>=	1				

4. Транспортная задача

Пусть имеется несколько пунктов отправления, в которых сосредоточены запасы товара в определенных количествах, и несколько пунктов назначения, которые хотят получить этот товар в заданных количествах. Сумма запросов на получение товаров из всех пунктов назначения равна сумме запасов в пунктах отправления. Известны стоимости перевозок единицы товара между пунктами отправления и назначения. Требуется составить план перевозок, чтобы:

- Все грузы из пунктов отправления были вывезены
- Потребности пунктов назначения были удовлетворены
- Суммарные затраты на перевозку были бы минимальны.

Пример

Фирма должна отправить некоторое количество товара с трех складов в пять магазинов. На складах имеется соответственно 15, 25, 20 единиц товара, а для пяти магазинов требуется соответственно 20, 12, 5, 8 и 12 единиц. Стоимость перевозки одной единицы со склада в магазин приведена в таблице.

Склад	Магазин				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
C_1	1	0	3	4	2
C_2	5	1	2	3	3
C_3	4	8	1	4	3

Как следует спланировать перевозку товара для минимизации стоимости? Пусть X_{ij} — количество товара, отправляемого со склада i в магазин j. Ясно, что $X_{ij} \geq 0$, и в силу ограничений на возможности поставки со складов (предложение) и спрос в магазинах они удовлетворяют следующим условиям:

для предложения

$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}$			=15
	$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}$		=25
		$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}$	=20

для спроса

X_{11}	$+X_{21}$	$+X_{31}$	=20
X_{12}	$+ X_{22}$	$+X_{32}$	=12
X_{13}	$+X_{23}$	$+X_{33}$	= 5
X_{14}	$+X_{24}$	$+X_{34}$	= 8
X_{15}	$+X_{25}$	$+X_{35}$	=15

Стоимость, равная

$C=X_{11} +0X_{12} +3X_{13}+4X_{14} +2X_{15} +5X_{21}+...+4X_{34}+3X_{35}$,

должна быть минимизирована при этих ограничениях.

Эта задача является задачей линейного программирования, Поскольку суммарный спрос равен сумме поставок, во всех случаях должно выполняться равенство. Также сумма по первым трем ограничениям дает тот же результат, что и сумма по последним пяти ограничениям.

Эти результаты обобщаются на транспортную задачу с m пунктами производства и объемами производства a_i (i= 1, 2,..., m), и n пунктами потребления и объемами потребления b_j (j = 1,...,n), где

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{4.1}$$

Если C_{ij} - стоимость транспортировки одного изделия из пункта производства i в пункт потребления j , то задача заключается в нахождении $X_{ij} \geq 0$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{array}{llll}
X_{11}+X_{12}+\ldots+X_{1n} & & & = a_1 \\
& X_{21}+\ldots+X_{2n} & & = a_2 \\
\text{-------------------------} & & & \\
& & X_{m1}+\ldots+X_{mn} & = a_m \\
X_{11} & +X_{21} & +X_{m1} & = b_1 \\
\quad X_{12} & \quad X_{22} & \quad +X_{m2} & = b_2 \\
\text{-------------------------} & & & \\
\quad X_{1n} & +X_{2n} & +X_{mn} & = b_n
\end{array} \tag{4.2}$$

и минимизирующих функцию:

$$C = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} +\ldots+ C_{mn} X_{mn} .$$

Соотношения (4.2) можно переписать: найти такие $X_{ij} \geq 0$, для которых справедливы неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i > 0 (i = 1,\ldots,m) \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j > 0 (j = 1,\ldots,n) \tag{4.4}$$

и которые минимизируют функцию:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \tag{4.5}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

согласно уравнению (4.1), имеется всего $m + n - 1$ независимых ограничений и, следовательно, $m + n - 1$ базисных переменных в базисном допустимом решении.

Дисбаланс

Существуют два типа транспортной задачи: открытая и закрытая. Транспортная задача называется открытой если сумма запасов товара на складах отличается от суммы потребностей товаров у магазинов. Транспортная задача называется закрытой, если сумма запасов товара на складах равняется сумме потребностей магазинов. Решение существует только для закрытой транспортной задачи, поэтому если транспортная задача открытая, то ее надо привести к закрытому типу. Для этого в случае, если запас товара на складах превышает потребность магазинов, то вводят фиктивного потребителя, который выбирает весь избыток товара. В случае же, если существует дефицит товара, т.е. потребность магазинов больше, чем запас товаров на складах, то вводят фиктивного поставщика, с фиктивным запасом товара на складе. В обоих случаях в матрице тарифов перевозок |C| данному складу или магазину проставляется нулевая цена перевозки.

ПРИМЕР

Пусть 15, 25, 20 единиц товара, хранящихся на складах C_1, C_2, C_3, должны быть распределены по четырем магазинам, где требуется 20, 12, 5 и 9 единиц. Пусть стоимость перевозки одной единицы со складов в магазины задается таблицей

Склад	Магазин			
	M_1	M_2	M_3	M_4
C_1	2	2	2	4
C_2	3	1	1	3
C_3	3	6	3	4

Как следует планировать перевозку для минимизации стоимости?

Склады располагают 60 единицами товара. Магазинам требуется лишь 46 единиц. Для того чтобы перейти к транспортной задаче, введем фиктивный магазин, которому требуется 14 единиц. Стоимость перевозок со склада в этот магазин полагается равной 0. Если в окончательном решении будет получено, что некоторые товары надо будет отправить в этот магазин, то это будет проигнорировано. Товары останутся на складе. Таким образом, поставлена транспортная задача, для которой уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

выполняются.

Если спрос превышает предложение, надо ввести фиктивного поставщика с нулевой стоимостью перевозок. Продукция этого поставщика на самом деле поставляться не будет. Спрос на нее не будет удовлетворен.

Методы решения транспортной задачи

Для решения транспортной задачи разработано несколько методов, каждый из которых отличается от другого методом заполнения матрицы перевозок.

Метод минимального элемента

Алгоритм метода минимального элемента состоит в следующем. Просматривается вся матрица тарифов перевозок, и из нее выбирается позиция с наименьшим значением тарифа C, затем просматриваются значения наличия запасов на складе A и потребности у потребителя B, затем в данную клетку записывается величина D=MIN(A,B). Из запасов соответствующего склада и потребностей магазина вычитается величина D . Если запас товара на складе исчерпан, то эта строка исключается из дальнейшего рассмотрения. Если потребность магазина в товаре удовлетворена полностью, то этот столбец исключается из дальнейшего рассмотрения. Может быть случай , когда одновременно исключаются и строка и столбец, этот случай называется вырожденным. В дальнейшем весь процесс повторяется до тех пор , пока не будет исчерпан весь запас товаров на складах и не будет удовлетворена потребность всех магазинов. По полученной матрице перевозок вычисляется целевая функция задачи **Z.**

Метод Фогеля

Метод состоит в следующем. Просматриваются все строки и столбцы матрицы тарифов, вычисляется разность между двумя наименьшими элементами в строке или в столбце. Затем из всех этих разностей выбирается строка или столбец с максимальной разность. В выбранной строке или столбце, как и в методе минимального элемента, заполняется клетка с наименьшим значением тарифа. Затем обнулявшаяся строка или столбец исключаются из рассмотрения и весь процесс повторяется до полного исчерпания запаса товаров на складах. По полученной матрице перевозок вычисляется целевая функция Z.

Метод двойного предпочтения

В начальной своей стадии этот метод похож на метод минимального элемента, но для столбцов. Просматривается первый столбец матрицы тарифов, в нем находится наименьший элемент. Затем проверяется, минимален ли этот элемент в своей строке. Если элемент минимален в своей строке, то по методу минимального элемента в эту клетку заносится значение D=MIN(A,B), соответствующие запас и потребность уменьшаются на эту величину. Обнулившаяся строка или столбец исключаются из рассмотрения и процесс повторяется, начиная с первого неисключенного столбца. Если найденный минимальный элемент не минимален в своей строке, то происходит переход к следующему столбцу и так до тех пор, пока не будет найден такой элемент. По полученной матрице перевозок вычисляется целевая функция Z. Этот метод требует интенсивных операции обмена с памятью, поэтому более громоздок по сравнению с остальными и требует больших вычислительных ресурсов.

Метод северо-западного угла

Метод состоит в следующем. Просматривается матрица тарифов перевозок C, начиная с левого верхнего угла (клетки). В эту клетку записывается величина D=MIN(A,B). Она вычитается из запасов и потребностей соответствующего склада и магазина. Обнулившаяся строка или столбец исключаются из рассмотрения, затем процесс опять повторяется для левой верхней клетки оставшейся матрицы и так до тех пор, пока весь запас товаров не будет исчерпан.

Решение транспортной задачи с помощью табличного процессора EXCEL

Фирма имеет 4 фабрики и 5 центров сбыта. Фабрики располагаются в Калуге, Твери, Новгороде и Смоленске. Их производственные возможности 200, 150, 225, и 175 единиц продукции ежедневно. Центры сбыта располагаются в Коломне, Смоленске, Рязани, Новгороде и Иванове. Их потребности составляют 100, 200, 50, 250, 150 единиц продукции ежедневно. Хранение на фабрике единицы продукции обходится в 0,75 рублей в день, а штраф за просроченную поставку единицы продукции равен 2,5 рублей в день. Стоимость перевозки приведена в таблице.

	Коломна	**Смоленск**	**Рязань**	**Новгород**	**Иваново**
Калуга	1,5	2	1,75	2,25	2,25
Тверь	2,5	2	1,75	1	1,5
Новгород	2	1,5	1,5	1,75	1,75
Смоленск	2	0,5	1,75	1,75	1,75

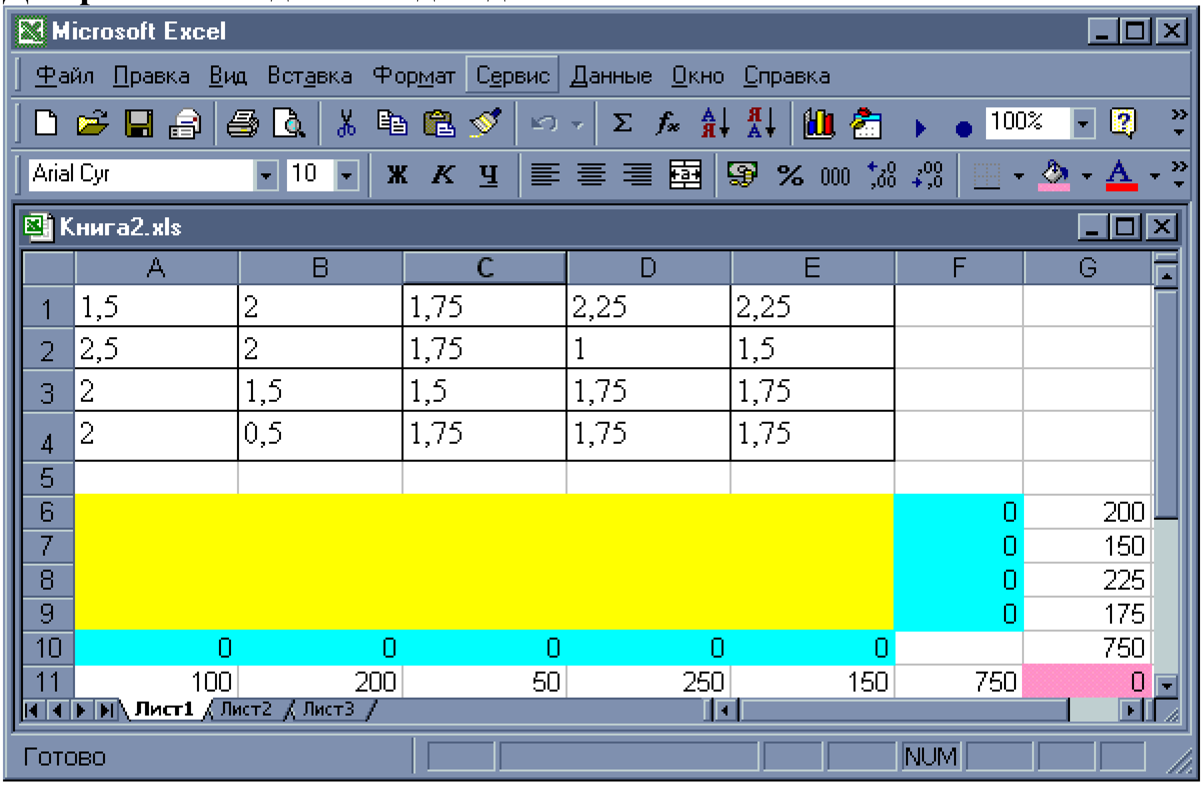
1. Минимизировать $z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}$, где c_{ij} – стоимость перевозок, x_{ij} – объем перевозок.
2. Ограничения:

- Объемы перевозок не могут быть отрицательными
  $x_{ij}>=0$, $i\in[1,4]$, $j\in[1,5]$
- Так как модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с фабрик, а потребности всех центров сбыта должны быть удовлетворены

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j, \qquad j\in[1,5]; \qquad b_j \text{ – спрос в j-м центре.}$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = a_i, \qquad i\in[1,4]; \qquad a_i \text{ – объем производства на i-й фабрике.}$$

Для решения задачи введем данные:



	A	B	C	D	E	F	G
1	1,5	2	1,75	2,25	2,25		
2	2,5	2	1,75	1	1,5		
3	2	1,5	1,5	1,75	1,75		
4	2	0,5	1,75	1,75	1,75		
5							
6						0	200
7						0	150
8						0	225
9						0	175
10	0	0	0	0	0		750
11	100	200	50	250	150	750	0

A1:E4 стоимости перевозок.

A6:E9 значения неизвестных (объемы перевозок).

G6:G9 объемы производства на фабриках.

A11:E11 потребность в продукции в центрах сбыта.

G11 целевая функция: =СУММПРОИЗВ(A1:E4;A6:E9).

В ячейки A10:E10 введены формулы, определяющие объем продукции, ввозимой в центры сбыта:

=СУММ(A6:A9)
=СУММ(B6:B9)
=СУММ(C6:C9)
=СУММ(D6:D9)
=СУММ(E6:E9)

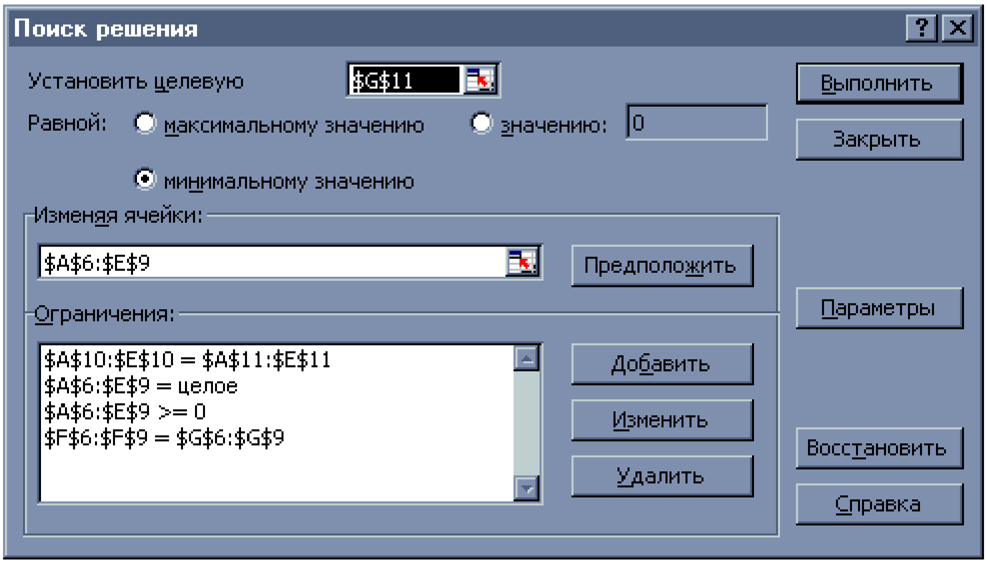
В ячейки F6:F9 введены формулы, вычисляющие объем продукции, вывозимой с фабрик:

=СУММ(A6:E6)
=СУММ(A7:E7)
=СУММ(A8:E8)
=СУММ(A9:E9)

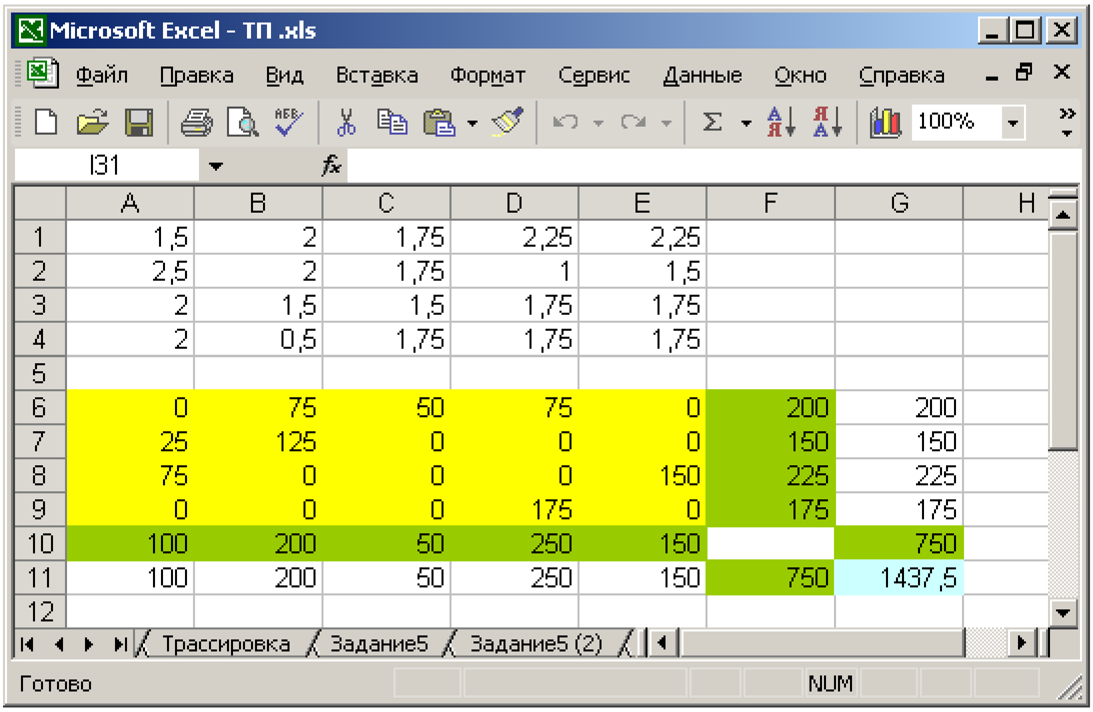
Задача решается с помощью инструмента EXCEL **«Поиск решения»**: **Сервис/Поиск решения.**

В диалоговом окне **Поиск решения** произведем заполнение:

Установить целевую ячейку:	$G$11
Равной:	Минимальное значение
Изменяя ячейки:	$A$6:$E$9
Ограничения:	$A$10:$E$10=$A$11:$E$11
	$A$6:$E$9>=0
	$F$6:$F$9=$G$6:$G$9



В результате будет получено решение:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1,5	2	1,75	2,25	2,25			
2	2,5	2	1,75	1	1,5			
3	2	1,5	1,5	1,75	1,75			
4	2	0,5	1,75	1,75	1,75			
5								
6	0	75	50	75	0	200	200	
7	25	125	0	0	0	150	150	
8	75	0	0	0	150	225	225	
9	0	0	0	175	0	175	175	
10	100	200	50	250	150		750	
11	100	200	50	250	150	750	1437,5	
12								

Задания:

1. Фирме необходимо перевезти из Твери, Клина, Торжка лошадей для их участия в скачках. Лошадей необходимо доставить в Москву, Санкт-Петербург и Новгород. В Твери находится 25 лошадей, в Клину 38, а в Торжке 18. В Москву необходимо доставить 42 лошади, в Санкт-Петербург 25 лошадей, а в Новгород 14 лошадей. Стоимость перевозки 1 лошади приведена в таблице:

	Москва	Санкт-Петербург	Новгород
Тверь	300	550	500
Клин	200	500	500
Торжок	400	600	500

Как следует организовать перевозку лошадей, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы?

2. Четыре мукомольных завода (М1, М2, М3, М4) производят ежемесячно 900, 400, 1200, 500 тонн муки. Мука должна быть передана потребителям A, B, C, D, ежемесячные запросы которых составляют 500, 600, 400, 1200 тонн. Стоимость транспортировки от заводов до покупателей приведена в таблице:

Завод	Потребитель			
	A	B	C	D
М1	13	14	19	25
М2	5	7	6	20
М3	6	9	11	15
М4	20	25	32	39

Составить план распределения, минимизирующий транспортные расходы.

3. Хлебобулочный комбинат имеет 3 пекарни (П1, П2, П3), которые производят за некоторый промежуток времени 10, 15, 25 тонн хлебобулочных изделий. Данные изделия поставляются в 4 магазина М1, М2, М3, М4, потребности которых составляют: 8, 12, 20, 10 тонн изделий. Стоимости транспортировок 1 тонны изделий из пекарен в магазины представлена в таблице:

	М1	М2	М3	М4
П1	8	11	11	12
П2	13	16	16	13
П3	10	8	8	10

Как необходимо спланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы?

4. Сталеплавильная компания располагает тремя заводами З1, З2, З3, способными произвести за некоторый промежуток времени 50, 30 и 20 тыс. тонн стали, соответственно. Свою продукцию компания поставляет четырем потребителям (П1, П2, П3 и П4), потребности которых составляют 12, 15, 25 и 36 тыс. тонн стали, соответственно. Стоимости производства и

транспортировки 1 тыс. тонн стали с различных заводов различным потребителям приведены в таблице:

Потребитель	Завод		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$П_1$	15	19	14
$П_2$	19	18	16
$П_3$	19	18	20
$П_4$	15	19	18

Определите минимальные общую стоимость, объемы производства на каждом заводе и планы перевозок.

5. Компания контролирует три фабрики (Ф1, Ф2 и Ф3), способные произвести 50, 25 и 25 тыс. изделий еженедельно. Она заключила договоры с четырьмя заказчиками З1, З2, З3 и З4, которым требуется еженедельно 15, 20, 20 и 30 тыс. изделий. Стоимости производства и транспортировки 1 тыс. изделий заказчикам с фабрик приведены в таблице:

Фабрика	Заказчик			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$Ф_1$	13	17	17	14
$Ф_2$	18	16	16	18
$Ф_3$	12	14	19	17

Определите минимизирующие общую стоимость, объемы производства и распределения для каждой фабрик.

6. Четыре сталелитейных завода (I, II, III и IV) производят еженедельно 950, 300, 1350 и 450 тонн стали определенного сорта, соответственно. Стальные болванки должны быть переданы потребителям A, B, C, D, E, еженедельные запросы которых составляют 250, 1000, 700, 650 и 450 тонн стали, соответственно. Стоимость транспортировки от заводов к потребителям в тоннах приведена в таблице:

Завод	Потребитель				
	A	B	C	D	E
I	12	16	21	19	32
II	4	4	9	5	24
III	3	8	14	10	26
IV	24	33	36	34	49

Какой нужно составить план распределения стальных болванок, чтобы минимизировать общую стоимость?

7. Компания владеет тремя заводами (А, Б, В). Соответствующие стоимости производства равны 26, 23 и 22 на единицу, объем производства 6000, 3000 и 3000 единиц. Компания обязалась поставлять соответственно 1500, 2500, 2700 и 3300 единиц в города Г, Д, Е, Ж. При заданных стоимостях перевозок составьте оптимальные планы производства и распределения.

Город	Стоимость транспортировки		
	А	Б	В
Г	1	9	6
Д	4	2	1
Е	1	2	7
Ж	9	8	3

8. Фирма «Фауна» владеет 4-мя питомниками: П1, П2, П3, П4,- в которых выращивает за месяц 100, 150, 250, 200 коробок цветов. Выращенные цветы поставляются в 4 магазина: М1, М2, М3, М4,- потребности которых составляют 150, 120, 200, 230 коробок цветов. Стоимость транспортировки 1 коробки из питомников в магазины представлена в таблице:

	М1	М2	М3	М4
П1	10	7	5	8
П2	9,6	3,2	6,4	6,1
П3	4,2	11	3,2	4
П4	2,8	3,4	3,8	7

Как необходимо спланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы?

9. Фирма заключила контракты с тремя складами о хранении своей продукции на них. Вместительность складов 2500, 750, 1750 единиц товаров, соответственно. Фирма располагает тремя видами продукции А, В, С, запасы которых составляют 1910, 970, 2120 единиц, соответственно. Стоимость хранения товаров на складах приведена в таблице:

	Виды товаров		
Склады	А	В	С
1	0,2	1	0,2
2	0,4	1	0,5
3	0,5	0,5	0,4

Составить план хранения товаров на складах, минимизирующий затраты фирмы.

10. Компания по переработке мусора располагает тремя заводами (З1, З2, З3), способными перерабатывать мусор и производить за некоторый промежуток времени 100, 70, 50 кг экологически – чистой продукции, соответственно. Свою продукцию компания поставляет четырем предприятиям П1, П2, П3, П4, потребности которых составляют 50, 70, 40 и 60 кг, соответственно. Стоимость производства и транспортировки 1 кг продукции с заводов на предприятия приведены в таблице:

	Завод		
Предприятие	З1	З2	З3
П1	5	15	5
П2	9	12	7
П3	7	10	10
П4	10	13	6

Определить планы перевозок, минимизирующие затраты.

11. Строительная компания построила четыре дома общей площадью 1350, 980, 640, 770 тыс. кв. метров соответственно. Компания заключила контракты с пятью фирмами по отделке помещений. Каждая из них способна организовать отделочные работы на 700, 940, 490, 950, 660 тыс. кв. м. Стоимость работ на 1 тыс. кв. м. приведена в таблице:

	Фирмы по отделке помещений				
Дома	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Ф5
Д1	15	12	30	15	10
Д2	10	10	20	15	25
Д3	20	30	10	10	20
Д4	25	17	5	12	15

Какой нужно составить план отделочных работ, чтобы минимизировать расходы строительной компании?

12. Транспортная фирма заключила 3-х сторонний договор о перевозке грузов со складов 1-го клиента (С1, С2,С3) на склады 2-го (К1, К2, К3, К4). У 1-го клиента на складах имеется 300, 600 и 400 тонн груза, а склады 2-го клиента могут принять 200, 300, 400 и 500 тонн груза, соответственно. Стоимость перевозки 1-ой тонны груза со складов 1-го клиента на склады 2-го приведены в таблице:

Склады 1-го клиента	Склады 2-го клиента			
	К1	К2	К3	К4
С1	10	4	8	11
С2	12	8	6	9
С3	7	10	12	8

Определить откуда, куда и сколько нужно перевезти грузов, чтобы расходы при перевозке были минимальны.

13. Гражданин купил в Сбербанке 450 долларов США, 350 немецких марок и 350 евро и решил заработать денег на разнице курсов, посетив 5 обменных пунктов. В силу некоторых обстоятельств он решил ограничить сдачу валюты 200, 250, 120, 280 и 300 единицами в 1, 2, 3, 4 и 5-ом обменных пунктах, соответственно. Разница курсов продажи валюты в Сбербанке и покупки в обменных пунктах приводится в таблице (в рублях):

Валюта	Обменные пункты				
	1	2	3	4	5
Доллар	- 0,4	0,6	- 0,3	0,7	1,2
Марка	0,8	- 0,3	- 0,5	1	- 0,4
Евро	-1	0,8	0,7	- 0,3	- 0,4

Определить, сколько, куда и какой валюты нужно сдать гражданину, чтобы добиться максимальной прибыли, при выполнении всех условий.

14. Компания владеет двумя фабриками Ф1 и Ф2, производящими электронное оборудование. Фабрики в течение некоторого периода выпускает 16 и 12 тыс. изделий, соответственно, при нормальных темпах производства. При сверхурочной работе эти показатели могут быть повышены до 20 и 14 тыс. изделий, соответственно. Дополнительная стоимость производства 100 изделий в сверхурочное время на Ф1 и на Ф2 составляет 8 единиц. Компания снабжает трех потребителей П1, П2, и П3, потребности которых в течение одного и того же периода составляют 10, 13 и 7 тыс. изделий, соответственно. Стоимости перевозок 1 тыс. изделий потребителю с фабрик приведены в таблице:

Фабрика	Потребитель		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$Ф_1$	5	4	6
$Ф_2$	6	3	2

Найдите решение транспортной задачи.

15. Фирма предложила владельцам трех авиалиний перевозить бригады специалистов в различные части света. Стоимость перевозок приведена в таблице:

Авиалиния	Сидней	Калькутта	Бейрут	Даллас	Сан-Паулу
I	24	16	8	10	14
II	21	15	7	12	16
III	23	14	7	14	12

Администрация фирмы решила, что контракты на перевозку будут заключаться с владельцами авиалиний в отношении 2 : 3 : 2, а также, что из 70 намеченных на следующий год перевозок 10 - в Сидней, 15 - в Калькутту, 20 - в Бейрут, 10 - в Даллас и 15 - в Сан-Паулу.

Как следует распределить контракты на перевозки для минимизации общей стоимости при условии удовлетворения запросов администрации фирмы? Какова минимальная стоимость перевозок, удовлетворяющих приведенным выше ограничениям?

16. Некоторый продукт производится на двух заводах и распределяется между двумя пользователями. Их потребности на ближайшие два месяца приведены в таблице:

Пользователь	Потребность	
	Август	Сентябрь
1	420	550
2	350	480

Стоимость транспортировки продукта с заводов потребителям приведена в таблице:

Завод	Потребитель	
	1	2
1	10	13
2	12	6

Стоимость производства единицы продукта и объем производства по плану за два месяца приведены в таблице:

Завод	Стоимость производства.		Объем	
	Август	Сентябрь	Август	Сентябрь
1	3,0	3,6	500	600
2	3,2	2,9	300	500

По условию задачи возможно производить продукт в течение месяца, хранить его лишь в течение месяца, а затем отправлять пользователю. Стоимость хранения составляет 0,5 на заводе 1 и 0,6 на заводе 2.

Требуются найти оптимальные планы производства и распределения. Сформулируйте задачу как транспортную и найдите оптимальное решение.

5. Задача о назначениях

Четыре человека с номерами M_1, M_2,…, M_4 способны выполнить четыре задания с номерами T_1, T_2,…, T_4. В силу разной квалификации на выполнение этих заданий им потребуется различное время. Как следует распределить людей по заданиям, чтобы минимизировать время выполнения? Время выполнения приведено и таблице

Люди	Задания			
	T1	T2	T3	T4
M_1	1	4	6	3
M_2	9	10	7	9
M_3	4	5	11	7
M_4	8	7	8	5

Пусть X_{ij} - время участия i-го человека в выполнении j-го задания. Все величины X_{ij} - неотрицательны, и, поскольку каждый человек должен быть полностью задействован, а каждое задание полностью выполнено, величина X_{ij} должна удовлетворять следующим ограничениям:

$$\begin{array}{c} X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{14} = 1, \\ \text{---------------------} \\ X_{41} + X_{42} + \ldots + X_{44} = 1, \\ \\ X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{41} = 1, \\ \text{---------------------} \\ X_{14} + X_{24} + \ldots + X_{44} = 1, \end{array} \qquad (5.1)$$

При этих ограничениях минимизируется полное время

$$T = 1\ X_{11} + 5\ X_{12} + \ldots + 8\ X_{43} + 5\ X_{44}\ . \qquad (5.2)$$

Таким образом, это задача линейного программирования транспортного типа. Поскольку задача транспортная, в ее оптимальном решении (целочисленном) четыре из величин X_{ij} будут равны 1, а остальные - 0. С другой стороны, в матрице времени размерностью 4×4 надо найти четыре элемента - по одному в каждой строке и каждом столбце, таких, чтобы сумма выбранных элементов была минимальной. Условие равенства X_{ij} 0 или 1 в некоторых случаях необходимо, чтобы придать смысл формулировке задачи.

Задача может быть обобщена для матриц размерностью $n \times n$. Для каждой такой матрицы задача состоит в выборе n элементов - по одному в каждой строке и по одному в каждом столбце, таких, что их сумма минимальна.

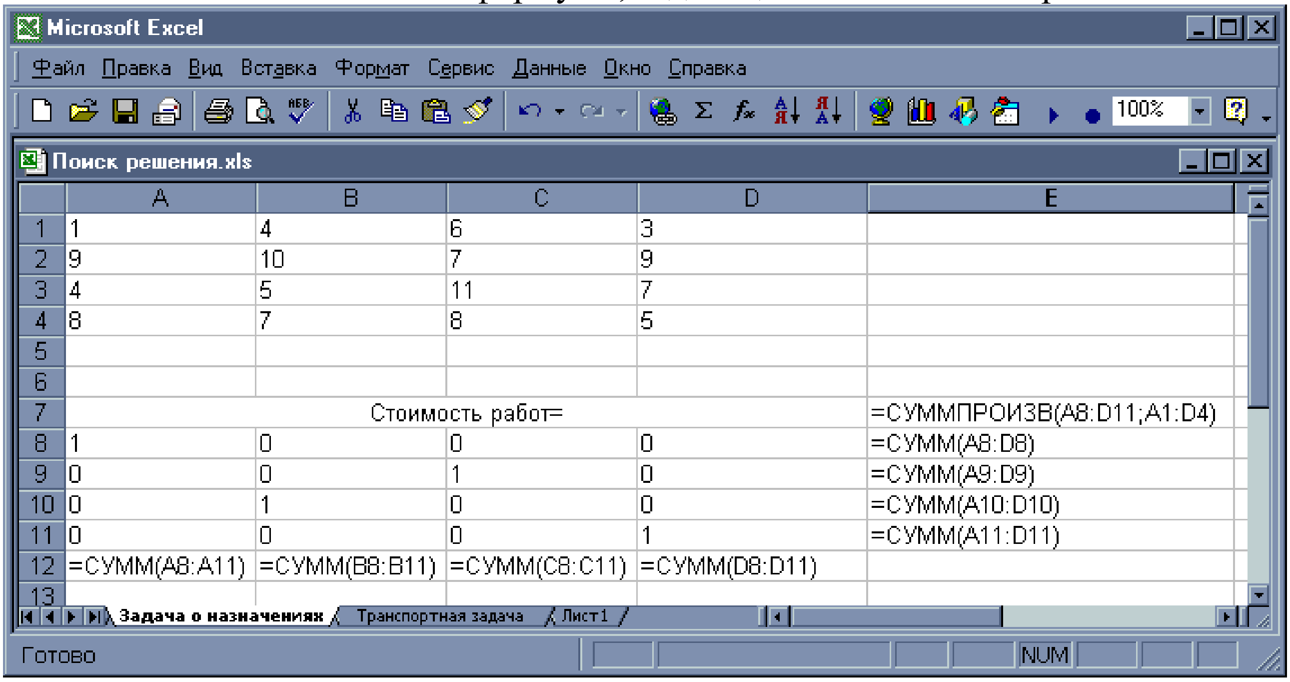
Решение задачи о назначениях с помощью табличного процессора EXCEL

Математическая модель задачи имеет вид:

3. Минимизировать $z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$.
4. Ограничения: Пусть $x_{ij}=1$, если i-м рабочим выполняется j-я работа, и $x_{ij}=0$, если i-м рабочим не выполняется j-я работа.

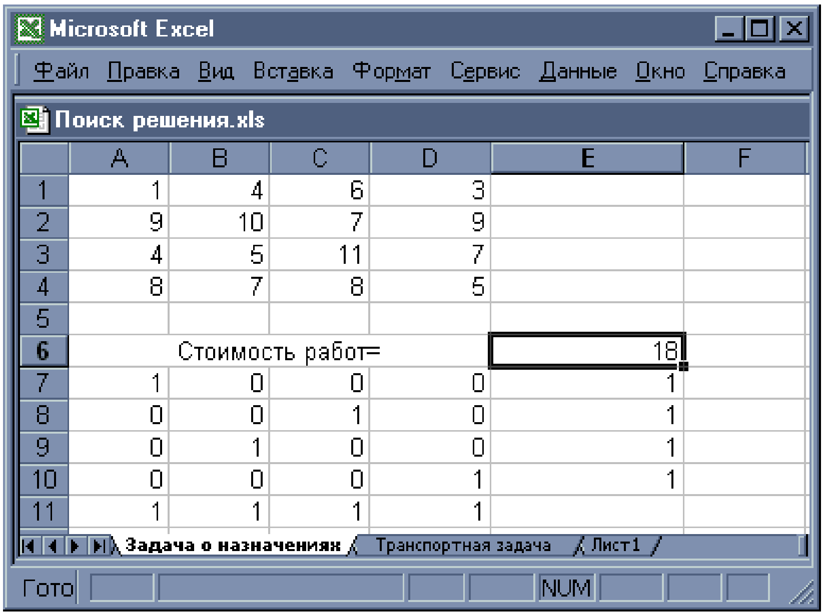
$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1,\ j\in[1,4]; \qquad \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1,\ i\in[1,4]; \qquad x_{ij}\in\{0,1\}$$

В ячейку E7 введем целевую функцию, вычисляющую стоимость работ, а в ячейки A12:D12 и E8:E11 - формулы, задающие левые части ограничений:



	A	B	C	D	E
1	1	4	6	3	
2	9	10	7	9	
3	4	5	11	7	
4	8	7	8	5	
5					
6					
7		Стоимость работ=			=СУММПРОИЗВ(A8:D11;A1:D4)
8	1	0	0	0	=СУММ(A8:D8)
9	0	0	1	0	=СУММ(A9:D9)
10	0	1	0	0	=СУММ(A10:D10)
11	0	0	0	1	=СУММ(A11:D11)
12	=СУММ(A8:A11)	=СУММ(B8:B11)	=СУММ(C8:C11)	=СУММ(D8:D11)	
13					

После выполнения расчетов будет получено решение:



	A	B	C	D	E	F
1	1	4	6	3		
2	9	10	7	9		
3	4	5	11	7		
4	8	7	8	5		
5						
6		Стоимость работ=			18	
7	1	0	0	0	1	
8	0	0	1	0	1	
9	0	1	0	0	1	
10	0	0	0	1	1	
11	1	1	1	1		

Задания:

Имеются n рабочих и m видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-м рабочим j-й работы приведена в таблице, где рабочему соответствует строка, а работе - столбец.

Необходимо составить план работ так, чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной.

1.

Виды работ. Стоимость их выполнения.

Рабочие

3	6	2	5	11
1	2	7	11	3
5	12	11	9	1
2	4	2	10	5

2.

Виды работ. Стоимость их выполнения.

Рабочие

8	6	2	5
5	2	9	8
3	8	1	9
1	4	2	3
3	7	10	5

3. Полевая топографическая экспедиция имеет в своем составе: строителей - 60 чел,. наблюдателей - 48 чел, нивелировщиков - 71 чел, топографов - 54 чел. Для постройки требуется 50 чел, для наблюдений - 63 чел, для нивелирования - 45 чел, для топографических работ - 75 чел. Производительность труда задана таблицей:

	Постройка	Наблюдение	Нивелирование	Топограф. работы
Строители	2,0	1,0	1,2	1,1
Наблюдатели	1,2	1,7	1,5	1,3
Нивелировщики	1,4	1,5	1,7	1,4
Топографы	1,2	1,6	1,5	1,7

Распределить наличные трудовые ресурсы исполнителей по видам работ так, чтобы обеспечить максимальную производительность труда.

4. Ансамбль состоит из 5 музыкантов (М1, М2, М3, М4, М5), которые должны выучить репертуар, состоящий из 5 пьес (П1, П2, П3, П4, П5). Из-за разной подготовленности и квалификации на изучение этих пьес потребуется различное время. Распределить музыкантов так, чтобы все пьесы были выучены, каждый музыкант был задействован только на своей партии пьесы, а время изучения пьес было минимальным.

	П1	П2	П3	П4
М1	2	4	6	7
М2	1	3	5	9
М3	3	5	2	1
М4	8	1	7	8

5. Хозяин владеет четырьмя верблюдами В1, В2, В3, В4, способными переносить грузы до 200 кг. Он заключил договора с четырьмя соседями, которым требуется еженедельно переносить грузы Г1, Г2, Г3, Г4 по 170 кг, 120 кг, 130 кг и 150 кг. Скорости передвижения верблюдов приведены в таблице:

	Грузы			
Верблюды	170	120	130	150
В1	10	11	11	10
В2	12	13	13	12
В3	9	15	14	9
В4	10	14	13	11

Спланировать перевозки так, чтобы минимизировать время перевозок. Каждый верблюд при этом может быть занят только на одной работе. Определить среднюю скорость всех верблюдов при оптимальной перевозке.

6. Авиакомпании требуется определить, сколько стюардесс следует принять на работу в течение шести месяцев при условии, что любая из них должна пройти предварительную подготовку. Потребности в количестве человеко-часов летного времени известны: в январе – 8000, в феврале – 9000, в марте – 8000, в апреле – 10000, в мае – 9000 и в июне – 12000.

Подготовка занимает один месяц, т.е. прием на работу должен хотя бы на один месяц опережать выход на работу. Обучаемая в течение месяца должна пройти 100 часовую практику, т.е. освобождается 100 человеко-часов за счет каждой обучаемой в течение месяца.

Каждая обученная стюардесса в течение месяца может иметь налет до 150 часов. В начале января авиакомпания уже имеет 60 подготовленных стюардесс. При этом ни одну из них не снимают с работы. Приблизительно 10% обучаемых стюардесс увольняются. Подготовленная стюардесса обходится авиакомпании в 800 рублей, а обучаемая – в 400 рублей в месяц.

Необходимо спланировать штат авиакомпании таким образом, чтобы минимизировать издержки за указанный период времени.

6. Аппроксимация экспериментальных данных

На практике часто приходится сталкиваться с задачей сглаживания экспериментальных зависимостей или задачей аппроксимации. Аппроксимацией называется процесс подбора эмпирической формулы φ(x) для установленной из опыта функциональной зависимости y=f(x). Эмпирические формулы служат для аналитического представления опытных данных.

Пример:

Имеются две наблюдаемые величины x и y. Значения этих наблюдаемых величин приведены в таблице:

	A	B	C	D	E	F
1	X	Y	Теор.значение Y	m	b	
2	1	7	7	1,885714	5,4	
3	2	9	9	1,885714	5,4	1,77
4	3	12	11			
5	4	13	13			
6	5	14	15			
7	6	17	17			

Необходимо построить линейную модель y = mx+b, наилучшим образом описывающую наблюдаемые значения. Обычно m и b подбираются так, чтобы минимизировать сумму квадратов разностей между наблюдаемыми и теоретическими значениями зависимой переменной y, т.е. минимизировать

$$Z=\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2, \text{ где } n \text{ – число наблюдений.} \qquad (6.1)$$

Для решения этой задачи отведем под переменные m и b ячейки D3 и E3, соответственно, а в ячейку F3 введем минимизированную функцию.

`=СУММКВРАЗН(B2:B7; E3+D3*A2:A7)`

Функция СУММКВРАЗН вычисляет сумму квадратов разностей для элементов указанных массивов.

Теперь выберем команду **Сервис, Поиск решения** и заполним открывшееся диалоговое окно **Поиск решения**. Отметим, что на переменные m и b ограничения не налагаются. В результате вычислений средство **Поиск решений** найдет: m=1,88571 и b=5,400.

Параметры `m` и `b` линейной модели `y=mx+b` можно определить с помощью функций `НАКЛОН` и `ОТРЕЗОК`. Функция `НАКЛОН` определяет коэффициент линейного тренда. Функция `ОТРЕЗОК` определяет точку пересечения линии линейного тренда с осью ординат.

Функции `НАКЛОН` и `ОТРЕЗОК` вычисляются по следующим формулам:

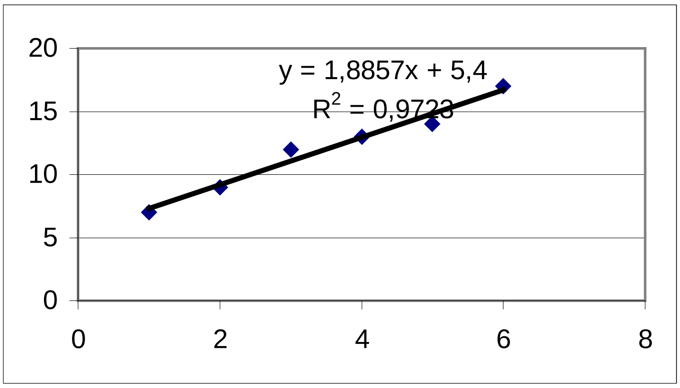
$$m = (n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i)/(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2),$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x}, \text{ãäå}\ \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \qquad (6.2)$$

В ячейках `D2` и `E2` найдены `m` и `b`, соответственно, по функциям:

```
= НАКЛОН(B2:B7; A2:A7)
= ОТРЕЗОК(B2:B7; A2:A7)
```

Коэффициенты `m` и `b` можно найти и другим способом: построить точечный график по диапазону ячеек A2:B7; затем выделить точки графика двойным щелчком и активизировать контекстное меню правой кнопкой мыши, выбрав команду **Добавить линию тренда**. В диалоговом окне **Линия тренда** на вкладке **Тип** выбрать параметр ***Линейная,*** а на вкладке **Параметры** установить флажки ***Показывать уравнение на диаграмме*** и ***Поместить на диаграмму величину достоверности аппрокси мации (R^2).***



По коэффициенту корреляции можно судить о правомерности использования линейного уравнения регрессии. Чем он ближе к единице, тем более обосновано это указывает на линейную зависимость между наблюдаемыми величинами. Если коэффициент корреляции близок к –1, то это говорит об обратной зависимости между наблюдаемыми величинами.

Флажок ***Пересечение кривой с осью Y в точке*** устанавливается только в случае, если эта точка известна. Например, если этот флажок установлен и в его поле введен 0, это означает, что ищется модель `y=mx`.

На основе найденных коэффициентов уравнения регрессии можно определить теоретическое значение наблюдаемой величины y. Вычислим теоретическое значение y в ячейке C2 при x из A2 по формуле:

=$D$2*A2+$E$2.

Теоретическое значение y в фиксированной точке (например, в ячейке C2) можно определить с помощью функции ПРЕДСКАЗ:

=ПРЕДСКАЗ(A2; $B$2:$B$7; $A$2:$A$7).

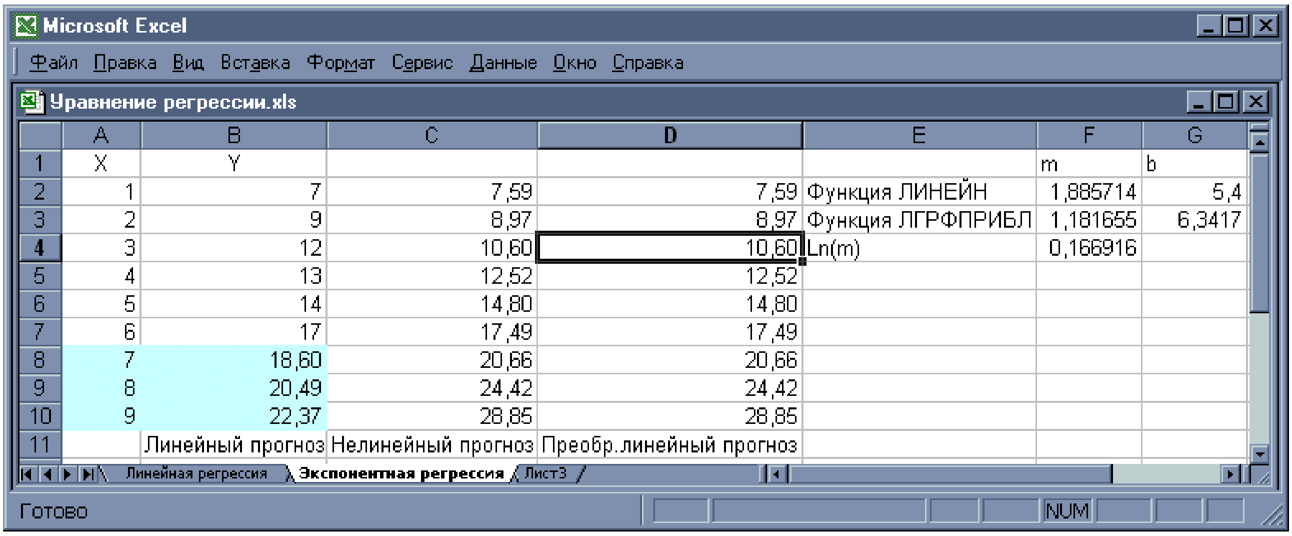
Другой часто встречающейся на практике моделью, описывающей вид экспериментальных данных, является экспоненциальная модель, которая описывается уравнением $y = bm^x$

Значения экспоненциального тренда можно предсказать с помощью функции РОСТ, а значения параметров экспоненциальной модели определяются с помощью функции ЛГРФПРИБЛ:

РОСТ (известные_значения_y; известные_значения_x; новые_значения_y; конст)

ЛГРФПРИБЛ (известные_значения_y; известные_значения_x; конст; статистика)

Кроме того, одномерную экспоненциальную модель можно построить графически. В таблице приведены результаты построения экспоненциального уравнения тренда для x 7, 8 и 9.



	A	B	C	D	E	F	G
1	X	Y				m	b
2	1	7	7,59	7,59	Функция ЛИНЕЙН	1,885714	5,4
3	2	9	8,97	8,97	Функция ЛГРФПРИБЛ	1,181655	6,3417
4	3	12	10,60	10,60	Ln(m)	0,166916	
5	4	13	12,52	12,52			
6	5	14	14,80	14,80			
7	6	17	17,49	17,49			
8	7	18,60	20,66	20,66			
9	8	20,49	24,42	24,42			
10	9	22,37	28,85	28,85			
11		Линейный прогноз	Нелинейный прогноз	Преобр.линейный прогноз			

В диапазоне ячеек B8:B10 введена функция построения линейного тренда:

=ТЕНДЕНЦИЯ(B2:B7; A2:A7; A8:A10)

В диапазон ячеек C2:C10 введена функция построения экспоненциального тренда:

=РОСТ(B2:B7; A2:A7; A2:A10)

Линейный и экспоненциальный тренды тесно связаны между собой. В диапазон ячеек D2:D10 введена функция:

=EXP(ТЕНДЕНЦИЯ(Ln(B2:B7); A2:A7; A2:A10))

Как видно из таблицы, значения в диапазонах C2:C10 и D2:D10 совпадают.

В диапазоны ячеек F2:G2 и F3:G3 введены функции:

= ЛИНЕЙН(B2:B7; A2:A7)

= ЛГРФПРИБЛ(B2:B7; A2:A7)

для определения параметров линейной и экспоненциальной моделей.

Квадрат коэффициента корреляции экспоненциальной модели равен 0,947 и меньше квадрата коэффициента корреляции линейной модели (=0,9923). Таким образом, в данном примере линейная модель более достоверно описывает зависимость между наблюдаемыми величинами.

Задания:

1. Построить линейную модель для двух наблюдаемых величин (например, объем реализованных фирмой автомобилей за указанное число недель).

Неделя	1	2	3	4	5	6	7	8
Кол-во машин	13	19	26	30	37	44	49	55

2. Найдите значение SQRT(2), имея три узла интерполяции:

X	1,69	1,96	2,25
Y	1,3	1,4	1,5

ЛИТЕРАТУРА:

1. Б. Банди Основы линейного программирования.- М.: «Радио и связь» 1989 г., 176 с.
2. А. Гарнаев Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах. - СПб: «BHV» 1999г., 336 с.
3. В. Гельман Решение математических задач средствами EXCEL: Практикум. СПб.: Питер, 2003. – 240 с.
4. О. Гусева, Е. Гусев, Н. Миронова. Одна задача, два решения. М.: Информатика и образование, 2000, 96 с.
5. Б. Курицкий Поиск оптимальных решений средствами EXCEL.- СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 1999.
6. М. Пинегина Математические методы и модели в экономике. – М.: Издательство «Экзамен», 2002. – 128.

Средства обеспечения освоения дисциплины

1. Ю. Губарь. Введение в математическое моделирование – http://www.intuit.ru
2. Ю. Губарь. Введение в математическое программирование – http://www.intuit.ru
3. А. Кудлаев Обучающе-аттестующее программное средство «Организация офиса» информационно-образовательного пространства в области геодезии, картографии, кадастра и наук о Земле. Регистрационное свидетельство НТЦ «Информрегистр» Министерства РФ по связи и информатизации №8416 2003 г.
4. В. Пакулин Решение задач оптимизации управления с помощью MS Excel 2010 - http://www.intuit.ru/studies/courses/4751/1020/info